Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Antonio Mambriani

Sul problema di Geöcze

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 13, nº 1-4 (1948), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_13_1-4_1_0>

SUL PROBLEMA DI GEÖCZE

di ANTONIO MAMBRIANI (Bologna). (*)

Introduzione.

Un' importante Conferenza tenuta nel 1942 dal TONELLI ([1]), nella Università di Bologna, mi portò a studiare il seguente notevole

PROBLEMA. - *Data una superficie continua S, stabilire se è possibile approssimare quanto si vuole l'area $L(S)$ secondo* LEBESGUE *di S mediante le aree delle poliedriche inscritte in S.*

Questo problema è stato recentemente denominato da T. RADÓ e dalla sua Scuola americana *il problema di* GEÖCZE, ed il RADÓ e la sua Scuola hanno già dato notevoli contributi alla sua risoluzione ([2]).

Consultai su tale problema il TONELLI il quale mi consigliò di rivolgermi al prof. L. CESARI che si era già occupato tanto profondamente del problema della quadratura delle superficie ([3]). Nel 1943 il CESARI rilevò che tale problema

---

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Università di Bologna.

([1]) L. TONELLI: *Su alcuni concetti dell'Analisi moderna*, Annali R. Scuola Norm. Sup., s. 2, vol. 11 (1942), pp. 107-118.

([2]) T. RADÓ: *On a problem of* GEÖCZE, American Journal of Mathematics, vol. 65 (1943), pp. 361-381; *Some remarks on the problem of* GEÖCZE, Duke Mathematical Journal, vol. 11 (1944), pp. 497-506.

H. D. HUSKEY: *Contribution to the problem of* GEÖCZE, Duke Mathematical Journal, vol. 10 (1943), pp. 249-257; *Further contributions to the problem of* GEÖCZE, Idem, vol. 11 (1944), pp. 333-339.

([3]) L. CESARI: *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*, Bollettino Unione Matem. Ital., s. 2, vol. 4 (1942), pp. 109-117; in questo lavoro sono elencati i precedenti lavori del CESARI sulla quadratura delle superficie; *Sul concetto di trasformazione assolutamente continua*, Bollettino Unione Matem. Ital., s. 2, vol. 5 (1942), pp. 5-10; *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*, Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. 2, vol. 12 (1943), pp. 61-84; *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*, Memorie R. Accad. d'Italia, vol. 14 (1944), pp. 891-953; *Sulla rappresentazione delle superficie continue di area finita secondo* LEBESGUE, Rendic. Istituto Lombardo, s. 3, vol. 79 (1945-1946); *Un complemento alla Nota « Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie »*, Rendic. Accad. Naz. Lincei, s. 8, vol. 1, (1946), pp. 292-296; *Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue*, Rendic. Accad. Naz. Lincei, s. 8, vol. 1 (1946), pp. 509-514.

poteva essere messo in connessione con delicate questioni di approssimazione dell' integrale di LEBESGUE per le funzioni di una e di due variabili indipendenti. Seguendo tale osservazione ho già dato in due lavori precedenti ([4]) vari teoremi sull' approssimazione dell' integrale di LEBESGUE ; qui mi propongo di applicare questi teoremi alla risoluzione del problema di GEÖCZE.

Data una superficie continua S, diciamo $L^*(S)$ il minimo limite delle aree delle poliedriche inscritte in S e tendenti a S. Risulta, per la definizione stessa di area $L(S)$ secondo LEBESGUE,

$$L^*(S) \geqslant L(S).$$

Il problema di GEÖCZE consiste allora nello *stabilire se è sempre* $L^*(S) = L(S)$.

Nelle considerazioni seguenti hanno un impiego fondamentale certe particolari poliedriche inscritte in S, che chiameremo *poliedriche di* TONELLI, ad estensione della stessa denominazione da me introdotta in altro lavoro ([5]). Precisamente, fissata una particolare rappresentazione parametrica della superficie S, sia

$$S \equiv \{ x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v) \ ; \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \ 0 \leqslant v \leqslant 1 \},$$

si prendano due qualsiasi gruppi di valori

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1, u_2, \dots, u_m, \\ v_1, v_2, \dots, v_n, \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant u_1 < u_2 < \dots < u_m \leqslant 1 \ , \\ 0 \leqslant v_1 < v_2 < \dots < v_n \leqslant 1 \ ; \end{array} \right.$$

indi si considerino i punti

$$P_{i,j} \equiv (x(u_i, v_j), \ y(u_i, v_j), \ z(u_i, v_j)), \qquad (i = 1, 2, \dots, m \ ; \ j = 1, 2, \dots, n),$$

della superficie S, e i corrispondenti triangoli

$$\begin{array}{l} T'_{i,j} \equiv P_{i,j} \, P_{i+1,j} \, P_{i,j+1} \ , \\ T''_{i,j} \equiv P_{i+1,j+1} \, P_{i+1,j} \, P_{i,j+1} \ , \end{array} \qquad (i = 1, 2, \dots, m-1 \ ; \ j = 1, 2, \dots, n-1).$$

La poliedrica

$$T_{m,n} \equiv \{ x = \varphi(u, v), \ y = \psi(u, v), \ z = \chi(u, v) \ ; \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_m \ , \ v_1 \leqslant v \leqslant v_n \},$$

di facce i $2(m-1)(n-1)$ triangoli precedenti, si dirà *una poliedrica di* TONELLI *inscritta in* S *e relativa alla rappresentazione parametrica adottata per* S.

([4]) A. MAMBRIANI : *Sull'approssimazione dell' integrale di* LEBESGUE *per le funzioni di una variabile*, in corso di stampa nel Bollettino Unione Matem. Ital., s. 3, vol. 2 (1947) ; *Sull' approssimazione dell' integrale di* LEBESGUE *per le funzioni di due variabili*, in corso di stampa nei Rendic. Istituto Lombardo, s. 3, vol. 80 (1947). Questi due lavori saranno richiamati sempre nel seguito rispettivamente con le sigle

« A. L., I », « A. L., II ».

([5]) A. MAMBRIANI : *Su due notevoli integrali del* TONELLI, Annali di Matem. pura e appl., s. 4, t. 23 (1944), pp. 51-68. Cfr., in particolare, pp. 54-55.

Il minimo limite delle aree delle poliedriche di TONELLI inscritte in S, relative a tutte le possibili rappresentazioni parametriche di S, e tendenti ad S, si dirà l'*area secondo* TONELLI *di* S e s'indicherà con $T(S)$. Risulta, manifestamente,

$$T(S) \geqslant L^*(S).$$

Mi propongo di stabilire il seguente

TEOREMA. - *Se* $S \equiv \{x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)\,;\ 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1\}$ *è una superficie continua di area* $L(S)$ *secondo* LEBESGUE *finita, se le funzioni* $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ *sono assolutamente continue secondo* TONELLI, *e se le derivate* $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ *sono integrabili* L^2, *allora anche l'area* $T(S)$ *secondo* TONELLI *è finita e si ha*

$$T(S)=L(S) \quad \textit{e quindi anche} \quad L^*(S)=L(S).$$

Poichè una superficie continua S_0 data in forma ordinaria

$$S_0 \equiv \{z=f(x,y)\,;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

è *non degenere* secondo una nota terminologia (6), e quindi ammette (7) una rappresentazione parametrica soddisfacente alle condizioni del teorema precedente, si ha la seguente conclusione :

Per ogni superficie continua $S_0 \equiv \{z=f(x,y)\,;\ 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, *data in forma ordinaria, risulta* $L^*(S_0)=L(S_0)$.

Resta così interamente risoluto il problema di GEÖCZE per ogni superficie continua data in forma ordinaria, ciò che completa un notevole teorema del RADÓ (8).

§ 1. - Un caso particolare notevole.

1. - Dimostreremo il nostro teorema provando dapprima che esso vale per le superficie piane (in generale, multiple) proiezioni della superficie S sui piani coordinati. Consideriamo ad esempio la proiezione $\mathcal{S}$ di S sul piano (x, y), e proviamo il seguente

TEOREMA PARTICOLARE. - *Se* $\mathcal{S} \equiv \{x=x(u,v),\ y=y(u,v)\,;\ 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1\}$ *è una superficie continua di area* $L(\mathcal{S})$ *secondo* LEBESGUE *finita, se le funzioni* $x(u,v)$, $y(u,v)$ *sono assolutamente continue secondo*

(6) C. B. MORREY : *A class of representations of manifolds*, Amer. Journ. of Mathematics, vol. 55 (1933), pp. 683-707 ; idem, vol. 56 (1934), pp. 275-293 ; *An analytic characterization of surfaces of finite* LEBESGUE *area*, idem, vol. 57 (1935), pp. 692-702 ; idem, vol. 58 (1936), pp. 313-322.

L. CESARI : *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*, Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. 2, vol. 12 (1943), pp. 61-84.

(7) Loc. cit. in (6).

(8) Cfr. il primo dei lavori citati in (2).

TONELLI, *e se le derivate parziali* x_u, x_v, y_u, y_v *sono integrabili* L^2, *allora anche l'area* $T(\mathcal{S})$ *secondo* TONELLI *è finita e si ha*

$$T(\mathcal{S})=L(\mathcal{S}).$$

Osserviamo subito che una tale superficie $\mathcal{S}$ è di classe L secondo C. B. MORREY ([9]) e quindi è $L(\mathcal{S})=I(\mathcal{S})$, essendo

$$I(\mathcal{S})=\int_0^1\int_0^1 |\, x_u\, y_v - y_u\, x_v \,|\, du\, dv\,.$$

Basterà, perciò, dimostrare che ad ogni N intero positivo, arbitrariamente grande, si possono far corrispondere due gruppi di punti

$$\text{(1)}\qquad 0\leqslant u_1<u_2<\dots<u_m\leqslant 1, \qquad 0\leqslant v_1<v_2<\dots<v_n\leqslant 1,$$

con

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} u_1<\frac{1}{N},\ 1-u_m<\frac{1}{N},\ u_{i+1}-u_i<\frac{1}{N} & \text{per } i=1,2,\dots,m-1,\\ v_1<\frac{1}{N},\ 1-v_n<\frac{1}{N},\ v_{j+1}-v_j<\frac{1}{N} & \text{per } j=1,2,\dots,n-1,\end{cases}$$

in modo che, detta ([10])

$$\mathcal{C}_{m,n}\equiv\{\, x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v)\ ;\ u_1\leqslant u\leqslant u_m,\ v_1\leqslant v\leqslant v_n \,\}$$

la corrispondente poliedrica di TONELLI inscritta in $\mathcal{S}$ e relativa alla rappresentazione parametrica fissata per $\mathcal{S}$, si abbia

$$\text{(3)}\qquad \big|\,|\mathcal{C}_{m,n}|_{\cdot}-I(\mathcal{S})\,\big|<\frac{1}{N},$$

dove $|\mathcal{C}_{m,n}|_{\cdot}$ indica l'area, nel senso elementare, di $\mathcal{C}_{m,n}$.

Conviene però notare che è

$$I(\mathcal{S})=\int_{u_1}^{u_m}\int_{v_1}^{v_n} |\, x_u y_v - y_u x_v \,|\, du\, dv + R_N\,, \quad \text{con} \lim_{N\to+\infty} R_N=0.$$

Ne segue che, posto

$$\mathcal{J}_{m,n}=\int_{u_1}^{u_m}\int_{v_1}^{v_n} |\, x_u y_v - y_u x_v \,|\, du\, dv\,,$$

in luogo di (3) basterà dimostrare la diseguaglianza

$$\text{(3')}\qquad \big|\,|\mathcal{C}_{m,n}|_{\cdot}-\mathcal{J}_{m,n}\,\big|<\frac{1}{N}.$$

([9]) Loc. cit. in ([6]).

([10]) Conformemente alla definizione data nell'Introduzione.

Due gruppi di punti (1) soddisfacenti a (2) e tali che valga (3′), supposti esistenti, si diranno *due gruppi fondamentali di punti.*

2. - Considerati due *qualsiasi* gruppi di punti (1), resta individuato il sistema di punti, sulla superficie $\mathcal{S}$,

$$P_{i,j} \equiv (x(u_i, v_j),\ y(u_i, v_j)), \qquad (i=1, 2, ..., m\ ;\ j=1, 2, ..., n),$$

e la poliedrica di TONELLI $\mathcal{T}_{m,n}$ di vertici in tali punti e di facce i triangoli

$$\begin{aligned} \mathcal{T}'_{i,j} &\equiv P_{i,j}\ P_{i+1,j}\ P_{i,j+1}, \\ \mathcal{T}''_{i,j} &\equiv P_{i+1,j+1}\ P_{i+1,j}\ P_{i,j+1}, \end{aligned} \qquad (i=1, 2, ..., m-1\ ;\ j=1, 2, ..., n-1).$$

Abbiamo

$$(4) \qquad |\mathcal{T}_{m,n}|. = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (|\mathcal{T}'_{i,j}|. + |\mathcal{T}''_{i,j}|.),$$

dove con $|\mathcal{T}'_{i,j}|.$ e $|\mathcal{T}''_{i,j}|.$ s'indicano rispettivamente le aree dei triangoli $\mathcal{T}'_{i,j}$ e $\mathcal{T}''_{i,j}$.

Osserviamo che in analogia con (4) possiamo scrivere

$$(5) \qquad \mathcal{I}_{m,n} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\mathcal{I}'_{i,j} + \mathcal{I}''_{i,j}),$$

ponendo

$$(6) \qquad \mathcal{I}'_{i,j} = \mathcal{I}''_{i,j} = \frac{1}{2} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} |J|\, dv, \qquad \text{con } J = \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix}.$$

D'altra parte abbiamo

$$|\mathcal{T}'_{i\ j}|. = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} x(u_{i+1}, v_j) - x(u_i, v_j) & x(u_i, v_{j+1}) - x(u_i, v_j) \\ y(u_{i+1}, v_j) - y(u_i, v_j) & y(u_i, v_{j+1}) - y(u_i, v_j) \end{vmatrix},$$

e se poniamo, per brevità e per stabilire utili parallelismi,

$$\begin{aligned} x_{(u)}(u_i, v_j) &= \frac{x(u_{i+1}, v_j) - x(u_i, v_j)}{u_{i+1} - u_i}, & x_{(v)}(u_i, v_j) &= \frac{x(u_i, v_{j+1}) - x(u_i, v_j)}{v_{j+1} - v_j}, \\ y_{(u)}(u_i, v_j) &= \frac{y(u_{i+1}, v_j) - y(u_i, v_j)}{u_{i+1} - u_i}, & y_{(v)}(u_i, v_j) &= \frac{y(u_i, v_{j+1}) - y(u_i, v_j)}{v_{j+1} - v_j}, \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$(7) \qquad \frac{|\mathcal{T}'_{i,j}|.}{(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)} = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} x_{(u)}(u_i, v_j) & x_{(v)}(u_i, v_j) \\ y_{(u)}(u_i, v_j) & y_{(v)}(u_i, v_j) \end{vmatrix}$$

e anche

$$(7') \qquad |\mathcal{C}'_{i,j}|. = \frac{1}{2}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} |J'_{i,j}|\, dv, \quad \text{con} \quad J'_{i,j} = \begin{vmatrix} x_{(u)}(u_i, v_j) & x_{(v)}(u_i, v_j) \\ y_{(u)}(u_i, v_j) & y_{(v)}(u_i, v_j) \end{vmatrix},$$

e analogamente

$$(7'') \qquad |\mathcal{C}''_{i,j}|. = \frac{1}{2}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} |J''_{i,j}|\, dv, \quad \text{con} \quad J''_{i,j} = \begin{vmatrix} x_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & x_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \\ y_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & y_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \end{vmatrix}.$$

È manifesta l'analogia di (7′) e (7″) con (6), analogia che ci proponiamo di sfruttare opportunamente in ciò che segue.

3. - Sottraendo da (4) la (5) si ha

$$|\mathcal{C}_{m,n}|. - \mathcal{I}_{m,n} = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \{ (|\mathcal{C}'_{i,j}|. - \mathcal{I}'_{i,j}) + (|\mathcal{C}''_{i,j}|. - \mathcal{I}''_{i,j}) \},$$

e anche, per (6), (7′) e (7″),

$$(8) \qquad |\mathcal{C}_{m,n}|. - \mathcal{I}_{m,n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \{ (|J'_{i,j}| - |J|) + (|J''_{i,j}| - |J|) \}.$$

Passando ai valori assoluti e applicando la diseguaglianza

$$\big||A| - |B|\big| \leqslant |A - B|,$$

s' ottiene

$$(9) \qquad \big||\mathcal{C}_{m,n}|. - \mathcal{I}_{m,n}\big| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \{ |J'_{i,j} - J| + |J''_{i,j} - J| \}.$$

Essendo poi

$$|J'_{i,j} - J| =$$

$$= |\{x_{(u)}(u_i, v_j)y_{(v)}(u_i, v_j) - y_{(u)}(u_i, v_j)x_{(v)}(u_i, v_j)\} - \{x_u(u,v)y_v(u,v) - y_u(u,v)x_v(u,v)\}| \leqslant$$

$$\leqslant |x_{(u)}(u_i, v_j)y_{(v)}(u_i, v_j) - x_u(u,v)y_v(u,v)| + |y_{(u)}(u_i, v_j)x_{(v)}(u_i, v_j) - y_u(u,v)x_v(u,v)|,$$

$$|J''_{ij} - J| \leqslant$$

$$\leqslant |x_{(u)}(u_i, v_{j+1})y_{(v)}(u_{i+1}, v_j) - x_u(u,v)y_v(u,v)| + |y_{(u)}(u_i, v_{j+1})x_{(v)}(u_{i+1}, v_j) - y_u(u,v)x_v(u,v)|$$

da (9) segue

$$(10) \qquad \big||\mathcal{C}_{m,n}|. - \mathcal{I}_{m,n}\big| \leqslant K'_1 + K'_2 + K''_1 + K''_2,$$

essendo

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
K_1' &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, x_{(u)}(u_i, v_j)y_{(v)}(u_i, v_j) - x_u(u, v)y_v(u, v) \,|\,, \\
K_2' &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, y_{(u)}(u_i, v_j)x_{(v)}(u_i, v_j) - y_u(u, v)x_v(u, v) \,|\,, \\
K_1'' &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, x_{(u)}(u_i, v_{j+1})y_{(v)}(u_{i+1}, v_j) - x_u(u, v)y_v(u, v) \,|\,, \\
K_2'' &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, y_{(u)}(u_i, v_{j+1})x_{(v)}(u_{i+1}, v_j) - y_u(u, v)x_v(u, v) \,|\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Si nota che le espressioni (11) hanno tutte la stessa forma: da K_1' si passa a K_2' scambiando x con y, da K_1' si passa a K_1'' cambiando $x_{(u)}(u_i, v_j)$ in $x_{(u)}(u_i, v_{j+1})$ e cambiando $y_{(v)}(u_i, v_j)$ in $y_{(v)}(u_{i+1}, v_j)$, da K_1'' si passa a K_2'' scambiando x con y.

4. - Cerchiamo ora di valutare K_1'. Se nella funzione

$$F \equiv |\, x_{(u)}(u_i, v_j)y_{(v)}(u_i, v_j) - x_u(u, v)y_v(u, v) \,|\,,$$

che compare in K_1', dentro il segno di valore assoluto togliamo e aggiungiamo

$$x_u(u, v_j)y_{(v)}(u_i, v_j) + x_u(u, v_j)y_{(v)}(u, v_j) + x_u(u, v_j)y_v(u, v),$$

deduciamo

$$
\begin{aligned}
F \leqslant\; & |\, x_u(u, v_j) - x_{(u)}(u_i, v_j) \,||\, y_{(v)}(u_i, v_j) \,| + |\, y_{(v)}(u, v_j) - y_{(v)}(u_i, v_j) \,||\, x_u(u, v_j) \,| + \\
& + |\, y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \,||\, x_u(u, v_j) \,| + |\, x_u(u, v) - x_u(u, v_j) \,||\, y_v(u, v) \,|\,.
\end{aligned}
$$

Per l'espressione di K_1' si ricava allora

$$(12)\qquad K_1' \leqslant K'_{1,1} + K'_{1,2} + K'_{1,3} + K'_{1,4},$$

essendo

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
K'_{1,1} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, x_u(u, v_j) - x_{(u)}(u_i, v_j) \,||\, y_{(v)}(u_i, v_j) \,|\,, \\
K'_{1,2} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, y_{(v)}(u, v_j) - y_{(v)}(u_i, v_j) \,||\, x_u(u, v_j) \,|\,, \\
K'_{1,3} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \,||\, x_u(u, v_j) \,|\,, \\
K'_{1,4} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \,|\, x_u(u, v) - x_u(u, v_j) \,||\, y_v(u, v) \,|\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Esaminiamo ora separatamente le espressioni (13).

5. - Relativamente a $K'_{1,1}$ facciamo le seguenti osservazioni:

1ª) Se le funzioni $\{x(u, v_j),\ 0 \leqslant u \leqslant 1\}$, $j=1, 2, \ldots n-1$, sono assolutamente continue, abbiamo

$$x_{(u)}(u_i, v_j) = \frac{x(u_{i+1}, v_j) - x(u_i, v_j)}{u_{i+1} - u_i} = \frac{1}{u_{i+1} - u_i} \int_{u_i}^{u_{i+1}} x_u(\xi, v_j)\, d\xi,$$

$$(i=1, 2, \ldots, m-1\ ;\ j=1, 2, \ldots, n-1),$$

cioè $x_{(u)}(u_i, v_j)$ si può interpretare come la media dei valori della funzione $x_u(u, v_j)$, della sola variabile u, nell'intervallo $u_i \leqslant u \leqslant u_{i+1}$: ricorderemo ciò ponendo

$$x_{(u)}(u_i, v_j) = \mu_i[x_u(u, v_j)]\,.$$

2ª) Posto $M \geqslant \max\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} |y(u, v)|$, risulta

$$\frac{1}{2}\int_{v_j}^{v_{j+1}} dv\, |y_{(v)}(u_i, v_j)| = \frac{1}{2}(v_{j+1} - v_j)\left|\frac{y(u_i, v_{j+1}) - y(u_i, v_j)}{v_{j+1} - v_j}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\{|y(u_i, v_{j+1})| + |y(u_i, v_j)|\} \leqslant M\,.$$

Si ottiene quindi

$$K'_{1,1} \leqslant M \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} |x_u(u, v_j) - \mu_i[x_u(u, v_j)]|\, du \right\}, \tag{14}$$

dove la somma tra graffe è proprio del tipo di quella considerata nel Teorema II di « A. L., I » ([11]).

6. - Relativamente a $K'_{1,2}$ osserviamo che si ha

$$\frac{1}{2}\int_{v_j}^{v_{j+1}} dv\, |y_{(v)}(u, v_j) - y_{(v)}(u_i, v_j)| = \frac{1}{2}(v_{j+1} - v_j)\left|\frac{y(u, v_{j+1}) - y(u, v_j)}{v_{j+1} - v_j} - \frac{y(u_i, v_{j+1}) - y(u_i, v_j)}{v_{j+1} - v_j}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big\{|y(u, v_{j+1}) - y(u_i, v_{j+1})| + |y(u, v_j) - y(u_i, v_j)|\Big\}\,.$$

Perciò se, in corrispondenza di un $\varepsilon > 0$ e di un n, si determina un δ tale che sia

$$|y(u', v) - y(u'', v)| < \frac{\varepsilon}{H_n} \quad \text{per} \quad |u' - u''| < \delta,\ 0 \leqslant v \leqslant 1,$$

dove H_n sarà precisato fra poco, si avrà

$$\frac{1}{2}\int_{v_j}^{v_{j+1}} dv\, |y_{(v)}(u, v_j) - y_{(v)}(u_i, v_j)| < \frac{\varepsilon}{H_n} \quad \text{per} \quad j=1, 2, \ldots, n-1.$$

([11]) Sul significato della sigla vedasi ([4]).

S' ottiene allora

$$K'_{1,2} < \frac{\varepsilon}{H_n} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \mid x_u(u, v_j) \mid \leqslant \frac{\varepsilon}{H_n} \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^1 \mid x_u(u, v_j) \mid du\,.$$

Facendo

$$H_n \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^1 \mid x_u(u, v_j) \mid du\,,$$

si conclude

$$K'_{1,2} < \varepsilon\,. \tag{15}$$

7. - Relativamente a $K'_{1,3}$ abbiamo

$$K'_{1,3} \leqslant \int_0^1 du \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \mid y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \mid\mid x_u(u, v_j) \mid dv\,.$$

Applicando la nota diseguaglianza di SCHWARZ per gli integrali, s' ottiene

$$\int_{v_j}^{v_{j+1}} \mid y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \mid\mid x_u(u, v_j) \mid dv \leqslant \left\{ \int_{v_j}^{v_{j+1}} \mid y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \mid^2 dv \cdot \int_{v_j}^{v_{j+1}} x_u^2(u, v_j)\, dv \right\}^{\frac{1}{2}};$$

applicando poi la nota diseguaglianza di SCHWARZ per le somme, segue

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{v_j}^{v_{j+1}} \mid y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \mid^2 dv \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{v_j}^{v_{j+1}} x_u^2(u, v_j)\, dv \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \mid y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \mid^2 dv \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} x_u^2(u, v_j)\, dv \right\}^{\frac{1}{2}};$$

e, infine, nuovamente applicando la diseguaglianza di SCHWARZ per gli integrali, risulta

$$K'_{1,3} \leqslant \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 du \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \mid y_v(u, v) - y_{(v)}(u, v_j) \mid^2 dv \cdot \int_0^1 du \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} x_u^2(u, v_j)\, dv \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

E poichè, per le ipotesi del teorema, la funzione $\{ y(u, v),\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \}$ è assolutamente continua per quasi tutti gli u dell'intervallo (0, 1), si ha, per tali u,

$$y_{(v)}(u, v_j) = \frac{y(u, v_{j+1}) - y(u, v_j)}{v_{j+1} - v_j} = \frac{1}{v_{j+1} - v_j} \int_{v_j}^{v_{j+1}} y_v(u, \eta)\, d\eta\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ponendo quindi, pei detti u, analogamente a quanto si è posto al n. 6,

$$y_{(v)}(u, v_j) = \mu_j [y_v(u, v)],$$

si conclude

$$(16) \qquad K'_{1,3} \leqslant \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v}^{v_{j+1}} dv \int_0^1 | y_v(u, v) - \mu_j [y_v(u, v)] |^2 du \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} (v_{j+1} - v_j) \int_0^1 x_u^2(u, v_j)\, du \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Qui, nel secondo membro, la somma entro la prima graffa è proprio del tipo di quella considerata nel Teorema IV di « A. L., II » ; circa la somma che compare entro la seconda graffa, in virtù del Teorema I di « A. L., I », si può osservare quanto segue : Ad ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario si può far corrispondere un gruppo di punti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ con

$$0 \leqslant v_1 < v_2 < \ldots < v_j < \ldots < v_n \leqslant 1, \quad v_1 < \varepsilon, \quad 1 - v_n < \varepsilon,$$
$$v_{j+1} - v_j < \varepsilon \text{ per } j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

in modo che sia

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 x_u^2(u, v)\, du\, dv - \sum_{j=1}^{n-1} (v_{j+1} - v_j) \int_0^1 x_u^2(u, v_j)\, du \right| < \varepsilon ;$$

onde sarà, allora,

$$\sum_{j=1}^{n-1} (v_{j+1} - v_j) \int_0^1 x_u^2(u, v_j)\, dv < \int_0^1 \int_0^1 x_v^2(u, v)\, du\, dv + \varepsilon .$$

8. - Relativamente a $K'_{1,4}$ abbiamo

$$K'_{1,4} \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 du \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} | x_u(u, v) - x_u(u, v_j) || y_v(u, v) | dv ,$$

onde, procedendo analogamente a quanto si è fatto nel n. precedente per $K'_{1,3}$,

$$(17) \qquad K'_{1,4} \leqslant \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \int_0^1 | x_u(u, v) - x_u(u, v_j) |^2 du \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_0^1 \int_0^1 y_v^2(u, v)\, du\, dv \right\}^{\frac{1}{2}},$$

dove, nel secondo membro, la somma entro la prima graffa è proprio del tipo di quella considerata nel Teorema III di « A. L., II ».

9. - Le considerazioni dei nn. 4, 5, 6, 7, 8, fatte su K_1' si possono ripetere analogamente su K_2', K_1'', K_2''. Tenendo presente ciò e i teoremi di « A. L., I » e « A. L., II » ai quali si è precedentemente accennato, *riesce possibile determinare due gruppi fondamentali di punti*, nel senso precisato al n. 1. Ecco in quale modo.

1°) Fissato un $\varepsilon > 0$, per ora arbitrario, incominciamo col chiamare M il massimo dei numeri

$$\max_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} |\, g(u, v) \,|, \quad \int_0^1\!\!\int_0^1 g_u^2(u, v)\, du\, dv, \quad \int_0^1\!\!\int_0^1 g_v^2(u, v)\, du\, dv,$$

essendo tanto $g(u, v) = x(u, v)$ quanto $g(u, v) = y(u, v)$.

2°) In forza del Teorema IV di « A. L., II », sia $\delta > 0$ [e supporremo $\delta < \frac{1}{N}$, dove N è l'intero positivo considerato in (3')] un numero tale che per *ogni* gruppo di punti

$$0 = v_0 \leqslant v_1 < v_2 < \dots < v_j < \dots < v_n \leqslant v_{n+1} = 1,$$

$$\text{con} \quad v_{j+1} - v_j < \delta \quad \text{per} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, n,$$

si abbia

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \int_0^1 |\, g_v(u, v) - \mu_j [g_v(u, v)] \,|^2 du < \varepsilon, \tag{18}$$

essendo tanto $g(u, v) = x(u, v)$ quanto $g(u, v) = y(u, v)$.

3°) In forza del Teorema I di « A. L., I » e dell'Osservazione del n. 7 di tale lavoro, in forza del Teorema III di « A. L., II » e dell'Osservazione del n. 17 di tale lavoro, abbiamo: Fissato $\varepsilon < \delta$ (e ricordiamo che si è già preso $\delta < \frac{1}{N}$), esiste uno *speciale* gruppo di punti

$$0 \leqslant v_1 < v_2 < \dots < v_j < \dots < v_n \leqslant 1, \quad \text{con} \quad v_{j+1} - v_j < \delta \quad \text{per} \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

in modo che risulti

$$\left|\, \int_0^1\!\!\int_0^1 g_u^2(u, v)\, du\, dv - \sum_{j=1}^{n-1} (v_{j+1} - v_j) \int_0^1 g_u^2(u, v_j')\, du \,\right| < \varepsilon, \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \int_0^1 |\, g_u(u, v) - g_u(u, v_j') \,|^2 dv < \varepsilon, \tag{20}$$

essendo tanto $v_j' = v_j$ quanto $v_j' = v_{j+1}$, e anche tanto se è $g(u, v) = x(u, v)$ come se è $g(u, v) = y(u, v)$.

4°) Possiamo inoltre supporre che i punti v_j siano scelti in modo tale che le funzioni

$$\{ g(u, v_j),\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \}, \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

siano assolutamente continue, e ciò tanto se è $g(u, v)=x(u, v)$ come se è $g(u, v)=y(u, v)$.

Quanto abbiamo detto in 2°), 3°) e 4°) *ci fissa*, sull'intervallo (0, 1) dell'asse v, un determinato gruppo di punti $v_1, v_2, \ldots, v_n$: è questo, come proveremo fra poco, il secondo dei due gruppi fondamentali di punti che stiamo per determinare.

5°) In forza del Teorema II di « A. L., I », esiste ancora un $\delta' > 0$ (e supporremo $\delta' < \frac{1}{N}$) tale che per ogni gruppo di punti

$$0=u_1<u_2< \ldots <u_i< \ldots <u_m=1, \quad \text{con} \quad u_{i+1}-u_i<\delta' \quad \text{per} \quad i=1, 2, \ldots, m-1,$$

si abbia

$$(21) \qquad \sum_{j=1}^{m-1} \int_{u_j}^{u_{j+1}} | g_u(u, v_j') - \mu_i[g_u(u, v_j')] | \, du < \frac{\varepsilon}{n}, \quad \text{per} \quad j=1, 2, \ldots, n-1,$$

essendo tanto $v_j'=v_j$ quanto $v_j'=v_{j+1}$, e anche tanto se è $g(u, v)=x(u, v)$ come se è $g(u, v)=y(u, v)$.

6°) Infine, chiamato H_n il massimo dei numeri

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 | g(u, v_j) | \, du, \quad \text{tanto per} \quad g(u, v)=x(u, v) \quad \text{come per} \quad g(u, v)=y(u, v),$$

possiamo supporre δ' così piccolo da aversi

$$(22) \qquad | g(u', v) - g(u'', v) | < \frac{\varepsilon}{H_n}, \quad \text{per} \quad | u' - u'' | < \delta, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1,$$

e tanto se è $g(u, v)=x(u, v)$ come se è $g(u, v)=y(u, v)$.

Quanto abbiamo detto in 5°) e 6°) *ci fissa*, sull'intervallo (0, 1) dell'asse u, un determinato gruppo di punti $u_1, u_2, \ldots, u_m$, dipendente dal gruppo di punti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ fissato inizialmente.

È ora facile provare che questi due gruppi di punti, così ottenuti, sono proprio fondamentali (nel senso precisato al n. 1). Invero risulta :

pel n. 5 e per (21), ove si faccia $g(u, v)=x(u, v)$, si ha $K'_{1,1}<M\varepsilon$;
pel n. 6 e per (22), ove si faccia $g(u, v)=y(u, v)$, si ha $K'_{1,2}<\varepsilon$;
pel n. 7 e $\left\{ \begin{array}{l} \text{per (18), ove si faccia } g(u, v)=y(u, v), \\ \text{per (19), ove si faccia } g(u, v)=x(u, v), \end{array} \right.$ si ha $K'_{1,3}<\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{M+\varepsilon}$;
pel n. 8 e per (20), ove si faccia $g(u, v)=x(u, v)$, si ha $K'_{1,4}<\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{M}.$

S' ottiene pertanto, supponendo $\varepsilon<1$,

$$K'_1<(M+1)\varepsilon+\sqrt{(M+1)\varepsilon}.$$

La stessa conclusione si ha poi per K'_2, K''_1, K''_2. Onde dalla (10) si ha

$$\left|\,|T_{m,n}|.-I_{m,n}\right|<4(M+1)\varepsilon+4\sqrt{(M+1)\varepsilon}. \tag{23}$$

Quindi, prendendo ε tale che sia $4(M+1)\varepsilon<\frac{1}{2N}$, $4\sqrt{(M+1)\varepsilon}<\frac{1}{2N}$, si conclude con la (3').

Il Teorema particolare, enunciato in principio del presente paragrafo, è così completamente dimostrato.

§ 2. - Il caso generale.

10. - Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema enunciato nella Introduzione.

La data superficie S essendo, per le ipotesi del Teorema, di classe L secondo C. B. MORREY ([12]), si ha $L(S)=I(S)$, dove

$$I(S)=\int_0^1\!\!\int_0^1\left\{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v\end{vmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}}du\,dv.$$

Anche qui basterà dimostrare che ad ogni N intero positivo, arbitrariamente grande, si possono far corrispondere due gruppi di punti

$$0\leqslant u_1<u_2<\ldots<u_m\leqslant 1,\qquad 0\leqslant v_1<v_2<\ldots<v_n\leqslant 1, \tag{1}$$

tali che

$$\begin{cases} u_1<\frac{1}{N},\ 1-u_m<\frac{1}{N}, & u_{i+1}-u_i<\frac{1}{N}\ \text{ per }\ i=1,2,\ldots,m-1,\\ v_1<\frac{1}{N},\ 1-v_n<\frac{1}{N}, & v_{j+1}-v_j<\frac{1}{N}\ \text{ per }\ j=1,2,\ldots,n-1,\end{cases} \tag{2}$$

in modo che, detta

$$T_{m,n}\equiv\{x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v)\,;\ u_1\leqslant u\leqslant u_m,\ v_1\leqslant v\leqslant v_n\}$$

la corrispondente poliedrica di TONELLI inscritta in S e relativa alla rappresentazione parametrica fissata per S, si abbia

$$\left|\,|T_{m,n}|.-I(S)\right|<\frac{1}{N}, \tag{3}$$

([12]) Loc. cit. in ([6]).

dove $|T_{m,n}|.$ indica l'area, nel senso elementare di $T_{m,n}$. Analogamente a quanto si è detto al n. 1 (del § precedente), posto

$$I_{m,n}=\int_{u_1}^{u_m}\int_{v_1}^{v_n}\left\{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}} du\, dv,$$

basterà dimostrare che è

$$(3') \qquad \left|\,|T_{m,n}|.-I_{m,n}\right|<\frac{1}{N}.$$

11. - Considerati due qualsiasi gruppi di valori (1), resta individuato sulla superficie S il sistema di punti

$$P_{i,j}\equiv(x(u_i,v_j),\ y(u_i,v_j),\ z(u_i,v_j)), \qquad (i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$$

e la poliedrica di TONELLI $T_{m,n}$ di vertici in tali punti e di facce i triangoli

$$\begin{aligned} T'_{i,j}&\equiv P_{i,j}\ P_{i+1,j}\ P_{i,j+1}, \\ T''_{i,j}&\equiv P_{i+1,j+1}\ P_{i+1,j}\ P_{i,j+1}, \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots,m-1\ ;\ j=1,2,\ldots,n-1).$$

Abbiamo

$$(4) \qquad |T_{m,n}|.=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}(|T'_{i,j}|.+|T''_{i,j}|.),$$

dove $|T'_{i,j}|.$ e $|T''_{i,j}|.$ indicano rispettivamente le aree di $T'_{i,j}$ e $T''_{i,j}$. Osserviamo che in analogia con (4) possiamo scrivere

$$(5) \qquad I_{m,n}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}(I'_{i,j}+I''_{i,j}),$$

ponendo

$$(6) \qquad I'_{i,j}=I''_{i,j}=\frac{1}{2}\int_{u_i}^{u_{i+1}}du\int_{v_j}^{v_{j+1}}dv\,\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2},$$

con

$$J_1=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix},\quad J_2=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix},\quad J_3=\begin{vmatrix} y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix}.$$

D'altra parte, detto $T'_{1,i,j}$, $T'_{2,i,j}$, $T'_{3,i,j}$ i triangoli proiezioni di $T'_{i,j}$ ordinatamente sui piani coordinati (x,y), (x,z), (y,z), abbiamo

$$(7) \qquad |T'_{i,j}|.=\{|T'_{1,i,j}|.^2+|T'_{2,i,j}|.^2+|T'_{3,i,j}|.^2\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\int_{u_i}^{u_{i+1}}du\int_{v_j}^{v_{j+1}}dv\left\{\left[\frac{|T'_{1,i,j}|.}{(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)}\right]^2+\left[\frac{|T'_{2,i,j}|.}{(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)}\right]^2+\left[\frac{|T'_{3,i,j}|}{(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

E tenendo presente la (7) e la (7′) del § 1, possiamo scrivere

$$(7') \qquad |\,T'_{i,j}\,|. = \frac{1}{2}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \sqrt{J'^2_{1,i,j} + J'^2_{2,i,j} + J'^2_{3,i,j}}\,,$$

ponendo

$$J'_{1,i,j} = \begin{vmatrix} x_{(u)}(u_i, v_j) & x_{(v)}(u_i, v_j) \\ y_{(u)}(u_i, v_j) & y_{(v)}(u_i, v_j) \end{vmatrix}, \quad J'_{2,i,j} = \begin{vmatrix} x_{(u)}(u_i, v_j) & x_{(v)}(u_i, v_j) \\ z_{(u)}(u_i, v_j) & z_{(v)}(u_i, v_j) \end{vmatrix},$$

$$J'_{3,i,j} = \begin{vmatrix} y_{(u)}(u_i, v_j) & y_{(v)}(u_i, v_j) \\ z_{(u)}(u_i, v_j) & z_{(v)}(u_i, v_j) \end{vmatrix}.$$

Analogamente abbiamo

$$(7'') \qquad |\,T''_{i,j}\,|. = \frac{1}{2}\int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \sqrt{J''^2_{1,i,j} + J''_{2,i,j} + J''_{3,i,j}}\,,$$

ponendo

$$J''_{1,i,j} = \begin{vmatrix} x_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & x_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \\ y_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & y_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \end{vmatrix}, \quad J''_{2,i,j} = \begin{vmatrix} x_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & x_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \\ z_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & z_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \end{vmatrix},$$

$$J''_{3,i,j} = \begin{vmatrix} y_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & y_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \\ z_{(u)}(u_i, v_{j+1}) & z_{(v)}(u_{i+1}, v_j) \end{vmatrix}.$$

È manifesta l'analogia di (7′) e (7″) con (6).

12. - Sottraendo da (4) la (5) si ha

$$|\,T_{m,n}\,|. - I_{m,n} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{ (|\,T'_{i,j}\,|. - I'_{i,j}) + (|\,T''_{i,j}\,|. - I''_{i,j}) \},$$

e anche, per (6), (7′) e (7″),

$$(8) \qquad |\,T_{m,n}\,|. - I_{m,n} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \left\{ \left(\sqrt{J'^2_{1,i,j} + J'^2_{2,i,j} + J'^2_{3,i,j}} - \sqrt{J_1^2 + J_2^2 - J_3^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{J''^2_{1,i,j} + J''^2_{2,i,j} + J''^2_{3,i,j}} - \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} \right) \right\}.$$

Passando ai valori assoluti e applicando la diseguaglianza

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \right| \leqslant |\,a - \alpha\,| + |\,b - \beta\,| + |\,c - \gamma\,|,$$

si ricava

$$(9)\quad \left| |T_{m,n}| - I_{m,n} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \, (| J'_{1,i,j} - J_1 | + | J''_{1,i,j} - J_1 |) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \, (| J'_{2,i,j} - J_2 | + | J''_{2,i,j} - J_2 |) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \, (| J'_{3,i,j} - J_3 | + | J''_{3,i,j} - J_3 |),$$

dove diremo ordinatamente A_1, A_2, A_3 le tre parti in cui è spezzato il secondo membro.

13. - Notiamo subito che A_1 non è altro che il secondo membro della (9) del § 1: infatti, si ha $J_1 = J$, $J'_{1,i,j} = J'_{i,j}$, $J''_{1,i,j} = J''_{i,j}$. Si noti ancora che A_2 è la quantità dello stesso tipo di A_1, relativa alla superficie piana proiezione della superficie S sul piano (x, z); analogamente A_3 è la quantità dello stesso tipo di A_1, relativa alla superficie piana proiezione di S sul piano (y, z).

Ne segue, per quanto è dimostrato nel § 1, che si possono determinare due gruppi di punti (1) pei quali valgano le (2) e risulti $A_1 < \frac{1}{3N}$; così pure si possono determinare due gruppi di punti (1) pei quali valgono le (2) e risulti $A_2 < \frac{1}{3N}$; infine, si possono determinare due gruppi di punti (1) pei quali valgano le (2) e risulti $A_3 < \frac{1}{3N}$. Ma possiamo ora concludere, riprendendo le considerazioni del n. 9 (del § 1), che si possono determinare solo due gruppi di punti (1) pei quali valgano le (2) e risulti contemporaneamente

$$A_1 < \frac{1}{3N}, \quad A_2 < \frac{1}{3N}, \quad A_3 < \frac{1}{3N}$$

e quindi, per (9),

$$\left| |T_{m,n}| - I_{m,n} \right| < \frac{1}{3N} + \frac{1}{3N} + \frac{1}{3N} = \frac{1}{N},$$

cioè la (3′) da concludere. Invero, se quanto è detto nel n. 9 si suppone valido (ciò che è possibile pretendere) oltre che per $g(u, v) = x(u, v)$ e $g(u, v) = y(u, v)$, anche per $g(u, v) = z(u, v)$, i due gruppi di punti

$$u_1, u_2, \ldots, u_m; \qquad v_1, v_2, \ldots, v_n$$

ai quali si giunge sono tali che si ha contemporaneamente, per la (23) del § 1 (supponendo $\varepsilon < 1$),

$$A_1 < 4(M+1)\,\varepsilon + 4\sqrt{(M+1)\,\varepsilon}\,, \qquad A_2 < 4(M+1)\,\varepsilon + 4\sqrt{(M+1)\,\varepsilon}\,,$$
$$A_3 < 4(M+1)\,\varepsilon + 4\sqrt{(M+1)\,\varepsilon}\,,$$

onde basterà prendere ε in modo che sia

$$4(M+1)\,\varepsilon < \frac{1}{6N}, \qquad 4\sqrt{(M+1)\,\varepsilon} < \frac{1}{6N},$$

per concludere con quanto sopra è affermato.

Il Teorema enunciato nell' Introduzione è così interamente dimostrato.