ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

Sulle trasformazioni assolutamente continue

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 3-4 (1947), p. 161-172

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_161_0>

SULLE TRASFORMAZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE (*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

È noto (¹) che se $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, è una funzione continua a variazione limitata, condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia assolutamente continua è che ogni insieme di punti di (a, b) di misura nulla sia trasformato dalla $f(x)$ in un insieme di punti di (c, d) (dove $c = \min f(x)$, $d = \max f(x)$) pure di misura nulla.

S. BANACH (²) e G. VITALI (³), quasi contemporaneamente e indipendentemente hanno introdotto i concetti di trasformazione continua $\Phi: x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $(u, v) \varepsilon \overline{Q}$, essendo $\overline{Q}$ il quadrato chiuso $(0, 0; 1, 1)$, « a variazione limitata » e « assolutamente continua ». Si dimostra facilmente che, considerata la trasformazione continua $\Phi: x=x(u. v)$, $y=y(u, v)$, $(u, v) \varepsilon \overline{Q}$, che sia a variazione limitata secondo BANACH e VITALI, condizione necessaria e sufficiente affinchè essa risulti assolutamente continua secondo questi AA., è che trasformi ogni insieme di punti di misura nulla di $\overline{Q}$ in un insieme di punti di misura nulla.

A proposito delle sue fondamentali ricerche sulla quadratura delle superficie in forma parametrica, L. CESARI ha introdotto (⁴) i concetti di trasformazione continua « a variazione limitata » e « assolutamente continua », più generali di quelli corrispondenti di BANACH e VITALI. Dietro suggerimento del prof. CESARI — al quale rivolgo qui il mio ringraziamento — mi sono proposto di ricercare se la proprietà sopra notata relativamente alle trasformazioni assolutamente continue secondo BANACH e VITALI continui a sussistere per le trasformazioni assolutamente continue nel senso del CESARI. Ho trovato che la proprietà in

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(¹) B. LEVI: *Ricerche sulle funzioni derivate.* Rend. Acc. Lincei, vol. XV (1906) pp. 674-684, p. 679.

(²) S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fundamenta Mathematicae. Tomo VII (1925) pp. 225-236.

(³) G. VITALI: *Sulle funzioni continue.* Ibidem Tomo VIII (1926) pp. 175-188.

(⁴) L. CESARI: *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica.* Bollettino dell'Un. Mat. It., Serie II (1942) pp. 109-117.

questione non sussiste in generale per tali trasformazioni [5]. Più precisamente, servendomi di un esempio costruito dal CESARI per altro scopo, mostro che esiste una trasformazione assolutamente continua definita in un cerchio $\overline{C}$ e non biunivoca che trasforma un insieme di punti interni a $\overline{C}$ di misura nulla in un insieme di punti di misura positiva. Inoltre un altro semplice esempio fa vedere che esiste una trasformazione assolutamente continua e biunivoca definita in un cerchio $\overline{C}$ che trasforma la circonferenza C^* del cerchio in un insieme di misura positiva.

Passo quindi a dimostrare i due seguenti teoremi :

TEOREMA I. - *Siano A una regione di* JORDAN *del piano (u, v), A^* la frontiera di A e $\overline{A}=A+A^*$. Perchè la trasformazione continua a variazione limitata*

$$\Phi : x=x(u, v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}$$

sia assolutamente continua, è sufficiente che essa trasformi ogni insieme di punti (interni) di A di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.

TEOREMA II. - *Siano A una regione di* JORDAN *del piano (u, v), A^* la frontiera di A e $\overline{A}=A+A^*$. Ogni trasformazione continua*

$$\Phi : x=x(u. v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}$$

che sia biunivoca e assolutamente continua trasforma ogni insieme di punti (interni) di A di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.

Da questi teoremi si deduce in particolare che condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione continua e biunivoca

$$\Phi : x=x(u, v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}$$

(che quindi è a variazione limitata (v. n. 5)) sia assolutamente continua è che trasformi ogni insieme di punti (interni) di A di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.

Generalità - Definizioni.

1. - Detta A una regione di JORDAN del piano (u, v), A^* la sua frontiera (curva continua semplice e chiusa) e posto $\overline{A}=A+A^*$, siano $x(u, v)$, $y(u, v)$ funzioni continue (ad un valore) in $\overline{A}$ e sia Φ la trasformazione continua (univoca)

$$\Phi : x=x(u, v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}. \tag{1}$$

---

[5] D'ora in poi intenderò parlare di trasformazioni a variazione limitata e assolutamente continue secondo CESARI.

Ad ogni punto P di $\bar{A}$ corrisponde nel piano (x, y) un punto $Q \equiv \Phi(P)$ che diremo *immagine* del punto P. Diciamo $\bar{B} = \Phi(\bar{A})$ l'insieme dei punti del piano (x, y) che sono immagini di qualche punto di $\bar{A}$. L'insieme $\bar{B}$ è limitato e chiuso. Sia K un quadrato del piano (x, y) a lati paralleli agli assi contenente nel suo interno tutti i punti di $\bar{B}$.

Se Q è un punto di $\bar{B}$, esiste in $\bar{A}$ un insieme non vuoto di punti P, che diremo i *modelli* del punto Q, la cui immagine coincide con Q.

Indicheremo tale insieme, che risulta chiuso, con $\Phi^{-1}(Q)$.

Se E è un insieme di punti di $\bar{A}$, diremo $\Phi(E)$ l'insieme dei punti di $\bar{B}$ che sono immagini di punti di E. Se $\mathcal{E}$ è un insieme di punti di $\bar{B}$, diremo $\Phi^{-1}(\mathcal{E})$ l'insieme dei punti di $\bar{A}$ la cui immagine cade in $\mathcal{E}$. Se E è chiuso, anche $\Phi(E)$ è chiuso; se $\mathcal{E}$ è chiuso, anche $\Phi^{-1}(\mathcal{E})$ è chiuso. Se, per ogni punto di $\bar{B}$, $\Phi^{-1}(Q)$ è formato da un solo punto, diremo che la trasformazione Φ è *biunivoca*.

Sia r una regione di JORDAN (aperta) contenuta in A e sia r^* la curva continua semplice e chiusa costituente la frontiera di r. La trasformazione Φ fa corrispondere alla curva r^* una curva continua e chiusa c (non necessariamente semplice) che diremo l'immagine di r^*. Indicheremo sempre con c anche l'insieme $c = \Phi(r^*)$ occupato dai punti di c sul piano (x, y). Fissato sul piano (u, v) un verso positivo per le rotazioni, la curva r^* risulterà orientata. Fissiamo ora anche sul piano (x, y) un verso positivo per le rotazioni (indipendente dal precedente). Sia $O(x, y; c)$ l'indice topologico (di KRONECKER) relativo alla curva c (e che risulta nullo fuori di K). Si dimostra facilmente che la funzione $O(x, y; c)$ è di BAIRE e quindi quasi continua. Esiste perciò (finito o infinito) l'integrale di LEBESGUE

$$g(r) = \iint_K | O(x, y; c) | \, dx \, dy .$$

Sia ora $\{ r_i, i = 1, \ldots, n \}$ una suddivisione di $\bar{A}$ in regioni di JORDAN. Sia c_i l'immagine della frontiera r_i^* di r_i $(i = 1, \ldots, n)$. Poniamo:

$$G(A) = G(\Phi) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^{n} g(r_i)$$

per tutte le possibili suddivisioni $\{ r_i, i = 1, \ldots, n \}$ di $\bar{A}$ in regioni di JORDAN. In ogni punto $Q \equiv (x, y)$ di K si ponga:

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, y; \Phi) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^{n} | O(x, y; c_i) |$$

per tutte le possibili suddivisioni $\{ r_i, i = 1, \ldots, n \}$ di $\bar{A}$ in regioni di JORDAN.

La funzione $\Psi(x, y)$ (che assume solo valori interi $\geqslant 0$, non escluso $+\infty$) si dirà la funzione caratteristica della trasformazione Φ.

Si prova che la funzione $\Psi(x, y)$ è semicontinua inferiormente in K e perciò è una funzione di classe 1 di BAIRE, dunque è quasi continua. E poichè $\Psi(x, y)$ è una funzione non negativa, ne viene che esiste (finito o infinito) l'integrale di LEBESGUE

$$W = W(\Phi) = \iint_K \Psi(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy .$$

Se è $W(\Phi) < +\infty$, *si dirà che la trasformazione* Φ *è a variazione limitata* (secondo CESARI).

Si dice che *la trasformazione continua* Φ *è assolutamente continua* (secondo CESARI) *se*:

a) *ad ogni numero* $\varepsilon > 0$ *arbitrario può farsi corrispondere un numero* $\sigma > 0$ *tale che, per ogni gruppo* $\{\pi_i,\, i = 1, \ldots, n\}$ *di poligoni semplici aperti di* A, *a due a due senza punti a comune e tali che* $\sum_{i=1}^{n} |\pi_i| < \sigma$, [6] *si ha*:

$$\sum_{i=1}^{n} g(\pi_i) < \varepsilon ,$$

β) *per ogni poligono* π *di* A *e per ogni suddivisione* $\{\pi_i,\, i = 1, \ldots, n\}$ *di* π *in poligoni aperti semplici, a due a due senza punti a comune si ha*:

$$G(\pi) = \sum_{i=1}^{n} G(\pi_i)$$ [7].

2. - Esempio di una trasformazione assolutamente continua che trasforma un insieme di punti interni di A di misura nulla in un insieme di punti di misura positiva.

Per altro scopo il CESARI aveva costruito [8] una trasformazione continua (*non* biunivoca)

$$\Phi : x = x(u, v),\ y = y(u, v), \qquad (\bar{c} : u^2 + v^2 \leq 1)$$

rappresentata da funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$ assolutamente continue secondo TONELLI dotate di derivate parziali prime integrabili L^2 che trasforma un insieme di punti interni al cerchio $\bar{c}$ di misura nulla in un insieme di misura positiva.

---

(6) Dato un insieme E, indicheremo con $|E|$ la sua misura esterna. Se E è misurabile, $|E|$ indicherà la misura di E.

(7) Il CESARI ha dimostrato che le condizioni a) e β) sono indipendenti (v. CESARI: *Sul concetto di trasformazione assolutamente continua.* Bollettino dell' Un. Mat. It. (1943) pp. 5-10.

(8) L. CESARI: *Sulle trasformazioni continue.* Annali di Matematica pura e applicata. Serie IV, Tomo XXI (1942) pp. 157-188, n. 19.

Ora, secondo un risultato dovuto a MORREY [9], ogni trasformazione Φ siffatta rappresenta una superficie (piatta) di area finita secondo LEBESGUE la cui area $L(S)$ è data dall'integrale classico. Per un teorema di CESARI [10] si deduce che la trasformazione Φ è assolutamente continua. Dunque esiste una trasformazione continua e assolutamente continua che trasforma un insieme di punti interni a $\bar{c}$ di misura nulla in un insieme di misura positiva.

3. - Esempio di una trasformazione assolutamente continua e biunivoca definita in un cerchio $\bar{C}$ che trasforma la circonferenza C^* del cerchio in un insieme di misura positiva.

Sia r^* una curva continua semplice e chiusa del piano (x, y) di misura positiva. Sia r la regione aperta di JORDAN definita da r^* e sia $\bar{r}=r+r^*$. È noto che la regione $\bar{r}$ si può rappresentare con funzioni continue biunivocamente e conformemente in un cerchio in modo che la curva r^* sia rappresentata biunivocamente sulla circonferenza del cerchio. Poichè ogni rappresentazione conforme è assolutamente continua, ne viene che esiste una trasformazione continua, biunivoca e assolutamente continua che trasforma il contorno di un cerchio nel contorno di una regione di JORDAN di misura superficiale positiva.

4. - Dimostrazione del teorema I.

a) Supponiamo che il teorema sia falso; supponiamo cioè che la trasformazione Φ che è a variazione limitata, non sia assolutamente continua, pur trasformando ogni insieme di punti di A di misura nulla in un insieme di punti di misura nulla.

Si supponga che esista, se possibile, un numero $\varepsilon>0$ e una successione di gruppi di poligoni semplici aperti, ciascun gruppo essendo costituito di un numero finito di poligoni interamente appartenenti ad A e a due a due senza punti a comune $\pi_1'^{(n)}, \pi_2'^{(n)},..., \pi_{\nu_n'}'^{(n)} \}$ $(n=1, 2,...)$ tali che:

$$\sum_{i=1}^{\nu_n'} |\pi_i'^{(n)}| < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{i=1}^{\nu_n'} g(\pi_i'^{(n)}) > \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Poichè la trasformazione Φ è a variazione limitata, detta $\Psi(x, y\,;\, \Phi)$ la sua funzione caratteristica, questa risulta integrabile, secondo LEBESGUE, e si potrà

[9] C. B. MORREY: *A class of representations of manifolds.* Part I, American Journal of Mathematics, vol. LV (1933) pp. 683-707.

[10] L. CESARI: *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica.* Memorie Acc. d'Italia (1943) pp. 1323-1481, p. 1480.

perciò determinare un numero $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme E di punti di K di misura $\leqslant \sigma$ si ha:

$$\iint_E \Psi(x, y; \Phi)\, dx\, dy < \varepsilon .$$

Si dica N l'insieme, di misura nulla, dei punti (x, y) di K nei quali è $\Psi(x, y; \Phi) = +\infty$.

b) Si osservi che se una poligonale λ divide un poligono semplice π in due poligoni semplici π' e π'', allora l'immagine di λ è, per l'ipotesi in cui ci siamo posti, una curva continua di misura superficiale nulla e si ha:

$$g(\pi) \leqslant g(\pi') + g(\pi'').$$

Suddividendo dunque i poligoni $\pi_i'^{(n)}$ in due, e quindi anche in più poligoni semplici, la prima delle somme (1) rimane invariata e la seconda non diminuisce. Si può perciò fare in modo che i poligoni $\pi_i'^{(n)}$ (e le loro immagini $\Phi(\pi_i'^{(n)})$) abbiano tutti diametro $< \frac{1}{2^n}$.

c) Dalla successione dei gruppi di poligoni $\pi_i'^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n')$ si può dedurre una nuova successione di gruppi di poligoni $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n)$, ogni gruppo $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n)$ essendo formato di un numero finito di poligoni, ognuno di diametro $< \frac{1}{2^n}$, semplici, aperti, a due a due senza punti a comune, in modo che per la nuova successione siano soddisfatte le (1), e in modo che ogni poligono $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, \nu_n)$ sia completamente contenuto in uno dei poligoni $\pi_j^{(n')}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_{n'})$ con $n' < n$, oppure sia completamente esterno a tutti i poligoni $\pi_j^{(n')}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_{n'})$, $n' = 1, 2, \ldots, n-1$.

Infatti, se la successione dei gruppi di poligoni $\pi_i'^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n')$ ha essa stessa la proprietà enunciata, l'assumeremo come successione $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, \nu_n)$ richiesta. In caso contrario, si consideri il gruppo dei poligoni $\pi_j'^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1')$ e si ponga:

$$\pi_1'^{(1)} \equiv \pi_1^{(1)},\ \pi_2'^{(1)} \equiv \pi_2^{(1)}, \ldots\ldots, \pi'^{(1)}_{\nu_1'} \equiv \pi^{(1)}_{\nu_1}.$$

Consideriamo ora il gruppo dei poligoni $\pi_i'^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_2')$. Se nessuno di essi ha punti a comune con qualche poligono del gruppo $\pi_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1)$, si ponga:

$$\pi_1'^{(2)} \equiv \pi_1^{(2)},\ \pi_2'^{(2)} \equiv \pi_2^{(2)}, \ldots\ldots, \pi'^{(2)}_{\nu_2'} \equiv \pi^{(2)}_{\nu_2};$$

altrimenti, sia $\pi'^{(2)}_{\bar{\nu}}$ uno dei poligoni del gruppo $\pi_i'^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_2')$ che ha punti a comune con qualche poligono del gruppo $\pi_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1)$. Siano, precisamente, $\pi^{(1)}_{j_1}, \pi^{(1)}_{j_2}, \ldots, \pi^{(1)}_{j_\nu}$ $(\nu \leqslant \nu_1)$ quei poligoni del gruppo $\pi_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1)$ che si sovrappongono a $\pi'^{(2)}_{\bar{\nu}}$.

L'insieme $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}\ \pi^{(1)}_{j_1}$ è la somma di un numero finito di poligoni ognuno dei quali è completamente contenuto in $\pi^{(1)}_{j_1}$. L'insieme ([11])

$$H \equiv \pi'^{(2)}_{\overline{\nu}} - \pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}\ \pi^{(1)}_{j_1} - \pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}\ \pi^{(1)\,*}_{j_1}$$

è la somma di un numero finito di poligoni ognuno dei quali è completamente esterno a $\pi^{(1)}_{j_1}$. Ne segue che gli elementi di queste due somme ci danno complessivameute un gruppo di un numero finito di poligoni (semplici, aperti, e due a due senza punti a comune) ciascuno dei quali o è completamente contenuto in $\pi^{(1)}_{j_1}$ oppure è completamente esterno a $\pi^{(1)}_{j_1}$. Ragioniamo ora su ciascuno dei poligoni dell'insieme H rispetto a $\pi^{(1)}_{j_2}$ come prima si è ragionato su $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}$ rispetto a $\pi^{(1)}_{j_1}$. Otterremo così per ciascun poligono di H due gruppi di un numero finito di poligoni di cui il primo è formato di poligoni ognuno dei quali è completamente contenuto in $\pi^{(1)}_{j_2}$ e il secondo è formato di poligoni ognuno dei quali è completamente esterno a $\pi^{(1)}_{j_2}$. Così continuando fino a considerare il poligono $\pi^{(1)}_{j_\nu}$ si otterrà un numero finito α_0 di poligoni (semplici, aperti e due a due senza punti a comune) ciascuno dei quali o è completamente contenuto in qualche poligono del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,\dots, \nu_1)$ o è completamente esterno a tutti i poligoni di tale gruppo. Si noti ancora che l'insieme somma di tutti questi α_0 poligoni differisce da $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}$ per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla.

Il ragionamento si può ripetere per ognuno dei poligoni del gruppo $\pi_i'^{(2)}$ che hanno la stessa proprietà di $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}$ vale a dire che hanno punti a comune con qualche poligono del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,\dots, \nu_1)$. Otterremo così complessivamente un numero finito di poligoni che insieme a quei poligoni del gruppo $\pi_i'^{(2)}$ che non abbiamo considerato perchè completamente esterni a tutti i poligoni del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,\dots, \nu_1)$ ci daranno un gruppo di $\nu_2 \geqslant \nu_2'$ poligoni $\pi_i^{(2)}$ $(i=1, 2,\dots, \nu_2)$ ognuno dei quali o è completamente contenuto in qualche poligono del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,\dots, \nu_1)$ oppure è completamente esterno a tutti i poligoni di tale gruppo. Notiamo ancora che l'insieme $\sum_{i=1}^{\nu_2} \pi_i^{(2)}$ differisce dall'insieme $\sum_{i=1}^{\nu_2'} \pi_i'^{(2)}$ per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla.

Passando poi al gruppo $\pi'^{(3)}_{h}$ $(h=1, 2,\dots, \nu_3')$ e confrontandolo con i gruppi $\pi_j^{(1)}$ $(j=1, 2,\dots, \nu_1)$ e $\pi_i^{(2)}$ $(i=1, 2,\dots, \nu_2)$ e poi al gruppo $\pi'^{(4)}_{k}$ $(k=1, 2,\dots, \nu_4')$ e così via otterremo la successione di gruppi di poligoni $\pi^{(n)}_{r}$ $(r=1, 2,\dots, \nu_n)$,

---

([11]) Se p è un poligono aperto tutto appartenente ad A, insieme alla sua frontiera, indicheremo sempre con p^* la sua frontiera.

$n=1, 2,...$ (ogni gruppo essendo costituito di poligoni semplici, aperti e due a due senza punti a comune). Se si osserva infine che :

1°) i poligoni del gruppo $\pi_r^{(n)}$ $(r=1, 2,..., \nu_n)$ hanno tutti diametro $< \frac{1}{2^n}$ perchè questa proprietà possedevano i poligoni del gruppo $\pi_s'^{(n)}$ $(s=1, 2,..., \nu_n')$ della successione di partenza.

2°) l'insieme $\sum_{r=1}^{\nu_n} \pi_r^{(n)}$ differisce dall'insieme $\sum_{s=1}^{\nu_n'} \pi_s'^{(n)}$ per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla e quindi, tenendo presente l' osservazione fatta in *b*) si deduce, per le (1) :

$$\sum_{r=1}^{\nu_n} | \pi_r^{(n)} | = \sum_{s=1}^{\nu_n'} | \pi_s'^{(n)} | < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{r=1}^{\nu_n} g(\pi_r^{(n)}) \geqslant \sum_{s=1}^{\nu_n'} g(\pi_s'^{(n)}) > \varepsilon > 0 \tag{2}$$

si conclude che la successione ottenuta gode di tutte le proprietà enunciate.

d) Poniamo ora :

$$E_n = \sum_{r=1}^{\nu_n} \pi_r^{(n)}, \quad F_n = \sum_{j=n}^{\infty} E_j .$$

È $F_1 \supset F_2 \supset ...... \supset F_n \supset ......$ Si ponga poi $F = \lim_{n \to \infty} F_n$. Gli insiemi E_n, F_n, F sono misurabili.

Abbiamo $| F_n | < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}$ e perciò $| F | = \lim_{n \to \infty} | F_n | = 0.$

Si dica H_n l'insieme misurabile di tutti i punti (x, y) di K nei quali è :

$$\sum_{r=1}^{\nu_n} | O(x, y ; c_r^{(n)}) | \neq 0$$

dove $c_r^{(n)}$ è la curva continua e chiusa immagine della poligonale $\pi_r^{(n)*}$ costituente la frontiera di $\pi_r^{(n)}$. L'insieme H_n ha misura $> \sigma$. Infatti, se fosse $| H_n | \leqslant \sigma$, si avrebbe :

$$\varepsilon < \sum_{r=1}^{\nu_n} g(\pi_r^{(n)}) = \sum_{r=1}^{\nu_n} \iint_K | O(x, y ; c_r^{(n)}) | \, dx \, dy = \iint_K \sum_{r=1}^{\nu_n} | O(x, y ; c_r^{(n)}) | \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{H_n} \sum_{r=1}^{\nu_n} | O(x, y ; c_r^{(n)}) | \, dx \, dy \leqslant \iint_{H_n} \Psi(x, y ; \Phi) \, dx \, dy < \varepsilon .$$

Si ponga :

$$J_n = \sum_{j=n}^{\infty} H_j .$$

È $J_1 \supset J_2 \supset \dots\dots \supset J_n \supset \dots$. Sia $J = \lim_{n\to\infty} J_n$. Gli insiemi J_n, J sono misurabili.

Da $|H_n| > \sigma$ si ricava : $|J_n| > \sigma$ e $|J| \geqslant \sigma$.

Dimostriamo ora che :

(3) $$\Phi(F) \supset J - N.$$

Sia infatti $Q(x_0, y_0)$ un punto di $J-N$. Allora $Q(x_0, y_0)$ appartiene a J e perciò a tutti gli J_n e quindi a infiniti H_n. Esistono perciò infiniti poligoni $p_j \equiv \pi_r^{(n)}$ di indice n comunque elevato per i quali $O(x_0, y_0; c_r^{(n)}) \neq 0$.

Poniamo :

$$m_0 = \Psi(x_0, y_0; \Phi).$$

È : $0 < m_0 < +\infty$. Pensiamo ordinati tali poligoni $p_j \equiv \pi_r^{(n)}$ in una successione $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ in modo che la successione dei corrispondenti indici sia monotona non decrescente. Ciascun poligono p_j è completamente esterno a tutti i poligoni precedenti, oppure è completamente contenuto in un poligono $p_{j'}$, con $j' < j$.

Diciamo c_j la curva continua e chiusa immagine della poligonale p_j^* costituente la frontiera di p_j. Non possono esistere $m > m_0$ poligoni p_j a due a due esterni l'uno all'altro, altrimenti si avrebbe :

$$m_0 = \Psi(x_0, y_0; \Phi) \geqslant \sum_{j=1}^{m} |\, O(x_0, y_0; p_j) \,| > m_0 .$$

I poligoni p_j debbono perciò distribuirsi in $m_0' \leqslant m_0$ successioni di poligoni :

$$p_1^{(s)} \supset p_2^{(s)} \supset \dots \supset p_j^{(s)} \supset \dots\dots \quad (s = 1, 2, \dots, m_0' \leqslant m_0)$$

ognuno contenente il successivo.

Per ognuna di queste m_0' successioni esiste perciò almeno un punto $P^{(s)}$ $(s = 1, \dots, m_0')$ contenuto in ogni poligono della successione, oppure, se ciò fosse possibile, sulla frontiera di ogni poligono, a partire da un certo indice j_0 in poi. Ma proveremo subito che quest'ultima eventualità non si verifica. Infatti, si noti che $O(x_0, y_0; c_j^{(s)}) \neq 0$ (dove si è indicata con $c_j^{(s)}$ la curva continua e chiusa immagine della frontiera $p_j^{(s)*}$ di $p_j^{(s)}$) per ogni j e perciò per un lemma di RADÒ ([12]), in ogni poligono $p_j^{(s)}$ esiste un modello $P_j^{(s)}$ di Q, cioè un punto $P_j^{(s)}$ tale che $\Phi(P_j^{(s)}) = Q$.

Ne segue che $P^{(s)}$ è punto di accumulazione di infiniti punti $P_j^{(s)}$ e perciò, essendo la Φ una trasformazione continua, $\Phi(P^{(s)}) = Q$. Inoltre, essendo $O(x_0, y_0; c_j^{(s)}) \neq 0$, $P^{(s)}$ non può appartenere a $p_j^{(s)*}$ e perciò esso è punto *interno* di tutti i poligoni $p_j^{(s)}$ a cui appartiene. Ciò prova che $P^{(s)}$ appartiene a infiniti poligoni $\pi_r^{(n)}$ con indice n comunque elevato, cioè ad infiniti insiemi E_n e quindi a tutti gli insiemi F_n ed infine a F. Perciò F è un insieme di punti

---

([12]) T. RADÒ : *On continuous transformations in the plane.* Fundamenta Mathematicae, Tomo XXVII. (1936) pp. 201-211.

di A non vuoto, di misura nulla, per cui l'insieme corrispondente $\Phi(F)$ è tale che:

$$\Phi(F) \supset J-N, \quad |\Phi(F)| \geqslant |J-N| = |J| \geqslant \sigma > 0.$$

Ciò contraddice l'ipotesi ammessa ed è perciò soddisfatta la condizione α) di cui alla definizione di trasformazione assolutamente continua.

Ripetendo considerazioni analoghe a quelle svolte da CESARI in un suo lavoro ([13]), dall'ipotesi che la Φ trasforma ogni insieme di punti di A di misura nulla in un insieme di punti di misura nulla, segue che per ogni poligono π di A e per ogni suddivisione $\{\pi_i, \ i=1, 2, \dots, n\}$ di π in poligoni aperti semplici, a due a due senza punti a comune, si ha:

$$G(\pi) = \sum_{i=1}^{n} G(\pi_i).$$

La condizione β) di cui alla definizione di trasformazione assolutamente continua è perciò anch'essa soddisfatta e il teorema resta pertanto provato.

5. - Prima di dimostrare il teorema II, proviamo il seguente:

TEOREMA. - *Ogni trasformazione Φ biunivoca e continua è a variazione limitata insieme alla sua inversa Φ^{-1}.*

Si noti intanto che la Φ^{-1} è, come la Φ, biunivoca e continua. Ciò segue subito se si osserva che, essendo Φ continua e biunivoca, ad ogni $\varepsilon > 0$ si può far corrispondere un numero $\sigma > 0$ tale che se Q e Q' sono due punti di $\overline{B}$ tali che $\overline{QQ'} < \sigma$, allora la distanza dei punti P e P' di $\overline{A}$ corrispondenti a Q e Q' risulta $< \varepsilon$. Si potrà perciò limitarsi a dimostrare la proprietà enunciata per la trasformazione Φ.

Sia $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ una suddivisione di A in regioni di JORDAN e siano $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ le regioni di JORDAN immagini delle precedenti per la trasformazione Φ. La $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ costituisce una suddivisione di B in regioni di JORDAN e se $c_1, c_2, \dots, c_n$ sono le curve continue e chiuse costituenti la frontiera di $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, si ha

$$O(x, y; c_i) = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } (x, y) \ \varepsilon \ \gamma_i \\ = 0 & \text{se } (x, y) \text{ non } \varepsilon \ \gamma_i . \end{cases}$$

Poichè la Φ è una trasformazione biunivoca si ha $\Psi(x, y; \Phi) \leqslant 1$ se (x, y) ε B, $\Psi(x, y; \Phi) = 0$ se (x, y) non ε B. D'altra parte, essendo per $n=1$, $r_1 \equiv A$ e perciò $\Psi(x, y; \Phi) \geqslant 1$ se $(x, y) \ \varepsilon \ B$, $\Psi(x, y; \Phi) = 0$ se (x, y) non ε B risulta $\Psi(x, y; \Phi) = 1$ se (x, y) ε B, $\Psi(x, y; \Phi) = 0$ se (x, y) non ε B. In altre parole è $W(\Phi) = \iint_K \Psi(x. y; \Phi)\, dx\, dy = |B| < +\infty$ e perciò la Φ risulta a variazione limitata.

([13]) L. CESARI: *Sulle trasformazioni continue e sull'area delle superficie.* Memorie Acc d'Italia (1941) pp. 1305-1395, p. 1314.

6. - Dimostrazione del teorema II.

Supponiamo il teorema falso; supponiamo cioè che la trasformazione Φ biunivoca e continua e perciò a variazione limitata, per quanto abbiamo provato nel n. 5, sia anche assolutamente continua ed esista un insieme E di punti (interni) di A di misura nulla che sia trasformato dalla Φ in un insieme $\Phi(E)$ di misura esterna ([14]) positiva. Si abbia cioè:

$$|\Phi(E)| = \sigma > 0.$$

Si dica A_τ l'insieme (chiuso) dei punti di A la cui distanza da A^* è $\geqslant \tau$ e, analogamente, si dica B_λ l'insieme (chiuso) dei punti di B la cui distanza da B^* ([15]) è $\geqslant \lambda$. È, evidentemente,

$$\lim_{\lambda \to 0} B_\lambda = B, \quad \lim_{\lambda \to 0} B_\lambda\, \Phi(E) = \Phi(E), \quad \lim_{\lambda \to 0} |B_\lambda\, \Phi(E)| = |\Phi(E)|$$

ed esiste perciò un $\bar{\lambda} > 0$ tale che:

$$|B_{\bar{\lambda}}\, \Phi(E)| > \frac{\sigma}{2}.$$

Si ponga $\mathcal{E}_0 = B_{\bar{\lambda}}\, \Phi(E)$, $E_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{E}_0)$.

È: $$E_0 \subset E, \quad |E_0| = 0, \quad |\mathcal{E}_0| > \frac{\sigma}{2}.$$

Poichè E_0 corrisponde (biunivocamente) all'insieme $\mathcal{E}_0 \subset B_{\bar{\lambda}}$, esisterà un $\bar{\tau} > 0$ tale che $E_0 \subset A_{\bar{\tau}}$. Si osservi ancora che $A_{\bar{\tau}}$ è tutto costituito di punti interni di $A_{\bar{\tau}/2}$ e che l'insieme chiuso $\Phi(A_{\bar{\tau}/2})$ ha una distanza $\lambda' > 0$, $0 < \lambda' < \bar{\lambda}$ da B^* ed è perciò interamente contenuto nell'insieme chiuso $B_{\lambda'}$. Per ogni intero n esiste una successione di rettangoli aperti a lati paralleli agli assi, non sovrapponentisi, $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots$, appartenenti interamente all'insieme $A_{\bar{\tau}/2}$, tali che il plurirettangolo Δ_n che essi costituiscono ricopre una parte E_0' di E_0 per cui $|\Phi(E_0 - E_0')| = 0$ e soddisfa alla condizione ([16])

$$|\Delta_n| = \sum_{r=1}^{\infty} |\delta_r^{(n)}| < \frac{1}{2^n}.$$

([14]) Si tenga presente che non è detto che a un insieme E di A misurabile corrisponda per la Φ un insieme misurabile.

([15]) Si osservi che la trasformazione Φ induce una corrispondenza biunivoca e continua fra le frontiere A^* e B^* di A e di B.

([16]) Basta tener presente che, *nelle nostre ipotesi, ogni poligonale semplice l tutta costituita di punti di A è trasformata da Φ in una curva continua (semplice) di misura superficiale nulla.* Infatti, supposto, ciò che è possibile, l completamente interna ad A, estremi inclusi, siano l_1 e l_2 due poligonali, aventi gli estremi in comune tra loro e con l e tali che il poligono semplice aperto π il cui contorno è $l_1 + l_2$ è completamente contenuto in A e

Per ogni intero n poniamo:

$$\Delta_\nu^{(n)} = \delta_1^{(n)} + \delta_2^{(n)} + \dots + \delta_\nu^{(n)}, \quad E_\nu^{(n)} = E_0 - E_0\,\Delta_\nu^{(n)},$$
$$\Gamma_\nu^{(n)} = \Phi(\Delta_\nu^{(n)}), \qquad H_\nu^{(n)} = \Phi(E_\nu^{(n)}).$$

È, evidentemente,

$$\Gamma_\nu^{(n)} \subset \Gamma_{\nu+1}^{(n)}, \quad H_\nu^{(n)} \supset H_{\nu+1}^{(n)}$$

e inoltre, tenendo conto della biunivocità della trasformazione Φ:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Gamma_\nu^{(n)} \supset \mathcal{E}_0, \quad \lim_{n\to\infty} H_\nu^{(n)} = \Phi(E_0 - E_0'), \quad \lim_{\nu\to\infty} |\, H_\nu^{(n)} \,| = |\, \Phi(E_0 - E_0') \,| = 0.$$

Esiste perciò un indice ν_n tale che

$$|\, H_{\nu_n}^{(n)} \,| < \frac{\sigma}{4}.$$

La trasformazione Φ fa corrispondere (biunivocamente) ai rettangoli aperti $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots, \delta_{\nu_n}^{(n)}$ le regioni aperte di JORDAN $r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \dots, r_{\nu_n}^{(n)}$ ed è, com'è noto:

$$g(\delta_i^{(n)}) = |\, r_i^{(n)} \,| \qquad (i = 1, \dots, \nu_n).$$

Si ponga:

$$R_n = r_1^{(n)} + r_2^{(n)} + \dots + r_{\nu_n}^{(n)}.$$

È: $\quad |\, R_n \,| = |\, r_1^{(n)} \,| + |\, r_2^{(n)} \,| + \dots + |\, r_{\nu_n}^{(n)} \,| = g(\delta_1^{(n)}) + g(\delta_2^{(n)}) + \dots + g(\delta_{\nu_n}^{(n)})$

$$\Gamma_{\nu_n}^{(n)} + H_{\nu_n}^{(n)} = \Phi(\Delta_{\nu_n}^{(n)}) + \Phi(E_0 - E_0\,\Delta_{\nu_n}^{(n)}) \supset \mathcal{E}_0$$

$$|\, R_n \,| = |\, \Phi(\Delta_{\nu_n}^{(n)}) \,| = |\, \Gamma_{\nu_n}^{(n)} \,| \geqslant |\, \mathcal{E}_0 \,| - |\, H_{\nu_n}^{(n)} \,| > \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma}{4}$$

e inoltre:

$$|\, \Delta_{\nu_n}^{(n)} \,| < \frac{1}{2^n}.$$

In altre parole, esiste una successione di gruppi di poligoni semplici aperti a due a due senza punti a comune

$$\Delta_{\nu_n}^{(n)} \equiv (\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots, \delta_{\nu_n}^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

tali che

$$\sum_{i=1}^{\nu_n} |\, \delta_i^{(n)} \,| < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{i=1}^{\nu_n} g(\delta_i^{(n)}) > \frac{\sigma}{4} > 0$$

e questo fatto contrasta con l'ipotesi che la trasformazione Φ sia assolutamente continua. Il teorema II è così provato.

---

contiene interamente l. Allora l divide π in due poligoni semplici aperti π_1 e π_2. Detta λ la curva continua e semplice immagine di l e γ, γ_1, γ_2 le regioni di JORDAN immagini di π, π_1, π_2 si ha. essendo la Φ *biunivoca e assolutamente continua:*

$$\gamma_1 + \lambda + \gamma_2 = \gamma, \quad |\, \gamma_1 \,| + |\, \lambda \,| + |\, \gamma_2 \,| = |\, \gamma \,|$$
$$G(\pi_1) = g(\pi_1) = |\, \gamma_1 \,|, \quad G(\pi_2) = g(\pi_2) = |\, \gamma_2 \,|, \quad G(\pi) = g(\pi) = |\, \gamma \,|, \quad G(\pi) = G(\pi_1) + G(\pi_2)$$

e perciò $|\, \lambda \,| = 0$.