ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Sulla convergenza delle serie doppie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 3-4 (1942), p. 133-150

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_133_0>

SULLA CONVERGENZA DELLE SERIE DOPPIE [1]

di LAMBERTO CESARI (Pisa).

§ 1.

1. - Sia

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

una serie semplice e siano $s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$ le sue somme parziali. Si dice che la (1) è *convergente* se esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

e questo limite dicesi la *somma* della serie (1).

Si dice che la (1) è *sommabile* $(C, 1)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} s_r = S,$$

e questo limite dicesi *somma generalizzata* o *somma* $(C, 1)$ della serie (1).

Si dice che la (1) è *sommabile* P se, per ogni numero reale $0 \leqslant x < 1$, converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

e questo limite dicesi *somma generalizzata* o *somma* P della serie (1).

Valgono i seguenti classici teoremi:

A) (E. CESARO [2]) Se la serie (1) converge ed ha per somma S, allora essa è sommabile $(C, 1)$ e la sua somma $(C, 1)$ coincide con S.

---

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) E. CESARO: *Sur la multiplication des séries*. Bulletin des Sciences Mathématiques, S. 2, T. XIV (1890), pp. 114-120.

B) (N. H. ABEL [3]) Se la serie (1) converge ed ha per somma S, allora essa è sommabile P e la sua somma P coincide con S [4].

C) (F. G. FROBENIUS [5]) Se la serie (1) è sommabile $(C, 1)$ ed ha per somma generalizzata S, allora essa è sommabile P e la sua somma P coincide con S.

2. - Sia

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{2}$$

una serie doppia e siano $s_{mn}=\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n} a_{rt}$, $m, n=0, 1, 2, \ldots$, le sue somme parziali.

Si dice che la (2) è *convergente*, o *convergente in senso ordinario*, o *convergente secondo Stolz e Pringsheim*, se esiste il limite

$$\lim_{\substack{m \\ n}\Big\}\to+\infty} s_{mn}=S.$$

Si dice che la (2) è *sommabile* $(C, 1, 1)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{m \\ n}\Big\}\to+\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n} s_{rt}=S.$$

Si dice che la (2) è *sommabile* P se, per ogni coppia di numeri reali $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$, converge la serie $\sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ e se esiste finito il limite $\lim_{\substack{x \\ y}\Big\}\to 1-0} \sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n=S$.

---

[3] N. H. ABEL: *Untersuchungen über die Reihe....* Journal für Mathematik, Band I (1826), pp. 311-339.

[4] Nelle condizioni di questo teorema la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente per ogni numero complessso $|x|<1$, cioè in tutti i punti interni al cerchio C del piano complesso x di centro $x=0$ e raggio 1. Inoltre la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente in ogni regione del tipo

$$R(1-x) \geqslant |1-x|\cos\theta, \qquad |1-x| \leqslant 2h\cos\theta, \qquad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad 0<h<1,$$

ossia in ogni settore circolare tutto costituito di punti interni a C (oltre il punto $x=1$) avente il vertice nel punto $x=1$, avente apertura 2θ e come asse di simmetria l'asse reale.

[5] F. G. FROBENIUS: *Über die Leibnitzsche Reihe.* Journal für Mathematik, Bd. 89 (1880), pp. 262-264.

3. - La nozione di convergenza di STOLZ e PRINGSHEIM è, sotto ogni punto di vista, l'estensione alle serie doppie della nozione di convergenza ordinaria per le serie semplici. Ricorderò tra l'altro che, nella teoria delle serie doppie di FOURIER, si sono potuti estendere alla convergenza secondo STOLZ e PRINGSHEIM i teoremi di DINI [6], DIRICHLET - JORDAN [7], DE LA VALLÉE - POUSSIN [8], LEBESGUE [9], valevoli per la convergenza ordinaria delle serie di FOURIER di una sola variabile.

Viceversa nella stessa teoria delle serie doppie di FOURIER, l'estensione alla sommabilità $(C, 1, 1)$ dei teoremi valevoli per la sommabilità $(C, 1)$ delle serie semplici presentò sempre notevoli difficoltà, segnalate fin dal 1927 da L. TONELLI [10]. Allo scopo di ovviare a tali difficoltà il TONELLI propose, fin da allora, di considerare, a fianco alla sommabilità $(C, 1, 1)$, la seguente più ristretta nozione di sommabilità :

Si dice che la (2) è *sommabile secondo le medie del Cesaro in senso ristretto*, o *sommabile* $(C, 1, 1)_r$, se, per ogni coppia di numeri positivi e finiti, $0< l<L< +\infty$, esiste il limite

$$\lim_{\substack{m \\ n}\Big\} \to +\infty \atop l<\frac{m}{n}<L} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} s_{mn}=S.$$

Questa nozione di sommabilità si dimostrò subito quanto mai opportuna, e la sua grande utilità, e si può dire necessità, si sono poi rivelate pienamente attraverso le più recenti ricerche di S. SAKS (1935) [11] e di A. ZYGMUND (1939) [12].

---

(6) L. TONELLI : *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier.* Annali di Matematica, S. IV, T. IV (1927), pp. 29-72. Cfr. inoltre L. TONELLI : *Serie trigonometriche.* Bologna, Zanichelli, 1928, pag. 450.

(7) L. TONELLI: loc. cit. in (6). Inoltre L. TONELLI : *Serie trigonometriche*, pag. 455 ; L. TONELLI : *Sulle serie doppie di Fourier.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. II, Vol. VI (1937), pp. 315-326 ; L. CESARI : *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata secondo Tonelli e sulla convergenza delle serie doppie di Fourier.* Rend. Sem. Mat. di Roma, Ser. IV, Vol. 1 (1937), pp. 277-294.

(8) W. H. YOUNG : *Multiple Fourier series.* Proceedings of the London Math. Soc., Vol. 11 (1913), pp. 133-184.

(9) J. J. GERGEN : *Convergence criteria for double Fourier series.* Transactions of the American Math. Society, Vol. 35 (1933), pp. 29-63.

(10) Loc. cit. in (6).

(11) S. SAKS : *Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral.* Fund. Math. Tom. XXII (1934), pp. 257-261.

(12) A. ZYGMUND e J. MARCINKIEWICZ : *On the summability of double Fourier series.* Fund. Math. Tom. XXXII (1939), pp. 122-132.

Questi AA. dimostrarono infatti ([13]) le seguenti proposizioni, proposte fino dal 1927 da L. TONELLI : *a*) Esistono funzioni di due variabili reali, integrabili secondo LEBESGUE, la cui serie doppia di FOURIER è *non* sommabile $(C, 1, 1)$ in *tutti* i punti del quadrato fondamentale; *b*) ogni serie doppia di FOURIER è sommabile $(C, 1, 1)_r$ in quasi tutti i punti del quadrato fondamentale e la sua somma coincide quasi ovunque con la funzione generatrice ([14]).

La sommabilità $(C, 1, 1)_r$ ha permesso così l'estensione alle serie doppie di FOURIER del classico teorema di LEBESGUE della teoria delle serie di FOURIER di una sola variabile ([15]).

Quanto è stato detto per la sommabilità $(C, 1, 1)$ si ripete parola per parola per la sommabilità P, esistendo tra le due nozioni note e profonde analogie. È stata perciò considerata la seguente nozione più ristretta di sommabilità P:

Si dice che la (2) è *sommabile P in senso ristretto*, o è *sommabile* P_r, se, per ogni coppia di numeri reali $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$, converge la serie $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$ e se, per ogni coppia di numeri positivi e finiti $0 < l < L < +\infty$, esiste il limite

$$\lim_{\substack{\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \to 1-0 \\ l < \frac{1-x}{1-y} < L}} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = S.$$

Le analogie esistenti tra le sommabilità $(C, 1, 1)$ e P si estendono alle sommabilità $(C, 1, 1)_r$ e P_r. In particolare poi valgono i teoremi di S. SAKS e A. ZYGMUND e quindi *a*) esistono funzioni di due variabili, integrabili secondo LEBESGUE, la cui serie doppia di FOURIER è *non* sommabile P in *tutti* i punti del quadrato fondamentale; *b*) ogni serie doppia di FOURIER è sommabile P_r in quasi tutti i punti del quadrato fondamentale e la sua somma coincide quasi ovunque con la funzione generatrice ([16]).

([13]) Tali risultati sono stati ottenuti mediante ricerche estremamente raffinate sulla teoria delle funzioni reali di variabile reale.

([14]) La sommabilità $(C, 1, 1)_r$ permette così di risolvere il problema fondamentale di caratterizzare la funzione generatrice di una data serie doppia di FOURIER, mediante sole operazioni da eseguirsi sulla serie data. Questo problema, per altro, era già stato risolto dal TONELLI, nel suo trattato *Serie trigonometriche*, pag. 500, mediante l'uso del cosidetto polinomio trigonometrico di DE LA VALLÉE - POUSSIN.

([15]) H. LEBESGUE : *Recherches sur la convergence des séries de Fourier*. Math. Annalen, Bd. 61 (1905), pp. 251-280. Cfr. inoltre L. TONELLI : *Serie trigonometriche*, pag. 175. Il teorema di LEBESGUE afferma come è noto che ogni serie di FOURIER di una sola variabile converge $(C, 1)$ quasi ovunque e la sua somma coincide quasi ovunque con la funzione generatrice.

([16]) Queste proposizioni sono implicitamente contenute nelle ricerche di S. SAKS e A. ZYGMUND.

4. - I risultati dianzi ricordati della teoria delle serie di FOURIER mostrano quanto sia opportuno l'uso delle nozioni di sommabilità $(C, 1, 1)_r$ e P_r quali estensioni delle nozioni di sommabilità $(C, 1)$ e P delle serie semplici. Ciò non deve far meraviglia in quanto tali nozioni di sommabilità si incontrano già in modo naturale nella teoria delle serie doppie numeriche e precisamente nell'estensione alle serie doppie dei teoremi di CESARO, ABEL e FROBENIUS.

Io mi occupai già di questo problema fin dal 1934, almeno per quanto riguarda la sommabilità $(C, 1, 1)$, e dimostrai, tra l'altro, le seguenti proposizioni, le quali estendono alle serie doppie numeriche il teorema di CESARO [17] :

I) *Se la serie* (2) *converge ed ha per somma* S, *se*

$$\lim_{m+n \to +\infty} a_{mn} = 0, \qquad (3)$$ [18]

allora la (2) *è sommabile* $(C, 1, 1)_r$ *e la sua somma generalizzata coincide con* S [19].

II) *Se, per ogni coppia di numeri* $0 < l' < L' < +\infty$, *esiste finito il limite*

$$\lim_{\substack{m \\ n} \} \to +\infty,\ l' < \frac{m}{n} < L'} s_{mn} = S,$$ [20]

se esistono cinque costanti positive A, B, C, σ, τ, *tali che, per ogni* $\mu, \nu \geq 0$,

$$|s_{\mu\nu}| < A + B\left(\frac{\mu+1}{\nu+1}\right)^{\sigma} + C\left(\frac{\nu+1}{\mu+1}\right)^{\tau}, \qquad \sigma < 1, \quad \tau < 1, \qquad (4)$$

allora la (2) *è sommabile* $(C, 1, 1)_r$ *e la sua somma generalizzata coincide con* S [21].

Naturalmente per la sommabilità P_r valgono teoremi perfettamente analoghi.

---

[17] L. CESARI : *Su un tipo di condizioni necessarie per la convergenza dei polinomi di Fourier e di Fejér e su altre questioni concernenti le serie doppie di Fourier.* Memorie della R. Accademia d'Italia, Vol. VIII, n. 10 (1937), pp. 445-531 e particolarmente le prime pagine del Cap. I.

[18] Ogni serie doppia di FOURIER verifica questa condizione. Io ho già mostrato l'opportunità e l'utilità di questa condizione in precedenti lavori ; L. CESARI : *Sulle serie doppie.* Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Ser. II, Vol. I (1932), pp. 297-314 ; L. CESARI : *Sulle serie doppie.* Rendiconti del Congresso Intern. dei Matematici, Zurigo, 1932, Vol. II, pag. 104.

[19] L. CESARI, loc. cit. in [17], pag. 454.

[20] Questa definizione rappresenta una nozione di convergenza generalizzata che mi è stata assai utile in mie ricerche precedenti, loc. cit. in [17].

[21] L. CESARI, loc. cit. in [17], pag. 456. La condizione (4) è una estensione della condizione $|s_{\mu\nu}| < A$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots$, adoperata in altre questioni da F. LEJA : *Remarques sur la convergence des séries doubles.* Annales de la Société Polonaise de Math., Tom. IX (1932), pp. 135-142.

Dimostrerò infatti (§ 2), seguendo lo stesso procedimento adoperato a suo tempo per i teorèmi I e II, le due seguenti proposizioni, che estendono alle serie doppie il teorema di ABEL:

III) *Nelle condizioni del teorema* I, *la* (2) *è sommabile* P_r *e la sua somma generalizzata coincide con* S.

IV) *Nelle condizioni del teorema* II, *la* (2) *è sommabile* P_r *e la sua somma generalizzata coincide con* S.

Sia ora

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{2}$$

la serie doppia considerata e siano

$$s_{mn}=\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n} a_{rt}, \qquad \sigma_{mn}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n} s_{rt},$$

le sue somme parziali e le sue medie del CESARO.

Io dimostrerò poi (§ 2) i seguenti teoremi che estendono alle serie doppie il teorema di FROBENIUS:

V) *Se la serie* (2) *è sommabile* $(C, 1, 1)$ *ed ha per somma generalizzata* S, *se*

$$\lim_{m+n\to+\infty} a_{mn}=0, \tag{3}$$

allora la serie doppia (2) *è sommabile* P_r *e la sua somma* P_r *coincide con* S.

VI) *Se, per ogni coppia di numeri* $0<l'<L'<+\infty$, *esiste finito il limite*

$$\lim_{\substack{m \\ n}\}\to+\infty,\ l'<\frac{m}{n}<L'} \sigma_{mn}=S,$$

se esistono cinque costanti positive A, B, C, σ, τ, *tali che, per ogni* μ, $\nu \geqslant 0$,

$$|\sigma_{\mu\nu}|<A+B\left(\frac{\mu+1}{\nu+1}\right)^{\sigma}+C\left(\frac{\nu+1}{\mu+1}\right)^{\tau}, \qquad \sigma<2, \quad \tau<2, \tag{4'}$$

allora la (2) *è sommabile* P_r *e la sua somma generalizzata coincide con* S.

5. - Come si è visto nel n. 4 i teoremi di CESARO, ABEL e FROBENIUS trovano, mediante le nozioni di convergenza di STOLZ e PRINGSHEIM e di sommabilità $(C, 1, 1)_r$ e P_r, una loro naturale sistemazione, la quale ha il vantaggio di inquadrarsi perfettamente con le più recenti ricerche sulle serie doppie di FOURIER.

Tuttavia L. AMERIO (1941) [22], ritenendo che la classica nozione di conver-

[22] L. AMERIO: *Sulla convergenza delle serie doppie.* Rendiconti della R. Accademia d'Italia, Ser. VII, Vol. II (1941), pp. 684-698.

genza di STOLZ e PRINGSHEIM non si presti alla estensione alle serie doppie del teorema di ABEL, ha proposto una nuova nozione di convergenza alla quale egli dà il nome di « convergenza ristretta » ([23]).

La classe delle serie doppie che riescono ristrettamente convergenti è assai limitata poichè, come L. AMERIO dimostra, ogni serie doppia « ristrettamente convergente » converge secondo STOLZ e PRINGSHEIM, converge per righe e per colonne, converge per diagonali e in ogni altra direzione del LEJA e infine verifica le seguenti condizioni

$$\lim_{m+n\to+\infty} a_{mn}=0, \qquad |s_{mn}|<k, \qquad m, n=1, 2,\ldots .$$

L. AMERIO dimostra però la seguente proposizione ([24]) :

« Se la serie doppia (2) è « ristrettamente convergente » ed ha per somma S, allora essa è sommabile P e la sua somma generalizzata coincide con S ».

Questa proposizione giustifica secondo L. AMERIO l'introduzione della sua complicata nozione di convergenza. Ma ciò non è. Io dimostrerò (§ 2) infatti l seguente teorema :

VII) *Se la serie doppia* (2) *converge secondo Stolz e Pringsheim ad una somma S e converge per righe e per colonne, allora la* (2) *è sommabile P e la sua somma coincide con S.*

In forza di quanto si è detto avanti la proposizione di L. AMERIO è contenuta nel mio teorema VII. Effettivamente poi il teorema VII è più generale della proposizione di L. AMERIO, come mostrerò (§ 3) mediante l'esempio di una serie doppia che converge in senso ordinario, per righe e per colonne, che non converge per diagonali e quindi non « converge ristrettamente » secondo la nozione di L. AMERIO.

Ma il teorema VII mostra l'inutilità della nozione introdotta da L. AMERIO, poichè la stessa tesi del suo teorema può essere ottenuta dalla sola convergenza ordinaria con l'aggiunta di una debole condizione di tipo classico.

([23]) Sia $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ una serie doppia e diciamo S_N le somme del tipo seguente

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M_n} a_{mn},$$

ove gli interi M_n, $n=0, 1, 2,\ldots, N$, sono assoggettati alla sola condizione

$$M_0 \geqslant M_1 \geqslant \ldots \geqslant M_N \geqslant 0.$$

La serie doppia $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ si dice che « converge ristrettamente » al valore finito S (secondo L. AMERIO) se ad ogni numero $\varepsilon>0$ corrisponde un intero p tale che per ogni somma S_N contenente il termine a_{pp} risulti $|S_N-S|<\varepsilon$.

([24]) Loc. cit. in ([23]), pag. 693.

Di più il teorema VII mostra la vera natura del problema, nel quale, come è noto, si tratta soltanto di assicurare un regolare andamento delle somme parziali s_{mn} con m grande rispetto ad n o n grande rispetto ad m ([25]).

§ 2. - Dimostrazione dei teoremi III - VII.

LEMMA I. - *Se* $|a_n| \leqslant k$, $n=0, 1, 2,\ldots$, *allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \qquad s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r, \quad n=0, 1, 2,\ldots, \qquad |x| < 1,$$

e le due serie ora scritte convergono assolutamente per ogni $|x| < 1$ ([26]).

Si ha $|a_n| \leqslant k$, $|s_n| \leqslant (n+1)k$ e le due serie ora scritte sono minoranti rispettivamente delle serie $k \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $k \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ assolutamente convergenti per $|x| < 1$.

Dalla uguaglianza di BRUNACCI - ABEL si ha

$$\sum_{n=0}^{m} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m \tag{5}$$

e, per ogni $|x| < 1$, si ha $|s_m x^m| \leqslant k(m+1)|x|^m$ e quindi $\lim_{m \to +\infty} |s_m x^m| = 0$.

Dalla (5) segue quindi l'asserto.

LEMMA II. - *Se* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, *allora*

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Sia k un numero tale che $|a_n| < k$ per ogni $n=0, 1, 2,\ldots$.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia N un intero tale che, per ogni $n \geqslant N$, si abbia $|a_n| < \varepsilon/2$. Ne segue

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{N} a_n x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < 1,$$

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| < (N+1)k|1-x| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|1-x|}{1-|x|}.$$

([25]) È inutile perciò prendere in considerazione tutte le somme S_N considerate da L. AMERIO.

([26]) Questo Lemma vale anche nell'ipotesi $|a_n| < k(n+1)$, $n=0, 1, 2,\ldots$.

Per ogni $x>0$ tale che $0<1-x<\frac{\varepsilon}{2(N+1)k}$ si ha quindi

$$|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n|<\varepsilon .$$

LEMMA III. - *Se* $|a_{mn}|\leqslant k$, $m,n=0,1,2,....$, *allora*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n=(1-x)(1-y)\sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn}x^m y^n, \qquad |x|<1, \qquad |y|<1,$$

e le due serie ora scritte convergono assolutamente per ogni coppia di numeri $|x|<1$, $|y|<1$.

Si ha $|a_{mn}|\leqslant k$, $|s_{mn}|\leqslant k(m+1)(n+1)$, $m,n=0,1,2,....$, e le due serie ora scritte sono minoranti rispettivamente delle serie

$$k\sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n, \qquad k\sum_{m,n=0}^{\infty}(m+1)(n+1)x^m y^n,$$

assolutamente convergenti per ogni coppia di numeri $|x|<1$, $|y|<1$. Poniamo $\tau_{mn}=\sum_{t=0}^{n} a_{mt}$, $m,n=0,1,2,....$ Dalla trasformazione di BRUNACCI - ABEL si ha

$$(6) \qquad \sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n} a_{rt}x^r y^t=(1-y)\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n-1}\tau_{rt}x^r y^t+\sum_{r=0}^{m}\tau_{rn}x^r y^n=$$
$$=(1-x)(1-y)\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{t=0}^{n-1} s_{rt}x^r y^t+(1-y)\sum_{t=0}^{n-1} s_{mt}x^m y^t+\sum_{r=0}^{m}\tau_{rn}x^r y^n.$$

Per ogni $|x|<1$, $|y|<1$, si ha

$$|(1-y)\sum_{t=0}^{n-1} s_{mt}x^m y^t|\leqslant k(m+1)(1-y)|x|^m\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)|y|^t=k\frac{|1-y|}{(1-|y|)^2}\cdot(m+1)|x|^m,$$

$$|\sum_{r=0}^{m}\tau_{rn}x^r y^n|\leqslant(n+1)k|y|^n\sum_{r=0}^{\infty}|x|^r=\frac{k}{1-|x|}\cdot(n+1)|y|^n,$$

$$\lim_{\substack{m\\ n}\Big\}\to\infty}(1-y)\sum_{t=0}^{n-1} s_{mt}x^m y^t=0, \qquad \lim_{\substack{m\\ n}\Big\}\to\infty}\sum_{r=0}^{m}\tau_{rn}x^r y^n=0.$$

Dalla (6) segue quindi l'asserto.

Dimostrazione del teorema III. - Consideriamo, per ogni μ, la successione

$$a_{\mu 0},\quad a_{\mu 1},\quad a_{\mu 2},....,\quad a_{\mu n},.....$$

In forza della condizione $\lim_{m+n\to\infty} a_{mn}=0$ la successione ora scritta tende a zero. Diciamo ε_μ il massimo valore assoluto dei suoi termini. La successione ε_μ, $\mu=0,1,2,....$, tende a zero.

Analogamente consideriamo, per ogni ν, la successione

$$a_{0\nu}, \quad a_{1\nu}, \quad a_{2\nu}, \ldots, \quad a_{m\nu}, \ldots,$$

e diciamo ε_ν' il massimo dei valori assoluti dei suoi termini.

Anche la successione ε_ν', $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, tende a zero.

Si osservi intanto che

$$|s_{mn}| \leqslant \sum_{r=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} |a_{rt}| \leqslant (m+1) \sum_{t=0}^{n} \varepsilon_t' \tag{7}$$

e, analogamente,

$$|s_{mn}| \leqslant (n+1) \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r . \tag{8}$$

Inoltre esiste una costante k tale che $|a_{mn}| \leqslant k$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$

Sia S la somma della serie $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ e siano $0 < l < L < +\infty$ due numeri positivi finiti arbitrari.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia N il più piccolo intero tale che per ogni $m > N$, $n > N$ si abbia $|s_{mn} - S| < \varepsilon/4$. Intanto, in forza del Lemma III, per ogni coppia di numeri reali $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$, si ha

$$S(x, y) \equiv \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} x^m y^n.$$

D'altra parte, essendo pure $S = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} S x^m y^n$, si trova, sottraendo membro a membro,

$$S(x, y) - S = (1-x)(1-y) \left\{ \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \right\} (s_{mn} - S) x^m y^n,$$

$$\begin{aligned}
|S(x, y) - S| &\leqslant (1-x)(1-y) \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_{mn} - S| x^m y^n + \\
&+ (1-x)(1-y) \left\{ \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \right\} |S| x^m y^n + \\
&+ (1-x)(1-y) \left\{ \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \right\} |s_{mn}| x^m y^n < \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + (N+1) |S| \{(1-x) + (1-y)\} + \\
&+ (1-x)(1-y) \left\{ \sum_{m=0}^{N} (m+1) \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{t=0}^{n} \varepsilon_t' + \sum_{n=0}^{N} (n+1) \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r \right\}.
\end{aligned}$$

Applicando il Lemma I alle due serie $\sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t' y^t$, $\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r x^r$, si trova

$$\sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t' y^t = (1-y) \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{t=0}^{n} \varepsilon_t',$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r x^r = (1-x) \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r,$$

e quindi

$$|S(x, y) - S| < \frac{\varepsilon}{4} + (N+1)\,|S|\,\{(1-x)+(1-y)\} +$$
$$+ \frac{(N+1)(N+2)}{2} \left\{ \frac{1-x}{1-y} \cdot (1-y) \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t' y^t + \frac{1-y}{1-x} \cdot (1-x) \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r x^r \right\}.$$

In forza del Lemma II esiste un numero $0 < \delta < 1$ tale che, per ogni

$$1-\delta < x < 1, \qquad 1-\delta < y < 1,$$

si ha

$$(1-y) \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t' y^t < \frac{\varepsilon}{2(N+1)(N+2)L}, \qquad (1-x) \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r x^r < \frac{\varepsilon l}{2(N+1)(N+2)}.$$

Possiamo inoltre supporre

$$\delta < \varepsilon / 8\,(N+1)(|S|+1).$$

Ne segue, per ogni $1-\delta < x < 1$, $1-\delta < y < 1$, $l < \frac{1-x}{1-y} < L$,

$$|S(x, y) - S| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + L \frac{\varepsilon}{4L} + \frac{1}{l} \frac{\varepsilon l}{4} = \varepsilon.$$

Il teorema III è con ciò dimostrato.

LEMMA IV. - *Se* $|s_{mn}| < k(m+1)(n+1)$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, *allora*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} x^m y^n, \qquad |x| < 1, \qquad |y| < 1,$$

e le due serie convergono assolutamente per ogni coppia di numeri complessi $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Analogo risultato sotto l'ipotesi $|a_{mn}| < k(m+1)(n+1)$.

Intanto si ha

$$a_{mn} = s_{mn} - s_{m-1,\,n} - s_{m,\,n-1} + s_{m-1,\,n-1}$$

e quindi

$$|a_{mn}| < 4k(m+1)(n+1).$$

Le serie $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$, $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} x^m y^n$ sono perciò minoranti delle serie

$$4k \sum_{m,n=0}^{\infty} (m+1)(n+1)\, x^m y^n, \qquad k \sum_{m,n=0}^{\infty} (m+1)(n+1)\, x^m y^n,$$

le quali convergono assolutamente per ogni coppia di numeri complessi $|x|<1$, $y|<1$. Si conduca ora la dimostrazione come per il Lemma III.

Dimostrazione del teorema IV. - Siano l', L', $0<l'<L'<+\infty$, due numeri arbitrari e sia $\varepsilon>0$ un numero pure arbitrario. Siano l, L, $0<l<L<+\infty$, due numeri tali che

$$l \leqslant 1, \quad l \leqslant \varepsilon l', \quad l \leqslant \left(\varepsilon l'\right)^{\frac{1}{1-\tau}}, \quad L \geqslant \left(\frac{L'}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad L \geqslant \frac{L'}{\varepsilon}, \quad L \geqslant 1,$$

e sia N il più piccolo intero tale che, per ogni coppia di interi m, n con $m \geqslant N$, $n \geqslant N$, $l \leqslant \frac{m+1}{n+1} \leqslant L$, sia

$$|s_{mn} - S| < \varepsilon.$$

Dalla (4) segue poi, per ogni m, n,

$$|s_{mn}| < A + B(m+1)^\sigma + C(n+1)^\tau < A + B(m+1) + C(n+1) < k(m+1)(n+1),$$

ove k è una opportuna costante. In forza del Lemma IV segue

$$S(x, y) \equiv \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} x^m y^n$$

e quindi

$$S(x,y) - S = (1-x)(1-y) \left\{ \sum_{\substack{l \leqslant \frac{m+1}{n+1} \leqslant L \\ m \leqslant N \text{ oppure } n \leqslant N}} + \sum_{\frac{m+1}{n+1} < l} + \sum_{\frac{m+1}{n+1} > L} + \sum_{\substack{l \leqslant \frac{m+1}{n+1} \leqslant L \\ m > N \\ n > N}} \right\} (s_{mn} - S)\, x^m y^n = \\ = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .$$

È intanto $|I_4| < \varepsilon$. Inoltre

$$|I_1| < (1-x)(1-y)(N+1)^2 (L + 1/l)[A + |S| + BL^\sigma + Cl^{-\tau}]$$

e quindi, se δ è un numero dipendente da ε sufficientemente piccolo, per ogni $1-\delta < x < 1$, $1-\delta < y < 1$, si ha $|I_1| < \varepsilon$.

Ricordiamo che, in dipendenza di σ e τ soltanto, esistono opportune costanti b, c tali che, per ogni intero n,

$$\sum_{r=1}^{n} r^{-\sigma} < b n^{1-\sigma}, \qquad \sum_{r=1}^{n} r^{-\tau} < c n^{1-\tau}.$$

Visto ciò, per ogni $l' < \frac{1-y}{1-x} < L'$, si ha

$$| I_2 | < (1-x)(1-y) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{E[l(n+1)]-1} [\, | s_{mn} | + | S |\,] x^m y^n <$$

$$< (1-x)(1-y)\, l [A + | S | + Bl^{\sigma}] \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y^n +$$

$$+ (1-x)(1-y)\, Ccl^{1-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y^n <$$

$$< \frac{1-x}{1-y} \{ l [A + | S | + Bl^{\sigma}] + Ccl^{1-\tau} \} < [A + | S | + B + Cc]\, \varepsilon$$

Analogamente

$$| I_3 | < (1-x)(1-y) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{m+1}{L}\right)-1} [\, | s_{mn} | + | S |\,] x^m y^n <$$

$$< \frac{1-y}{1-x} \left\{ \frac{1}{L} [A + | S | + CL^{-\tau}] + Bb \frac{1}{L^{1-\sigma}} \right\} < [A + | S | + Bb + C]\, \varepsilon .$$

Risulta così, per ogni $1-\delta < x < 1$, $1-\delta < y < 1$, $l' < \frac{1-y}{1-x} < L'$,

$$| S(x, y) - S | < [2A + 2 | S | + B(1+b) + C(1+c) + 2]\, \varepsilon,$$

dove il fattore che moltiplica ε non dipende da l, L, ε. Da qui, per l'arbitrarietà di ε, segue l'asserto.

Dimostrazione del teorema V. - Si costruiscano, come nella dimostrazione del teorema III, le successioni tendenti a zero ε_μ, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$; ε_ν', $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Sia poi k una costante tale che $| a_{mn} | < k$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, cosicchè $| s_{mn} | < k(m+1)(n+1)$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Poniamo

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} s_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia N il più piccolo intero tale che per ogni $m > N$, $n > N$ si abbia $| \sigma_{mn} - S | < \varepsilon / 4$.

Intanto, in forza del Lemma III, per ogni coppia di numeri $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$, si ha

$$S(x, y) \equiv \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} x^m y^n.$$

In forza del Lemma IV si ha poi

$$S(x, y) \equiv \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = (1-x)^2 (1-y)^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} (m+1)(n+1)\, \sigma_{mn} x^m y^n.$$

Ne segue

$$S(x,y)-S=$$
$$=(1-x)^2(1-y)^2\left\{\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\right\}(m+1)(n+1)(\sigma_{mn}-S)x^m y^n=$$
$$=I_1+I_2+I_3.$$

Manifestamente $|I_3|\leqslant\varepsilon/4$. Inoltre

$$|I_1+I_2|\leqslant(1-x)^2(1-y)^2\left\{\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\right\}(m+1)(n+1)\,|S|\,x^m y^n+$$
$$+(1-x)^2(1-y)^2\left\{\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\right\}(m+1)(n+1)\,|\sigma_{mn}|\,x^m y^n=$$
$$=\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2.$$

Si ha ora

$$\mathfrak{I}_1\leqslant(N+1)^2|S|\{(1-x)^2+(1-y)^2\}.$$

Esiste perciò un numero $0<\delta_1<1$ tale che, per ogni $1-\delta_1<x<1$, $1-\delta_1<y<1$, si ha $\mathfrak{I}_1<\varepsilon/4$.

Ricordando le (7) e (8) si trova infine

$$\mathfrak{I}_2\leqslant(1-x)^2(1-y)^2\left\{\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n}(r+1)\sum_{u=0}^{t}\varepsilon_u'\right]x^m y^n+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n}(t+1)\sum_{v=0}^{r}\varepsilon_v\right]x^m y^n\right\}\leqslant$$
$$\leqslant(1-x)^2(1-y)^2(N+1)^3\left\{\sum_{n=0}^{\infty}y^n\sum_{t=0}^{n}\sum_{u=0}^{t}\varepsilon_u'+\sum_{m=0}^{\infty}x^m\sum_{r=0}^{m}\sum_{v=0}^{r}\varepsilon_v\right\}=$$
$$=(1-x)^2(1-y)^2(N+1)^3\left\{\frac{1}{1-y}\sum_{n=0}^{\infty}y^n\sum_{t=0}^{n}\varepsilon_t'+\frac{1}{1-x}\sum_{m=0}^{\infty}x^m\sum_{r=0}^{n}\varepsilon_r\right\}=$$
$$=(N+1)^3\left\{\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^2\cdot(1-y)^2\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n' y^n+\left(\frac{1-y}{1-x}\right)^2\cdot(1-x)^2\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m x^m\right\}.$$

In forza del Lemma II esiste un numero $0<\delta<1$, $\delta\leqslant\delta_1$, tale che, per ogni $1-\delta<x<1$, $1-\delta<y<1$, si ha

$$(1-y)^2\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n' y^n<\frac{\varepsilon}{4(N+1)^3L^2},\qquad(1-x)^2\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m x^m<\frac{\varepsilon l^2}{4(N+1)^3}.$$

Ne segue, per ogni $1-\delta<x<1$, $1-\delta<y<1$, $l<\dfrac{1-x}{1-y}<L$,

$$|S(x,y)-S|<\varepsilon/4+\varepsilon/4+L^2\cdot\varepsilon/4L^2+1/l^2\cdot\varepsilon l^2/4=\varepsilon.$$

Il teorema V è con ciò dimostrato.

Dimostrazione del teorema VI. - Basta combinare il procedimento adoperato per il teorema IV con quello del teorema V.

Dimostrazione del teorema VII.

a) Dimostriamo anzitutto che

$$\lim_{m+n\to+\infty} a_{mn}=0. \tag{9}$$

Sia $\varepsilon>0$ un numero arbitrario. Dalla convergenza ordinaria segue che esiste un N tale che, per ogni $m>N$, $n>N$, si ha $|a_{mn}|<\varepsilon$. D'altra parte, considerate le $2(N+1)$ serie tutte convergenti,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}, \quad m=0, 1, 2,...., N, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}, \quad n=0, 1, 2,...., N,$$

segue che esiste un M tale che, per ogni $n>M$, si ha $|a_{mn}|<\varepsilon$, $m=0, 1, 2,...., N$, e, per ogni $m>M$, si ha $|a_{mn}|<\varepsilon$, $n=0, 1, 2,...., N$. Ma, per ogni $m+n>M+N$, deve essere $m>N$, $n>N$, oppure $m\leqslant N$, $n>M$, oppure $n\leqslant N$, $m>M$, e quindi, in tutti i casi, $|a_{mn}|<\varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε segue la (9).

b) Sia S la somma della serie e siano $s_{\mu\nu}$ le sue somme parziali.

Dalla convergenza per righe segue che tutte le serie

$$S_\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\mu} a_{mn}\right\}, \qquad \mu=0, 1, 2,....,$$

convergono. Diciamo S_μ la loro somma, $\mu=0, 1, 2,....$. Analogamente, dalla convergenza per colonne, segue che tutte le serie

$$S_\nu'=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\nu} a_{mn}\right\}, \qquad \nu=0, 1, 2,....,$$

convergono. Diciamo S_ν' la loro somma. Dimostriamo che

$$\lim_{\mu\to\infty} S_\mu=S=\lim_{\nu\to\infty} S_\nu'. \tag{10}$$

Sia infatti $\varepsilon>0$ un numero arbitrario. Esiste un numero N tale che, per ogni $\mu>N$, $\nu>N$, si ha

$$|s_{\mu\nu}-S|<\varepsilon.$$

D'altra parte, per ogni numero finito μ, si ha pure

$$\lim_{\nu\to\infty} s_{\mu\nu}=S_\mu$$

e quindi anche, per ogni $\mu>N$,

$$|S_\mu-S|\leqslant\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la prima delle (10). Analogamente si dimostra la seconda.

c) Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia N un numero tale che, per ogni $m > N$, $n > N$, sia
$$| s_{\mu\nu} - S | < \varepsilon .$$

Intanto da *a*) e dal Lemma III segue

$$S(x, y) \equiv \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} x^m y^n ,$$

$$S(x, y) - S = (1-x)(1-y) \left\{ \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \right\} (s_{mn} - S) x^m y^n =$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 .$$

Intanto è $| I_3 | < \varepsilon$. Inoltre

$$| I_1 | \leqslant (1-x)(1-y) \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} |(s_{mn} - S_m) + S_m - S| x^m y^n \leqslant$$
$$\leqslant [(N+1) | S | + \sum_{m=0}^{N} | S_m |] (1-x) +$$
$$+ (1-x) \sum_{m=0}^{N} \left\{ (1-y) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} | s_{mn} - S_m | y^n \right\} .$$

Ma, per ogni $m = 0, 1, 2, \ldots, N$, si ha
$$\lim_{n \to \infty} | s_{mn} - S_m | = 0$$
e quindi, per il Lemma II, esiste un numero $0 < \delta' < 1$ tale che, per ogni $1 - \delta' < y < 1$, si ha
$$(1-y) \sum_{n=0}^{\infty} | s_{mn} - S_m | y^n < \frac{\varepsilon}{N+1} , \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Supponendo inoltre
$$\delta' \leqslant \varepsilon : [(N+1) | S | + \sum_{m=0}^{N} | S_m |], \qquad 1 - \delta' < x < 1,$$
si ha $| I_1 | < 2\varepsilon$.

Analogamente esisterà un $0 < \delta'' < 1$ tale che, per ogni $1 - \delta'' < x < 1$, $1 - \delta'' < y < 1$, si ha $| I_2 | < 2\varepsilon$.

Sia δ il più piccolo dei numeri δ' e δ''. Per ogni x, y tale che
$$1 - \delta < x < 1, \qquad 1 - \delta < y < 1,$$
si ha, quindi,
$$| S(x, y) - S | \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon .$$

Dall' arbitrarietà di ε segue l' asserto.

§ 3. - Esempio di serie doppia convergente in senso ordinario, per righe e per colonne, ma non convergente per diagonali.

Si ponga

$$a_{mn}=\begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+n}}{2^\nu} & \text{se } \begin{cases} 2^\nu-2 \leqslant m < 2^{\nu+1}-2, \\ 2^\nu-2 \leqslant n < 2^{\nu+1}-2, \end{cases} \quad \nu=1, 2,...., \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si trova facilmente

$$s_{mn}=\begin{cases} \dfrac{[1+(-1)^m][1+(-1)^n]}{4\cdot 2^\nu} & \text{se } \begin{cases} 2^\nu-2 \leqslant m < 2^{\nu+1}-2, \\ 2^\nu-2 \leqslant n < 2^{\nu+1}-2, \end{cases} \quad \nu=1, 2,...., \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{\substack{m \\ n}\}\to+\infty} s_{mn}=\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} s_{mn}=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} s_{mn}=0.$$

La serie $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ converge in senso ordinario, per righe e per colonne.

Dimostriamo che essa non converge per diagonali. Si ha infatti

$$\sum_{m+n=h} a_{mn}=-1 \quad \text{per ogni} \quad h=2(2^\nu-2)+2^\nu-1, \qquad \nu=1, 2,....,$$

ciò che esclude la convergenza della serie

$$\sum_{h=0}^{\infty}\Big(\sum_{m+n=h} a_{mn}\Big).$$

§ 4.

OSSERVAZIONE. - È facile dimostrare che, *nelle condizioni del teorema* VII, *la serie di potenze*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \qquad (x, y \text{ complessi})$$

converge uniformemente in ogni regione del tipo

$$\tag{11} \begin{array}{cc} R(1-x) \geqslant |1-x| \cos\theta, & R(1-y) \geqslant |1-y| \cos\theta, \\ |1-x| \leqslant 2h\cos\theta, & |1-y| \leqslant 2h\cos\theta, \\ 0 < h < 1, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

La proposizione VII è poi un caso particolare della seguente più generale proposizione:

VIII) *Se la serie* (2) *converge secondo Stolz e Pringsheim ad una somma S, se esiste una costante k tale che, per ogni $m, n \geqslant 0$, si abbia*

$$|s_{mn}| < k,$$

allora la (2) *è sommabile P e la sua somma generalizzata coincide con S.*

Tuttavia nelle più generali condizioni del teorema VIII la serie $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$ **non** è necessariamente uniformemente convergente in ogni regione (11).

Ciò accade ad esempio per la serie

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}, \qquad a_{mn} = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } m=0, \\ (-1)^{n+1} & \text{se } m=1, \\ 0 & \text{se } m>1, \end{cases} \tag{12}$$

la quale converge in senso ordinario ed è sommabile $(C, 1, 1)$ con somma $S=0$ Si ha infatti

$$S(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = \frac{1-x}{1+y}, \qquad \lim_{\substack{x \\ y}\Big\}\to 1-0 \atop x,\, y \text{ reali}} S(x, y) = 0,$$

$$S_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} a_{mn} x^m y^n = \frac{1-x}{1+y}[1-(-1)^{\nu+1} y^{\nu+1}], \qquad (\mu>0),$$

e quindi

$$S(x, y) - S_{\mu\nu}(x, y) = (-1)^{\nu+1} \frac{1-x}{1+y} y^{\nu+1}.$$

Queste formule mostrano che la (12) è sommabile P ma la serie $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$ **non** converge uniformemente in alcuna regione (11).

La dimostrazione della proposizione VIII può ottenersi, con ovvie modifiche, da quella fatta per la proposizione VII.