ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

SALVATORE CHERUBINO

# Un teorema sulle corrispondenze algebriche tra due curve

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 11, nº 1-2 (1942), p. 99-103

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_1-2_99_0>

# UN TEOREMA SULLE CORRISPONDENZE ALGEBRICHE TRA DUE CURVE

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa).

Le proprietà delle corrispondenze algebriche fra curve dipendono in modo essenziale dalle matrici $T$ e $T^*$ degli interi caratteristici di HURWITZ. In particolare, le più notevoli di queste proprietà si rispecchiano in quelle del loro prodotto.

Le matrici predette, sulle quali i lavori di ROSATI indagarono per più di un decennio, sono state riconsiderate con più profonda analisi, valendosi del contributo fornito dal calcolo e dal simbolismo delle matrici, nelle mie recenti ricerche (1) conducendo a vari risultati nuovi. Specialmente notevoli credo siano quelli relativi alle condizioni di equivalenza birazionale di due curve algebriche.

In questa Nota presento una nuova proprietà del prodotto $T^*T$ dalla quale, tenendo presente un altro mio risultato, deduco immediatamente quel teorema di R. TORELLI dal quale questo A. derivò le ben note condizioni trascendenti per l'identità birazionale di due curve algebriche (2).

1. - Cominciamo col dimostrare il seguente

LEMMA. - *Siano $A$ e $B$ le matrici discriminanti di due forme hermitiane (in particolare quadratiche) su $n$ variabili, di cui quella di matrice $A$ è definita. Detta $a$ una radice della equazione in $\varrho$:*

(1)
$$|B-\varrho A|=0$$

*ed $n-h$ la sua molteplicità, la caratteristica della matrice $B-aA$ è necessariamente eguale ad $h$; e viceversa.*

Essendo $A$ antisimmetrica (cioè coincidente con $\overline{A}_{-1}$, coniugata della trasposta)

(1) Contenute principalmente nelle tre note che qui appresso verranno richiamate:

a) *Identità birazionale di due curve algebriche.* [Sem. Roma, 1939-XVII];

b) *Sul criterio di equivalenza.* [Rend. Pal., t. 62 (1938-39 - XVII)];

c) *Funzioni intermediarie e corrispondenze algebriche.* [Atti Acc. d'Italia, 1942-XX].

(2) Il teorema di TORELLI viene con ciò ricondotto a uno di A. COMESSATTI: *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di Jacobi* [Atti, Torino, v. 50 (1914-15)] espresso nella forma datagli nella mia Nota cit. (1) a).

la sua forma canonica è diagonale e raggiungibile con una matrice unitaria (3) (in particolare ortogonale, se $A$ è reale). Cioè, detta $E$ questa forma canonica diagonale, esiste una matrice $U$, di ordine $n$, soddisfacente alla condizione $U\bar{U}_{-1}=I$, con $I$ matrice identica, tale che

$$UA\bar{U}_{-1}=E.$$

Se si pone $B'=UB\bar{U}_{-1}$ risulta, qualunque sia $\varrho$,

$$B'-\varrho E=U(B-\varrho A)\bar{U}_{-1}$$

e si ricava che

$$(1^*) \qquad |B-\varrho A|=|B'-\varrho E|=(-1)^n(\varrho^n-\tau_1\varrho^{n-1}+\tau_2\varrho^{n-2}-\dots\pm\tau_n),$$

dove $\tau_k$ è la somma dei determinanti delle $\binom{n}{k}$ matrici di ordine $n$ di cui $k$ colonne coincidono con quelle degli stessi posti in $B'$ e le rimanenti $n-k$ con quelle occupanti i posti corrispondenti in $E$.

Poichè $E$ è diagonale ed i suoi elementi principali sono le radici caratteristiche di $A$, ciascuno dei determinanti ora nominati è prodotto di $n-k$ radici caratteristiche di $A$ per il determinante di un minore principale della matrice hermitiana (o reale e simmetrica) $B'=UB\bar{U}_{-1}$. Dunque $\tau_k$ è somma dei determinanti di tutti i minori principali di ordine $k$ in $B'$ ciascuno moltiplicato per le $n-k$ radici caratteristiche di $A$ che restano nella diagonale principale di $E$ quando si sopprimono le righe e colonne occupanti gli stessi posti che, in $B'$, concorrono a formare quel minore principale.

Teniamo ora presente (4) che, essendo $A$ matrice discriminante di una forma definita, le radici della (1) sono tutte reali. Di qui, ricordando che le radici caratteristiche di una matrice antisimmetrica (in particolare reale e simmetrica) sono anch'esse reali, si ha che $B'-aE$ è ancora antisimmetrica. Poichè essa è degenere, dicendone $h$ la caratteristica, $B'-aE$ ammette almeno un minore principale di ordine $h$ non degenere e se ne ammette più di uno essi avranno determinanti tutti dello stesso segno (5).

Ciò posto, consideriamo l'equazione

$$|(B'-aE)-xE|=0.$$

(3) S. CHERUBINO: *Sulle matrici permutabili o diagonalizzabili* [Atti Acc. Peloritana, 37 (Messina, 1935-XIII)] n. 4 *b*) e principio di detto n. 4.

(4) S. CHERUBINO: *Su certe equazioni fondamentali e sul simbolismo delle matrici.* [Sem. Matem. Roma, 1936-XII] n. 4, 2). In questa Nota, ai nn. 4, 5 e 6, si è implicitamente supposto che $\mu$ sia di caratteristica $n$, quindi $n\leq m$. Qui si ha $\mu=\mathrm{I}$.

(5) Ibidem, n. 8. Nelle ultime righe di questo n. 8, invece di « Paragonando le trasposte,.... » leggi: « Si ha pure $b=\pm\bar{c}_{-1}\mu$, quindi $b=\pm\bar{\mu}_{-1}\bar{a}_{-1}\mu=\bar{\mu}_{-1}a\mu$, che dimostra l'asserto ».

Sviluppando, si ha

$$(2) \qquad |(B'-aE)-xE| = (-1)^n (x^n - \tau_1' x^{n-1} + \tau_2' x^{n-2} - \dots \pm \tau_n') = 0,$$

con $\tau_k'$ somma dei determinanti dei minori principali di ordine $k$ di $B'-aE$ ciascuno moltiplicato per $n-k$ radici caratteristiche di $A$. Queste ultime, poichè $A$ dà una forma definita, sono tutte diverse da zero e dello stesso segno, cosicchè ognuno dei prodotti ora indicati, la cui somma eguaglia $\tau_k'$, è sempre del segno del determinante del corrispondente minore principale di $B'-aE$, oppure sempre di segno contrario (6). Se dunque $h$ è la caratteristica di $B'-aE$, per la osservazione ricordata, risulta

$$\tau'_h \neq 0, \qquad \tau'_{h+1} = \tau'_{h+2} = \dots = \tau'_n = 0,$$

e la equazione (2) possiede la radice $x=0$ precisamente con la molteplicità $n-h$. Viceversa, se ciò accade, valgono le relazioni precedenti e la caratteristica di $B'-aE$ è $h$.

Scrivendo

$$(B'-aE)-xE = B'-(x+a)E$$

si vede che la (2) coincide con la equazione ottenuta da (1) diminuendo le sue radici di $a$ e si deduce che, se $n-h$ è la moltiplicità della radice $a$ per la (1), la caratteristica di $B'-aE$ è $h$; e viceversa (7).

Di qui, poichè $B'-aE$ e $B-aA$ sono simili (8), quindi hanno la stessa caratteristica, si conclude col lemma che si voleva dimostrare.

2. - Consideriamo due curve algebriche $C$ e $D$ dei generi $p$ e $q$ (entrambi $\geqq 1$). Siano

$$\omega = (I \,|\, \tau), \qquad \Omega = (I' \,|\, \sigma)$$

le matrici dei loro periodi normali e

$$\pi\omega = \Omega T_{-1}, \qquad \pi^*\Omega = \omega T^*_{-1}$$

le relazioni di HURWITZ cui dà luogo una corrispondenza algebrica fra quelle curve

Sappiamo (9) che si ha

$$(T^*T)_{-1} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi\pi^* & 0 \\ 0 & \overline{\pi\pi^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}$$

(6) Quest'ultimo caso si ha allora e solo che $A$ dà una forma negativa e che $n-k$ è dispari.

(7) Come accade per le matrici reali e simmetriche (e per la stessa ragione). Cfr. le mie *Lezioni di Geometria Analitica con elementi di proiettiva.* [Roma, Soc. An. Ed. « Dante Alighieri », 1940-XVIII] n. 121, pag. 123 e n. 119, pagg. 120-121.

(8) Perchè $\overline{U}_{-1} = U^{-1}$, quindi $B' - aE = U(B-aA)U^{-1}$.

(9) Nota cit. (1) $b$, n. 2, relazioni $(1)_1$ e (10).

quindi, qualunque sia $\varrho$ :

$$(T^*T)_{-1} - \varrho I_{2q} = \left(\frac{\Omega}{\overline{\Omega}}\right)^{-1} \left[\left(\begin{array}{c|c} \pi\pi^* & 0 \\ \hline 0 & \overline{\pi\pi^*} \end{array}\right) - \varrho I_{2q}\right] \cdot \left(\frac{\Omega}{\overline{\Omega}}\right). \tag{3}$$

Inoltre, indicando con $i\tau''$ ed $i\sigma''$ $(i=\sqrt{-1})$ le parti immaginarie delle matrici $\tau$ e $\sigma$, e ponendo

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \sigma'' & 0 \\ \hline 0 & \sigma'' \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} \pi\tau''\overline{\pi}_{-1} & 0 \\ \hline 0 & \overline{\pi}\tau''\pi_{-1} \end{array}\right)$$

si ha ([10]) :

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} \pi\pi^* & 0 \\ \hline 0 & \overline{\pi\pi^*} \end{array}\right) - \varrho I_{2q}\right] \cdot A = B - \varrho A. \tag{4}$$

Essendo $A$ non degenere, le (3) - (4) assicurano che, qualunque sia $\varrho$, le due matrici $T^*T - \varrho I_{2q}$ e $B - \varrho A$ hanno la stessa caratteristica e che il polinomio caratteristico di $T^*T$ differisce da $|B - \varrho A|$ per un fattore costante diverso da zero.

Poichè la $A$ è matrice discriminante di una forma definita, può applicarsi il lemma del n. prec. e si deduce che :

*a*) *se* $a$ *è radice caratteristica di* $T^*T$, *la sua molteplicità coincide con la nullità* ([11]) *di* $T^*T - aI_{2q}$.

Come è noto ([12]), questa è la condizione necessaria e sufficiente perchè $T^*T$ sia regolare, cioè abbia forma canonica diagonale. Dunque :

*b*) *il prodotto* $T^*T$ *delle matrici degli interi caratteristici di una corrispondenza algebrica fra due curve di generi* $\geqq 1$ *è sempre* (*regolare cioè*) *di forma canonica diagonale.*

3. - I due generi di $C$ e $D$ siano eguali e maggiori di 1 e la corrispondenza considerata sia non speciale. Ricordiamo ([13]) che in tal caso le radici caratteristiche del prodotto $T^*T$ coincidono, in generale ([14]), coi divisori elementari della matrice alternata intera $T_{-1}\, I_0\, T$, ciascuno contato due volte. Ciò vuol dire che può porsi :

$$T^*T = HEH^{-1}, \tag{5}$$

---

([10]) Ibidem, relazione (8).

([11]) La nullità è la differenza fra l'ordine e la caratteristica di una matrice.

([12]) Se ciò accade, e solo allora, l'*indice* di $a$ è uno, cioè la segnatura di $T^*T$ rispetto ad $a$ è costituita da un solo intero (eguale alla nullità stessa).

([13]) Nota cit. ([1]) *c*), n. 3 *b*).

([14]) Qui in generale vuol dire che, sulla varietà di JACOBI di una delle due curve, i gruppi di $p$ varietà intermediarie considerate nel teorema sopra indicato hanno sempre a comune un numero finito di punti. Vedi la nota or ora citata.

ove ora $E$ è una matrice diagonale, di ordine $2p$, i cui elementi principali sono certi $p$ interi positivi $e_1$, $e_2$,...., $e_p$ ciascuno ripetuto due volte.

Da questa (5) si ha che la traccia di $T^*T$ è eguale a quella di $E$, ossia a $2(e_1+e_2+....+e_p)$.

Perciò, se questa traccia vale $2p$, si ha necessariamente $e_1=e_2=....=e_p=1$ ed $E$ diventa l'identità, insieme a $T^*T$.

Il che basta perchè $C$ e $D$ siano fra loro birazionalmente equivalenti ([15]).

Resta così dimostrato il seguente teorema di R. TORELLI ([16]):

*Se la traccia del prodotto $T^*T$ vale $2p$, le due curve $C$ e $D$, di egual genere $p>1$, sono, in generale, birazionalmente equivalenti.*

---

([15]) Nota cit. ([1]) *a*), § 2, n. 5.

([16]) Rend. Lincei, 1913 e 1915.