D. A. KAPPOS

Das Dirichletsche Problem für Gebiete mit mehrfachen Randpunkten

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 1-2 (1942), p. 43-63

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_1-2_43_0>

DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM FÜR GEBIETE MIT MEHRFACHEN RANDPUNKTEN

von D. A. KAPPOS (Athen).

Einleitung.

Um das Dirichletsche Problem für Gebiete mit mehrfachen Randpunkten zu untersuchen, betrachtet Perkins (1) den Rand R eines Gebietes G als eine Menge R_γ von Randelementen. Einem n fachen erreichbaren Randpunkt entsprechen n verschiedene Randelemente. Er definiert auf R_γ eine Elementen funktion $f(\gamma)$ und untersucht das folgende, von ihm genannte, pseudoklassische Dirichletsche Problem. Gegeben sei eine gleichmässig pseudostetige und beschränkte Funktion $f(\gamma)$ auf R_γ, gesucht wird eine auf G eindeutige und harmonische Funktion, die die Randwerte $f(\gamma)$ gleichmässig pseudostetig approximiert. Eine solche Funktion $u(P)$ nennt er die Lösung des pseudoklassischen Dirichletschen Problems. Er beweist dann: dadurch, dass sein Problem für ein Gebiet G eine Lösung hat, ist es notwendig und hinreichend, dass auch das klassische Diricletsche Problem für dieses Gebiet eine Lösung hat.

Im folgenden betrachten wir die Menge der Randelemente R_γ und die Punkte von G als Elemente eines Raumes $M = R_\gamma + G$; dann führen wir den Begriff der Entfernung $e^*(\alpha, \beta)$ zweier Elemente α und β von M ein und beweisen, dass M ein metrischer Raum ist. Dadurch erreichen wir, dass wir das von Perkins gestellte Problem mit Mitteln untersuchen können, die uns die Theorie der metrischen Räume bietet, ohne Benutzung neuer Definitionen. Dann ist der Satz 9 von Perkins ein bekannter, von Tietze (2) zuerst bewiesener Satz, der auch für einfach stetige Funktionen $f(\gamma)$ gilt. Wir heben weiter die Bedingung, dass die gegebene Funktion $f(\gamma)$ des Problems gleichmässig ist, auf, und in einer Methode, ähnlich wie in der klassischen Theorie benutzt, bringen wir erweiterte Resultate.

---

(1) F. W. PERKINS: *The Dirichlet Problem for domains with multiple boundary points.* Transactions of the American Math. Society, Vol. 38 (1935), S. 106.

(2) H. HAHN: *Theorie der reellen Funktionen.* Berlin, 1921, S. 137; auch H. TIETZE J. f. Math. 145 (1914), S. 9.

I. KAPITEL

Enden und Randelementen.

§ 1. - Mit G bezeichnen wir ein *beschränktes Gebiet* in der Ebene oder im Raume ([3]) und mit R seinen Rand. Wir setzen $\bar{G}=R+G$. Die Teilmenge des Randes, die aus Punkten besteht, die Häufungspunkte von äusseren Punkten des Gebietes G sind, bildet eine abgeschlossene Punktmenge, die wir den *äusseren Rand* von G nennen.

Nehmen wir jetzt irgend eine Teilmenge A von $\bar{G}$ an, die nicht identisch mit G ist, dann bilden die Randpunkte von A, die nicht zu R gehören, mit ihren Häufungspunkten eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge, die wir den *Hilfsrand von A in G* nennen.

Wir werden ein beschränktes Gebiet g ein *Teilgebiet von* G nennen, wenn 1. g eine Teilmenge und nicht identisch mit G ist, 2. der Rand r von g mindestens einen Punkt von R enthält und 3. der Hilfsrand von g in G aus lauter äusseren Randpunkten von g besteht (*d. h.* er ist eine Teilmenge des äusseren Randes von g).

Wir schreiben $\bar{g}=g+r$ und nennen $\bar{g}$ ein abgeschlossenes Teilgebiet von $\bar{G}$.

§ 2. - Wir nehmen jetzt eine Teilfolge von abgeschlossenen Teilgebieten von $\bar{G}$:

$$\bar{g}_1,\quad \bar{g}_2,\dots,\quad \bar{g}_n,\dots, \tag{2.1}$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

1) Sie ist monoton abnehmend, also $\bar{g}_{i+1}\subset\bar{g}_i$.

2) Die Hilfsränder von verschiedenen $\bar{g}_i$ sind punktfremd.

Eine solche Folge nennen wir eine Kette von Teilgebieten $\bar{g}_1, \bar{g}_2,\dots$ von $\bar{G}$. Es ist klar, dass jede unendliche Teifolge von (2.1) auch eine Kette von Teilgebieten von $\bar{G}$ ist.

§ 3. - Jeder Kette von Teilgebieten

$$\bar{g}_1,\quad \bar{g}_2,\dots \tag{3.1}$$

von G soll jetzt ein Begriff zugeordnet werden, den wir das Ende $\Gamma:\{\bar{g}_1, \bar{g}_2,\dots\}$ von $\bar{G}$ nennen wollen, und der durch folgende Forderungen axiomatisch definiert wird.

I. Die Ketten von Teilgebieten

$$\bar{g}_{11},\quad \bar{g}_{12},\quad \bar{g}_{13},\dots \tag{3.2}$$

([3]) Wir führen sämtliche Betrachtungen für ein räumliches Gebiet durch, falls das Gegenteil nicht hervorgehoben ist; sie gelten aber auch im Falle eines ebenen Gebietes.

und

$$\bar{g}_{21}, \quad \bar{g}_{22}, \quad \bar{g}_{23} \dots \tag{3.3}$$

definieren identische Enden dann und nur dann, wenn jedem positiven Index n ein Paar positive Indizes j und k entspricht, derart, dass $\bar{g}_{1j} \subseteq \bar{g}_{2n}$ und $\bar{g}_{2k} \subseteq \bar{g}_{1n}$ gelten.

Aus dieser Forderung folgt, dass jede unendliche Teilfolge von (3.1) dasselbe Ende Γ von $\bar{G}$ bestimmt.

II. Ist A ein beliebiges Gebiet (das nicht notwendig ein Teilgebiet von G ist), dann ist ein Ende Γ: $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots\}$ von $\bar{G}$ in A enthalten, dann und nur dann, wenn ein positiver Index j existiert, derart, dass

$$\bar{g}_j \subseteq A \tag{3.4}$$

gilt. Aus der Definition der Kette folgt, dass (3.4) für alle $i \geqq j$ auch gilt.

III. Das Ende Γ_1 : $\{\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{13}, \dots\}$ von $\bar{G}$ ist im Ende Γ_2 : $\{\bar{g}_{21}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{23}, \dots\}$ von $\bar{G}$ enthalten, dann und nur dann, wenn nach der Forderung II Γ_1 in jedem $\bar{g}_{2i}$, $i=1, 2, 3, \dots$, enthalten ist.

IV. Von einem Punkt Q sagen wir, dass er im Ende Γ: $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \dots\}$ von $\bar{G}$ enthalten ist, wenn er in jedem $\bar{g}_i$ enthalten ist. Jetzt lässt sich leicht beweisen, dass ein Ende Γ: $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \dots\}$ von $\bar{G}$ mindestens einen Punkt von R enthält.

Aus der Definition der Kette folgt nämlich $R\bar{g}_1 \supset R\bar{g}_2 \supset R\bar{g}_3 \supset \dots$ da aber $R\bar{g}_1$ beschränkt ist und alle $R\bar{g}_i$, $i=1, 2, 3, \dots$, abgeschlossen sind, ist $R\bar{g}_1\,\bar{g}_2\,\bar{g}_3 \dots$ nicht leer. Es existiert also ein Punkt, der zu R und zu allen $\bar{g}_i$ gehört.

§ 4. - Wir betrachten jetzt ein Gebiet G_∞ das den unendlich fernen Punkt enthält, dessen Rand, also R_∞ innerhalb einer Kugel liegt. Es kann auch vorkommen, dass G_∞ keinen äusseren Rand besitzt *d. h.* mit seinem Rand den ganzen Raum ausfüllt. Wir werden den Begriff der Enden von solchen Gebieten G_∞ einführen. Wir wählen eine Kugel K, die R_∞ in ihrem Innern enthält. Dann ist die Punktmenge G_1, die aus allen inneren Punkten von K besteht, die gleichzeitig innere Punkte von G_∞ sind, ein beschränktes Gebiet. Wir denken uns jetzt alle Enden von $\bar{G}_1$, in welchen Punkte von R_∞, aber keine anderen Punkte des Randes von G_1 (*d. h.* keine Punkte der Kugeloberfläche) enthalten sind. Alle diese Enden definieren wir als die Enden von $\bar{G}_\infty$ in Bezug auf die Kugel K.

Man sieht leicht, dass die Enden von $\bar{G}_\infty$ in Bezug auf die Kugel K Enden von $\bar{G}_\infty$ in Bezug auf jede Kugel, die K enthält, sind. Das gilt aber nicht immer für Kugeln, die in K enthalten sind.

§ 5. - *Randelemente.* Fordert man jetzt von einer Kette von Teilgebieten: $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n, \dots$ von $\bar{G}$, die ein Ende von $\bar{G}$ definiert, dass die Durchmesser ihrer Gebiete mit $n \to +\infty$ gegen 0 streben, so nennt man ein solches Ende ein Randelement γ: $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots\}$ von $\bar{G}$.

Für die so definierten Randelemente hat Perkins (4) folgende Sätze bewiesen:

I. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Ende Γ von $\overline{G}$ ein Randelement sei, ist, dass Γ nur einen Punkt vom Rand R und keinen anderen Punkt enthält.

II. Enthält ein Randelement γ_1 das Randelement γ_2, so sind γ_1 und γ_2 identisch.

III. Jeder erreichbare Randpunkt ist mindestens in einem Randelement enthalten und umgekehrt ist jeder Randpunkt, der in einem Randelement enthalten ist, erreichbar.

Wir betrachten jetzt irgend ein Randelement γ: $\{\overline{g}_1, \overline{g}_2, ...\}$ von $\overline{G}_\infty$ (§ 4) in Bezug auf die Kugel K und eine offene Kugel K' derart, dass $R \subset K' \subset K$ gilt, dann ist $G_\infty \cdot K' = G_1'$ ein Gebiet. Aus der Definition eines Randelementes folgt, dass eine unendliche Teilkette von $\overline{g}_1, \overline{g}_2, ...$ existiert, die eine Kette von Teilgebieten von $\overline{G}_1'$ ist, die also ein Randelement von $\overline{G}_\infty$ in Bezug auf die Kugel K' definiert.

Satz: Im Gegensatz zu den Enden, hängen die Randelemente von $\overline{G}_\infty$ nicht von der Wahl der Kugel K ab.

§ 6. - *Der metrische Raum M.* Wir bezeichnen mit R_γ die Menge aller Randelemente von $\overline{G}$ (5) und mit M die Menge, die als Elemente erstens alle Randelemente R_γ und zweitens alle Punkte von G besitzt. Es is also $M = R_\gamma + G$.

1. Wir bezeichnen mit $s(P, P')$ irgend ein stetiges Kurvenstück, das die Punkte P und P' von G verbindet und mit $L\, s(P, P')$ seine Länge.

2. Wir sagen, ein stetiges Kurvenstück $s(\gamma, P)$ verbinde das Element $\gamma \varepsilon R_\gamma$ mit dem Punkt $P \varepsilon G$, wenn es ein Kurvenstück ist, das den Punkt $Q \subset \gamma$ mit dem Punkt P von G verbindet und ausserdem, wenn der Durchschnitt $g_i s(\gamma, P) \neq 0$ ($\neq 0$ nicht leer), $i = 1, 2, 3, ...$, ist für irgend eine Kette von Teilgebieten $\overline{g}_1, \overline{g}_2, ...$ von $\overline{G}$, die γ definiert.

Es lässt sich leicht beweisen, dass wenn $g_i s(\gamma, P) \neq 0$, $(i = 1, 2, ...)$, gilt für eine Kette von Teilgebieten $\overline{g}_1, \overline{g}_2, ...$ von $\overline{G}$, die γ definiert, so gilt auch $g_i' s(\gamma, P) \neq 0$ $(i = 1, 2, ...)$ für jede andere Kette $\overline{g}_1', \overline{g}_2', ...$ von Teilgebieten von $\overline{G}$, die dasselbe Element γ definiert.

3. Schliesslich sagen wir, ein stetiges Kurvenstück $s(\gamma, \gamma')$ verbinde zwei Elemente γ und γ' von R_γ, wenn $s(\gamma, \gamma')$ ein Kurvenstück ist, das den Punkt $Q \subset \gamma$ mit dem Punkte $Q' \subset \gamma'$ verbindet und ausserdem wenn 1) der Durchschnitt $g_i\, s(\gamma, \gamma') \neq 0$ $(i = 1, 2, ...)$ ist für irgend eine Kette von Teilgebieten $\overline{g}_1, \overline{g}_2, ...$ von $\overline{G}$, die γ definiert und 2) der Durchschnitt $g_i' s(\gamma, \gamma') \neq 0$, $i = 1, 2, ...$, ist für irgend eine Kette von Teilgebieten $\overline{g}_1', \overline{g}_2' ....$ von $\overline{G}$, die γ' definiert.

---

(4) PERKINS: l. c. S.llo - 112.

(5) G ist ein Gebiet, dessen Rand R innerhalb einer Kugel liegt, Es kann also den unendlich fernen Punkt auch enthalten.

Hier auch gilt der Satz: Wenn $g_i s(\gamma, \gamma') \neq 0$, $i=1, 2, \ldots$, ist für eine Kette von Teilgebieten $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots$ von $\bar{G}$, die γ definiert, dann ist ebenfalls $g_i'' s(\gamma, \gamma'') \neq 0$, $i=1.\ 2, \ldots$, für jede andere Kette von Teilgebieten $\bar{g}_1''$, $\bar{g}_2''$,.... von $\bar{G}$, die dasselbe Element γ definiert.

Sind jetzt α und β zwei beliebige Elemente von M, dann gibt es stetige Kurvenstücke $s(\alpha, \beta)$, die aus lauter Punkten von G bestehen, ausser einem oder beiden Endpunkten, falls eines oder beide Elemente im R_γ liegen. Die Menge aller dieser stetigen Kurvenstücke bezeichnen wir mit $[s(\alpha, \beta)]$. Jedem stetigen Kurvenstück $s(\alpha, \beta)$ kann man bekanntlich eine Länge, also eine nicht negative Zahl oder $+\infty$, $Ls(\alpha, \beta)$ zuordnen. Wir bezeichnen mit $[Ls(\alpha, \beta)]$ alle Zahlen $Ls(\alpha, \beta)$, die allen $s(\alpha, \beta)$ von $[s(\alpha, \beta)]$ zugeordnet sind.

Nun ordnen wir jeder Zahl $Ls(\alpha, \beta)$ von $[Ls(\alpha, \beta)]$ eine Zahl $L^* s(\alpha, \beta)$ zu, durch

$$L^* = \begin{cases} \dfrac{L}{1+L} & \text{wenn} \quad 0 \leqq L < +\infty \\ 1 & \text{wenn} \quad L = +\infty \end{cases} \tag{6.1}$$

Damit haben wir

$$0 \leqq L^* \leqq 1. \tag{6.2}$$

Die Transformation (6.1) ist bekanntlich eindeutig umkehrbar, *d. h.*

$$L = \begin{cases} \dfrac{L^*}{1-L^*} & 0 \leqq L^* < 1. \\ +\infty & L^* = 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

Wegen (6.2) führt die Transformation (6.1) die Menge $[Ls(\alpha, \beta)]$ in eine beschränkte Menge $[L^* s(\alpha, \beta)]$ über und umgekehrt, die Transformation (6.3) die Menge $[L^* s(\alpha, \beta)]$ in die Menge $[Ls(\alpha, \beta)]$ über.

Setzen wir jetzt:

$$e(\alpha, \beta) = e(\beta, \alpha) = \mathrm{g}\{Ls(\alpha, \beta);\ s(\alpha, \beta)\ \varepsilon\ [s(\alpha, \beta)]\}$$

dann geht durch (6.1) $e(\alpha, \beta)$ über in

$$e^*(\alpha, \beta) = e^*(\beta, \alpha) = \mathrm{g}\{L^* s(\alpha, \beta);\ s(\alpha, \beta)\ \varepsilon\ [s(\alpha, \beta)]\} \quad (^6)$$

Wir bemerken nun, dass $e(\alpha, \beta)$ folgende Eigenschaften besitzt:

A. $e(\alpha, \beta) = e(\beta, \alpha)$

B. $e(\alpha, \beta) \geqq 0$ und zwar $=0$ dann und nur dann, wenn α identisch mit β ist.

C. Für je drei Elemente α, β, γ von M gilt die Dreiecksungleichung: $e(\alpha, \gamma) \leqq e(\alpha, \beta) + e(\beta, \gamma)$.

Die Transformation (6.1) und ihre Inverse sind aber monoton. *d. h.* ist $L_1 > L_2$

---

(6) Hahn, H.: *Theorie der reellen Funktionen,* Berlin, 1921, Satz I, S-115.

(bzw. $L_1 = L_2$), so ist $L_1^* > L_2^*$ (bzw. $L_1^* = L_2^*$) und umgekehrt. $e^*(\alpha, \beta)$ besitzt also dieselben Eigenschaften

A*. $e^*(\alpha, \beta) = e^*(\beta, \alpha)$

B*. $e^*(\alpha, \beta) \geqq 0$ und zwar $= 0$ dann und nur dann, wenn $\alpha \equiv \beta$.

C*. $e^*(\alpha, \gamma) \leqq e^*(\alpha, \beta) + e^*(\beta, \gamma)$.

Beweis für C*:

Wir haben

$$\frac{e(\alpha, \beta)}{1 + e(\alpha, \beta) + e(\beta, \gamma)} + \frac{e(\beta, \gamma)}{1 + e(\alpha, \beta) + e(\beta, \gamma)} \leqq \frac{e(\alpha, \beta)}{1 + e(\alpha, \beta)} + \frac{e(\beta, \gamma)}{1 + e(\beta, \gamma)}. \tag{6.8}$$

Es gilt aber:

$$\frac{e(\alpha, \gamma)}{1 + e(\alpha, \gamma)} \leqq \frac{e(\alpha, \beta)}{1 + e(\alpha, \beta) + e(\beta, \gamma)} + \frac{e(\beta, \gamma)}{1 + e(\alpha, \beta) + e(\beta, \gamma)}, \tag{6.9}$$

da folgende Relation aus (6.9) folgt:

$$e(\alpha, \gamma) + e(\alpha, \gamma)\, e(\alpha, \beta) + e(\alpha, \gamma)\, e(\beta, \gamma) \leqq$$
$$\leqq e(\alpha, \beta) + e(\alpha, \beta)\, e(\alpha, \gamma) + e(\beta, \gamma) + e(\alpha, \gamma)\, e(\beta, \gamma)$$

oder: $e(\alpha, \gamma) \leqq e(\alpha, \beta) + e(\beta, \gamma)$, die bekanntlich gilt.

Aus (6.9) erhalten wir

$$\frac{e(\alpha, \gamma)}{1 + e(\alpha, \gamma)} \leqq \frac{e(\alpha, \beta)}{1 + e(\alpha, \beta)} + \frac{e(\beta, \gamma)}{1 + e(\beta, \gamma)}$$

also

$$e^*(\alpha, \gamma) \leqq e^*(\alpha, \beta) + e^*(\beta, \gamma).$$

Nun können wir jedem Paare von Elementen α, β der Menge M eine Zahl $e^*(\alpha, \beta)$ zuordnen, die endlich ist und die Eingenschaften A*, B*, C* besitzt:

Satz: M stellt einen metrischen Raum mit der metrischen Entfernung $e^*(\alpha, \beta)$ dar.

§ 7. - Die Menge R_γ ist abgeschlossen in M, da sie jeden ihrer zu M gehörigen Häufungspunkte enthält. Ihr Komplement G ist offen in M. M und R_γ sind aber im eingeführten metrischen Sinn nicht immer kompakt, wenn wir auch G im Euklidischen Sinn beschränkt also kompakt vorraussetzen.

Man kann im Raum von 2 und 3 Dimensionen im Euklidischen Sinne beschränkte Gebiete G bilden, die zu einem metrischen Raum M führen, der nicht kompakt ist.

Nehmen wir z. Z. aus dem Innern des Rechtecks

$$-3 \leqq x \leqq 3, \qquad 0 \leqq y \leqq 1$$

die Punkte weg:

$$(2) \quad \begin{cases} y=\dfrac{1}{\sqrt{2n}} & -3<x\leqq -\frac{5}{2}; \qquad -\frac{3}{2}\leqq x<3, \qquad (n=1,2,....) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} & -3<x\leqq \frac{3}{2}; \qquad +\frac{5}{2}\leqq x<3, \qquad (n=1,2,....) \end{cases}$$

dann bilden die übriggebliebenen inneren Punkte des Rechtecks ein beschränktes Gebiet G in der Ebene, dessen Rand R aus dem Rand des Rechtecks und aus der Punktmenge (2) besteht. $\overline{G}=R+G$ ist eine beschränkte Punktmenge. Jeder Randpunkt aber, für welchen $y=0$ ist, ist in keinem Randelement enthalten. Bilden wir jetzt den metrischen Raum M, dann sehen wir, dass wir Punktfolgen von inneren Punkten von G, also von Elementen von M finden können, die nicht konvergieren, da die metrische Entfernung zwischen je zwei beliebigen von diesen Elementen grösser ist, als eine konstante, positive Zahl.

Die Entfernung $e^*(P, R_\gamma)$ eines Elementes $\alpha=P\,\varepsilon\,G$ von R_γ ist bekanntlich definiert $=\mathrm{g}\{e^*(P,\gamma)\,;\ \gamma\,\varepsilon\,R_\gamma\}$.

Nun sei $E(Q, P)$ die Euklidische Entfernung der beiden Punkte Q und P und $E(R, P)$ die Euklidische Entfernung des Punktes $P\,\varepsilon\,G$ vom Rand R; sie gehen durch die Transformation dor Form (6.1) über in die Zahlen $E^*(Q, P)$ und $E^*(R, P)$. Jedem Punkt $P\,\varepsilon\,G$ kann bekanntlich eine abgeschlossene Teilmenge $R(P)$ von R eindeutig zugeordnet werden, sodass

$$E(R, P)=E(Q, P) \qquad Q\,\varepsilon\,R(P)$$

oder

$$E^*(R, P)=E^*(Q, P) \qquad Q\,\varepsilon\,R(P)$$

ist. Die Punktmenge $R(P)$ liegt auf der Oberfläche der offenen Kugel $K(P;\,E(R,P))$ und besteht aus lauter erreichbaren Punkten des Randes R.

Satz 1. - Jedem Punkt $Q\,\varepsilon\,R(P)$ ist ein und nur ein Randelement $\overline{\gamma}\,\varepsilon\,R_\gamma$ zugeordnet, das den folgenden Bedingungen genügt:

I. $\overline{\gamma}$ enthält den Punkt Q.

II. Ist $\overline{g}_1, \overline{g}_2,....$ irgend eine Kette von Teilgebieten von $\overline{G}$, die $\overline{\gamma}$ definiert, so ist der Durchschnitt

$$g_iK(P;\,E(R, P))\neq 0, \qquad (i=1, 2, 3,....)$$

Beweis: Wir nehmen auf dem Radius $\overline{PQ}$ die Punkte $P_1, P_2,....$ an, sodass $E(Q,P_n)=\dfrac{\text{Länge } \overline{QP}}{n}$, $n=1, 2,....$ gilt; dann ist der Durchschnitt $GK(Q;\,E(Q,P_n))$, $n=1, 2,....$, nicht leer, also eine offene Punktmenge; sie besteht demgemäss aus endlich oder abzählbar unendlich vielen paarweise fremden Gebieten. Unter diesen Gebieten existiert aber sicher ein g_n, das den Durchschnitt

$$(7.5) \qquad K(Q,\,E(Q;\,P_n))K(P;\,E(R, P))$$

enthält, da (7.5) ein Gebiet ist, das in $GK(Q, E(Q, P_n))$ enthalten ist. Jetzt bilden wir die Folge

$$\bar{g}_1, \quad \bar{g}_2, \ldots \tag{7.6}$$

von Teilgebieten von $\bar{G}$. Jedes $\bar{g}_n$ enthält den Radius $\overline{QP_n}$ und besitzt als Hilfsrand eine abgeschlossene Teilmenge der Kugel $\bar{K}(Q, E(Q, P_n)$. Die Folge (7.6) genügt also den Bedingungen I. und II. (§ 2) einer Kette von Teilgebieten von $\bar{G}$, und die Durchmesser ihrer Teilgebiete streben gegen 0, sie definiert also ein Element $\bar{\gamma}$ von R_γ. $\bar{\gamma}$ genügt den Bedingungen I. und II. unseres Satzes. Ist jetzt γ': $\{\bar{g}_1', \bar{g}_2', \ldots\}$ irgend ein anderes Randelement, das den Bedingungen I. und II. unseres Satzes genügt, dann enthält sicher die Kugel $K(Q, E(Q, P_n))$ also auch das Gebiet g_n, alle g_j', g_{j+1}',.... von einem Index j ab, γ' ist also identisch mit $\bar{\gamma}$. Unser Satz ist also bewiesen.

Wir bezeichnen mit $R_\gamma(P)$ die Teilmenge von R_γ, die der Menge $R(P)$ durch die Zuordnung des Satzes I. entspricht, und sagen, die Randelemente $\bar{\gamma} \varepsilon R_\gamma(P)$ seien auf der abgeschlossenen Kugel $\bar{K}(P; E(R, P)$ gelegen.

Nun bemerken wir, dass der Radius $\overline{PQ}$ ein stetiges Kurvenstück ist, das den Punkt P mit einem $\bar{\gamma} \varepsilon R_\gamma(P)$, $Q \varepsilon \bar{\gamma}$ verbindet; wir haben also: $L\overline{PQ} = \mathrm{g}\{Ls(P, \bar{\gamma})\,;\ s(P, \bar{\gamma}) \varepsilon [s(P, \bar{\gamma})]\} = e(P, \gamma)$ oder

$$L^*\overline{PQ} = e^*(P, \bar{\gamma}), \tag{7.7}$$

wenn $\bar{\gamma}$ auf $\bar{K}(P; E(R, P))$ gelegen ist. Ist jetzt γ' nicht auf $\bar{K}(P; E(R, P))$ gelegen, so haben wir $L\overline{PQ} = e(P, \bar{\gamma}) \leqq e(P, \gamma')$ also

$$e^*(P, \bar{\gamma}) \leqq e^*(P, \gamma') \tag{7.8}$$

wenn γ' nicht auf $\bar{K}(P; E(R, P))$ gelegen ist.

Aus der Definition von $e^*(P, R_\gamma)$ und den letzten Relationen (7.7) und (7.8) folgt also, dass

$$e^*(P, \bar{\gamma}) = e^*(P, R_\gamma) = \frac{E(P, R)}{1 + E(P, Q)} \qquad \bar{\gamma} \varepsilon R_\gamma(P)$$

gilt oder.

Satz 2. - Jedem Punkt P von G ist eindeutig eine abgeschlossene Menge von Randelementen $R_\gamma(P)$ zugeordnet, deren Elemente $\bar{\gamma}$ der Gleichung

$$e^*(P, \bar{\gamma}) = e^*(P, K_\gamma) = \frac{E(P, R)}{1 + E(P, Q)}$$

genügen und auf der Kugel $\bar{K}(P; E(R, P))$ gelegen sind.

§ 8. - Wir betrachten die Teilmenge von G, deren Punkte lauter rationale Koordinaten in irgend einem Kartesischen Koordinatensystem des Raumes besitzen. Diese Teilmenge ist bekanntlich abzählbar

$$\{P_1, P_2, \dots\}$$

und liegt offenbar metrisch überall dicht in G. Nun nehmen wir in jeder $R_\gamma(P_i)$, $i=1, 2, \dots$, ein Element γ_i. Die Gesamtheit dieser Elemente bildet eine abzählbare Teilmenge $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ von R_γ und man sieht leicht ein, dass $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ metrisch überall dicht in R_γ liegt.

Satz: Der metrische Raum M, wie auch die Menge der Randelemente R_γ sind separabel.

§ 9. - Nun definieren wir auf M, wie auch auf jeder Teilmenge von M Funktionen $f(\alpha)$ d. h. jedem Element $\alpha \varepsilon M_0 \subseteqq M$ ordnen wir eindeutig eine reelle Zahl $f(\alpha)$ zu. Eine solche Funktion ist bekanntlich $e^*(\alpha, \beta)$, wenn β konstant bleibt und α auf einer Menge $M_0 \subseteqq M$ variiert und zwar ist sie eine metrisch stetige Funktion von α auf $M_0 \subseteqq M$. $e^*(\alpha, R_\gamma)$ ist auch eine stetige Funktion von α auf $M_0 \subseteqq M$.

Satz: Ist jetzt eine Funktion $f(\gamma)$ gegeben, die auf R_γ definiert und stetig ist, dann kann man f auf G so definieren, dass man eine auf ganz M stetige [7] Funktion erhält [8].

Wir beweisen hier den Satz nach einer einfachen Methode, die Richard Rado [9] zuerst benutzt hat um einen ähnlichen Satz in Euklidischen Raum zu beweisen.

Wir betrachten eine abzählbare Teilmenge von R_γ

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \tag{9.1}$$

die überall dicht in R_γ liegt und setzen

$$\Phi(P, \gamma_i) = \operatorname{Max}\{0, 2\, e^*(R_\gamma, P) - e^*(P, \gamma_i)\} \quad i=1, 2, \dots \quad P \varepsilon G \tag{9.2}$$

dann hat $\Phi(P, \gamma_i)$ folgende Eigenschaften:

I. $\Phi(P, \gamma_i)$ ist eine stetige Funktion von $P \varepsilon G$ auf $G = M - R_\gamma$, da $e^*(P, R_\gamma)$, wie auch $e^*(P, \gamma_i)$ stetig sind.

II. $0 \leqq \Phi(P, \gamma_i) \leqq e^*(P, R_\gamma) \leqq 1$, sie ist also beschränkt in G.

Aus der Definition von $e^*(P, R_\gamma)$ entnehmen wir nämlich $e^*(P, R_\gamma) \leqq e^*(P, \gamma)$ für alle $\gamma \varepsilon R_\gamma$; also $2\, e^*(P, R_\gamma) - e^*(P, \gamma) \leqq e^*(P, R_\gamma) \leqq 1$.

---

(7) Unter « stetige » verstehen wir im « metrischen Sinne stetig » falls nichts anderes hervorgehoben wird.

(8) H. Hahn: l. c. S. 137 Satz VIII. Der Satz wurde allgemein zuerst von H. Tietze, J. f. Math. 145 (1914) für metrische Räume bewiesen.

(9) Richard Rado: *Ueber stetige Fortsetzung reeller Funktionen*, Sitz. Ber. d. Bayer. Ak. Mat. Nat. - Abteilung, 1931.

III. Für jeden $P \varepsilon G$ gibt es mindestens ein γ_i von (9.1), sodass $\Phi(P, \gamma_i) > 0$ ist. Nach dem Satz 2. § 7 haben wir in der Tat

$$e^*(P, R_\gamma) = e^*(P, \bar{\gamma}), \qquad \bar{\gamma} \varepsilon R_\gamma(P).$$

Ist nun $\bar{\gamma}$ in (9.1) enthalten, dann haben wir $2e^*(P, R_\gamma) - e^*(P, \bar{\gamma}) > 0$, woraus die Behauptung folgt. Ist aber $\bar{\gamma}$ nicht in (9.1) enthalten, dann ist $\bar{\gamma}$ ein Haufungspunkt von (9.1); es existiert also mindestens ein γ_i, von (9.1), so dass

$$e^*(\gamma_i, \bar{\gamma}) < e^*(P, \bar{\gamma}) = e^*(P, R_\gamma) \tag{9.3}$$

gilt. Wir haben jetzt nach C*

$$e^*(P, \gamma_i) \leqq e^*(\gamma_i, \bar{\gamma}) + e^*(P, \bar{\gamma}) = e^*(\gamma_i, \bar{\gamma}) + e^*(P, R_\gamma). \tag{9.4}$$

Aus (9.3) und (9.4) folgt daher:

$$e^*(P, \gamma_i) < 2e^*(P, R_\gamma) \quad \text{oder} \quad 2e^*(P, R_\gamma) - e^*(P, \gamma_i) > 0 \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nun wählen wir Zahlen $a_n > 0$, so dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n |f(\gamma_n)| \qquad \gamma_n \varepsilon (9.1) \tag{9.5}$$

konvergieren. Wir wählen z. B.

$$a_n = \frac{2^{-n}}{1 + |f(\gamma_n)|}$$

und setzen

$$F(P) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\gamma_n) \Phi(P, \gamma_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi(P, \gamma_n)} \tag{9.6}$$

Der Nenner von (9.6) ist wegen der Eigenschaft III und der Wahl von $a_n > 0$ nie Null.

Wir betrachten jetzt eine kompakte und abgeschlossene Teilmenge $\overline{M}_1$ von $G = M - R_\gamma$ dann ist wegen II für $P \varepsilon \overline{M}_1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} |a_n f(\gamma_n) \Phi(P, \gamma_n)| \leqq a_n |f(\gamma_n)| \\ |a_n \Phi(P, \gamma_n)| \leqq a_n, \end{array} \right. \tag{9.7}$$

da aber beide (9.5) konvergieren, sind

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\gamma_n) \cdot \Phi(P, \gamma_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi(P, \gamma_n) \end{array} \right. \tag{9.8}$$

auf der Punktmenge $\overline{M}_1$ gleichmässig konvergierende Reihen und zwar wegen I. solche von stetigen Funktionen auf $\overline{M}_1$. Sie stellen also wieder auf jeder $\overline{M}_1$ stetige Funktionen dar, d. h. der Nenner und Zähler von (9.6) sind stetige Funktionen von P auf jeder $\overline{M}_1$ von $M-R_\gamma$ also auf $M-R_\gamma$ selbst, dann ist aber $F(P)$ eine stetige Funktion von P auf $M-R_\gamma$.

Wir definieren jetzt eine Funktion $\bar{f}(a)$ auf M und zwar

$$\bar{f}(a)=\begin{cases} f(\gamma) & \text{für} \quad a=\gamma\,\varepsilon\,R\gamma \\ F(P) & \text{für} \quad a=P\,\varepsilon\,G=M-R_\gamma. \end{cases} \tag{9.9}$$

Die Funktion $\bar{f}(a)$ ist erstens stetig auf R_γ, wenn man sie nur auf R_γ betrachtet, und zweitens stetig auf $M-R_\gamma$. Um zu zeigen, dass sie überall auf M stetig ist, genügt es zu zeigen, dass für irgend eine Folge $\{P_i'\}\,\varepsilon\,G$, $i=1, 2,\ldots$, die gegen $\gamma_0\,\varepsilon\,R_\gamma$ konvergiert, $\{F(P_i')\}$, $i=1, 2,\ldots$ gegen $f(\gamma_0)$ konvergiert, oder anders gesagt:

Wenn

$$\lim_{n=\infty} e^*(P_n', \gamma_0)=0$$

ist, dann ist

$$\lim_{n=\infty}^{n=\infty} (F(P_n')-f(\gamma_0))=0.$$

Aus der Definition (9.2) von $\Phi(P, \gamma_n)$ folgt, dass

$$\Phi(P_i', \gamma_n)=2e^*(P_i, R_\gamma)-e^*(P_i', \gamma_n) \tag{9.10}$$

für diejenigen $\gamma_n\,\varepsilon$ (9.1) ist, die der Beziehung

$$e^*(P_i', \gamma_n)\leqq 2e^*(P_i', R_\gamma) \tag{B}$$

genügen. Für jeden Punkt P_i' also haben wir eine Teilmenge $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i,\ldots\}$ von (9.1), die der Bedingung (B) genügt. Für alle $\gamma_n\,\varepsilon$ (9.1), die zu $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i,\ldots\}$ nicht gehören, ist $\Phi(P_i', \gamma_n)$ Null.

Wir bemerken nun, dass die Menge $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i,\ldots\}$ in einer Umgebung von γ_0 auf R_γ, z. B. in der durch

$$e^*(\gamma, \gamma_0)\leqq 2e^*(P_i', R_\gamma)+e^*(\gamma_0, P_i') \tag{9.11}$$

definierten Umgebung, enthalten ist, denn wir haben für $\gamma_\lambda^i\,\varepsilon\,\{\gamma_1^i, \gamma_2^i,\ldots\}$ nach C*

$$e^*(\gamma_\lambda^i, \gamma_0)\leqq e^*(\gamma_\lambda^i, P_i')+e^*(\gamma_0, P_i')$$

und wegen (B)

$$e^*(\gamma_\lambda^i, \gamma_0)\leqq 2e^*(P_i', R_\gamma)+e^*(\gamma_0, P_i').$$

Andrerseits können wir schreiben:

$$(9.12) \qquad F(P_i') = \frac{\sum\limits_j a_j^i f(\gamma_j^i)\,[2e^*(P_i', R_\gamma) - e^*(P_i', \gamma_j^i)]}{\sum\limits_j a_j^i\,[2e^*(P_i', R_\gamma) - e^*P_i', \gamma_j^i)]}$$

wobei jedes a_j^i mit der zu γ_j^i entsprechenden Zahl unter $a_1, a_2, \ldots$ in (9.6) identisch ist.

Folglich haben wir

$$(9.13) \qquad |F(P_i') - f(\gamma_0)| = \left| \frac{\sum\limits_j a_j^i [f(\gamma_j^i) - f(\gamma_0)]\,[2e^*(P_i', R_\gamma) - e^*(P_i', \gamma_j^i)]}{\sum\limits_j a_j^i [2e^*(P_i', R_\gamma) - e^*(P_i', \gamma_j^i)]} \right| .$$

Ersetzen wir jetzt in jedem Summanden des Zählers die Differenz $[f(\gamma_j^i) - f(\gamma_0)]$ durch die obere Grenze von allen $[f(\gamma_j^i) - f(\gamma_0)]$, $(j = 1, 2, \ldots)$ dann haben wir

$$(9.14) \qquad |F(P_i') - f(\gamma_0)| \leqq |\,\mathfrak{G}\,[f(\gamma_j^i) - f(\gamma_0)\,;\ \gamma_j^i \,\varepsilon\, \{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots\}].$$

Die Menge $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots\}$ ist aber in der Umgebung (9.11) enthalten und wenn wir $i \to \infty$ also $P_i' \to \gamma_0$ streben lassen, dann wird in (9.11) $e^*(P_i', \gamma_0)$ beliebig klein, also auch $2e^*(P_i', R_\gamma)$, da $e^*(P_i', R_\gamma) \leqq e^*(P_i', \gamma_0)$ ist. Die $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots\}$ rücken also mit wachsendem i in immer engere Umgebungen von γ_0 und wegen der Stetigkeit von $f(\gamma)$ in γ_0 strebt das zweite Glied von (9.14) gegen Null also auch das erste. Mit $P_i' \to \gamma_0$ haben wir also

$$\lim_{i=\infty} F(P_i') = f(\gamma_0)$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Satz 1. - Ist eine Funktion $f(\gamma)$ stetig auf R_γ gegeben, dann gibt es immer Funktionen $F(P)$, die auf G definiert sind, derart, dass die Funktion

$$\bar{f}(a) = \begin{cases} f(\gamma) & a = \gamma \,\varepsilon\, R_\gamma \\ F(P) & a = P \,\varepsilon\, G \end{cases}$$

stetig auf $M = G + R_\gamma$ ist.

Wir nennen die Funktion $F(P)$ eine stetige Fortsetzung von $f(\gamma)$ auf G.

a) Betrachten wir jetzt $F(P)$ als eine nur auf G definierte Funktion, dann können wir jedem Punkt $P \,\varepsilon\, G$ eine kugelförmige Umgebung $K(P, \varrho)$, $\varrho \leqq E(P, R)$ zuordnen; wir haben aber für jeden Punkt $P' \,\varepsilon\, K(P, \varrho)$ die Relalion $e(P, P') = = E(P, P')$ also $e^*(P, P') = E^*(P, P')$. Die Funktion $F(P)$ ist also Euklidisch stetig in G.

Die Euklidisch stetige Funktion $F(P)$ in G nähert sich also metrisch stetig den gegebenen Werten $f(\gamma)$.

b) Denken wir uns jetzt eine auf dem Rand R von G Euklidisch stetige Funktion $\varphi(Q)$, $Q \varepsilon R$, und eine auf G Euklidisch stetige Fortsetzung $\Phi(P)$, $P \varepsilon G$, derselben, und betrachten wir eine Funktion $f(\gamma)$, die so auf R_γ definiert ist, dass

$$f(\gamma)=\varphi(Q) \qquad\qquad Q \subset \gamma \varepsilon R_\gamma$$

dann ist offenbar $f(\gamma)$ metrisch stetige auf R_γ und $\Phi(P)$ eine metrisch stetige Fortsetzung von $f(\gamma)$ auf G.

c) Man kann aber durch Beispiele zeigen, dass Euklidische stetige Funktionen $\varphi(Q)$ auf R zu metrisch stetigen Funktionen $f(\gamma)=\varphi(Q)$ führen und zwar zu Funktionen, die ihre obere oder untere oder beide Grenzen in R_γ nicht erreichen. Diese Funktionen $f(\gamma)$ können endlich auch in R_γ, aber nicht beschränkt sein.

Der folgendene Satz lässt sich leicht beweisen.

Satz 2. - Sind $F_1(P)$ und $F_2(P)$ zwei verschiedene metrisch stetige Fortsetzungen von $f(\gamma)$ auf $M-R_\gamma=G$, so ist die Funktion

$$\bar{f}_0(a)=\begin{cases} 0 & a=\gamma \varepsilon R_\gamma \\ F_1(P)-F_2(P) & a=P \varepsilon G \end{cases}$$

metrisch stetig auf M.

d) Sei $F(P)$ eine metrisch stetige Fortsetzung von einer Funktion $f(\gamma)$. die auf R metrisch stetig ist, dann definieren wir auf der abgeschlossenen Kugel $\overline{K}(P_0, E(R, P_0))$, $P_0 \varepsilon G$, die folgende Funktion

$$\Psi(\overline{P})=\begin{cases} F(P) & \overline{P}=P \varepsilon G\overline{K} \\ f(\gamma) & \overline{P}=Q \subset \gamma \varepsilon R_\gamma(P_0) \end{cases}$$

Wir erkennen jetzt leicht, dass $\Psi(\overline{P})$ eine Euklidisch stetige Funktion von $\overline{P}$ auf $\overline{K}$ ist.

II. Kapitel

Das Dirichletsche Problem.

§ 10. - Sei G ein beliebiges Gebiet, dessen Rand R beschränkt ist und R_γ die Menge aller Randelemente von $\overline{G}$; dann stellen wir uns folgendes Problem, das wir das M-Dirichletsche Problem nennen.

Problem: Gegeben sei eine metrisch stetige Funktion $f(\gamma)$ auf R_γ. Gesucht ist eine harmonische Funktion $u(P)$ auf G, derart dass die Funktion

$$\bar{u}(a)=\begin{cases} f(\gamma) & a=\gamma \varepsilon R_\gamma \\ u(P) & a=P \varepsilon G \end{cases} \tag{10.1}$$

metrisch stetig überall auf $M=R_\gamma+G$ ist.

Wir wissen, dass der Wert der gesuchten harmonischen Funktion $u(P)$ in irgend einem Punkt $P_0 \varepsilon G$ gleich dem arithmetischen Mittel der Werte von $u(P)$ auf der Oberfläche ω_ϱ irgend einer Kugel $K(P_0, \varrho)$, $\varrho < E(P_0, R)$, sein soll, d. h. die Bedingung, dass die sogenannte Mittelwertrelation

$$(10.2) \qquad u(P_0) = \frac{1}{4\pi\varrho^2} \iint\limits_{\omega_\varrho} u(P) d\omega$$

an allen Punkten $P_0 \varepsilon G$ und für alle $\varrho < E(P_0, R)$ gilt, ist für die Funktion $u(P)$ notwendig.

Nun werden wir beweisen: *Satz 1.* - Ist $u(P)$ eine metrisch stetige Fortsetzung von $f(\gamma)$ auf G, so ist die Bedingung (10.2) hinreichend dafür.

Nach § 9 *d)* ist die Funktion

$$(10.3) \qquad \Psi(\bar{P}) = \begin{cases} u(P) & \bar{P} = P \,\varepsilon\, \bar{K}(P_0, E(R, P_0))\, G \\ f(\gamma) & \bar{P} = Q \subset \gamma \,\varepsilon\, R_\gamma(P_0), \qquad P_0 \,\varepsilon\, G. \end{cases}$$

Euklidisch stetig überall auf der Kugel $\bar{K}(P_0, E(R, P_0))$; ausserdem genügt sie nach unserer Voraussetzung in irgend einem Punkt $\bar{P}$, der im Inneren der Kugel $\bar{K}(P_0, E(R, P_0))$ liegt, und für jedes $\varrho < E(\bar{P}, \Omega_{E(R, P_0)})$ [$=$Euklidische Entfernung des Punktes $\bar{P}$ von der Oberfläche $\Omega_{E(R, P_0)}$ der Kugel $\bar{K}(P_0, E(R, P_0))$] der Mittelwertrelation; sie ist also harmonisch innerhalb der Kugel $\bar{K}(P_0, E(R, P_0))$ d. h. $u(P)$ ist harmonisch in jeder Umgebung $K(P, E(R, P))$, $P \varepsilon G$; also überall auf G.

Satz 2. - Wir setzen voraus, G sei ein beschränktes Gebiet und $u(P)$ die Lösung des metrischen Dirichletschen Problems auf G für eine vorgegebene metrisch stetige Funktion $f(\gamma)$ auf R_γ. Wir bezeichnen mit $B = \mathfrak{G}\{f(\gamma);\ \gamma \varepsilon R_\gamma\}$ und mit $b = \mathfrak{g}\{f(\gamma);\ \gamma \varepsilon R_\gamma\}$. Dann behaupten wir, dass

$$(10.4) \qquad b \leqq u(P) \leqq B, \qquad P \varepsilon G,$$

gilt. Ist $u(P)$ keine konstante Funktion, so gilt

$$b < u(P) < B, \qquad P \varepsilon G.$$

Beweis: Ist $B = +\infty$ dann ist von selbst $u(P) \leqq B$; wir setzen also voraus, B sei eine endliche Zahl und nehmen an, es gäbe einen Punkt $P_0 \varepsilon G$, so dass

$$(10.5) \qquad B < u(P_0).$$

Dann ist $\frac{u(P_0) - B}{2} < 0$. Die Funktion aber

$$(10.6) \qquad \bar{u}(a) = \begin{cases} f(\gamma) & a = \gamma \,\varepsilon\, R_\gamma \\ u(P) & a = P \,\varepsilon\, G \end{cases}$$

ist metrisch stetig in irgend einem Element $\gamma \varepsilon R_\gamma$ auf $M = R_\gamma + G$ und zwar endlich in M. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ insbesondere zu $\frac{u(P_0) - B}{2} > 0$ eine Zahl $\delta(\gamma) > 0$, derart, dass für jedes $a \varepsilon M$ wofür

$$(10.7) \qquad e^*(\gamma, a) < \delta(\gamma)$$

ist, die Ungleichung besteht

$$(10.7a) \qquad |\bar{u}(a) - f(\gamma)| < \frac{u(P_0) - B}{2}$$

also auch

$$(10.8) \qquad \bar{u}(a) < f(\gamma) + \frac{u(P_0) - B}{2} \leqq \frac{u(P_0) + B}{2} < u(P_0)$$

Bezeichnet man jetzt mit $\sigma(\gamma)$ die Menge aller Elemente a von M, die der Relation (10.7) genügen, so ist $\sigma(\gamma)$ eine Umgebung von γ in M, also eine offene Menge auf M ([10]), die γ als inneres Element enthält. Wir haben also jedem Element γ der separablen Menge R_γ eine Menge $\sigma(\gamma)$ zugeordnet, von der γ inneres Element ist. Nach dem verallgemeinerten Borelschen (Lindelöfschen) Satz ([11]) also gibt es unter den Mengen $\sigma(\gamma)$ abzählbar viele

$$(10.9) \qquad \sigma(\gamma_1), \quad \sigma(\gamma_2), \ldots$$

die R_γ überdecken, so dass jedes Element von R_γ innerer Punkt mindestens einer der Mengen (10.9) ist.

Die Vereinigung $\sigma(\gamma_1) \dotplus \sigma(\gamma_2) \dotplus \ldots = \Sigma$ ist eine offene Menge in M (Hahn S. 63). Dann ist aber $A = M - \Sigma$ abgeschlossen in M, nicht leer, da sie mindestens den Punkt P_0 enthält und eine Teilmenge von G. Wir haben also

$$\bar{u}(a) < \frac{u(P_0) + B}{2} < u(P_0) \quad \text{für} \quad a \varepsilon \Sigma.$$

Nun ist aber die Menge $\bar{A}_0$ aller Elemente von M, in denen

$$(10.11) \qquad \bar{u}(a) \geqq \frac{u(P_0) + B}{2}$$

ist, abgeschlossen in M. (Hahn, Satz VI S. 129) und zwar eine Teilmenge von G und von A. Die Funktion $u(P)$ ist Euklidisch stetig in G. G ist aber Euklidisch in sich dicht. Nach Caratheodory ([12]) ist aber die Punktmenge A_0 aller Punkte

([10]) H. Hahn, l. c. S. 65-66 und 71.
([11]) H. Hahn, l. c. S. 91.
([12]) C. Carathéodory: *Reelle Funktionen*, Berlin 1918, Satz 4 S. 138.

von G, in denen $u(P) > \frac{u(P_0)+B}{2}$ ist, offen in G und nicht leer, da sie den Punkt P_0 enthält. A_0 besteht also aus einer abzählbaren Menge von paarweise fremden Gebieten. Wir nennen G_0 das Gebiet, das den Punkt P_0 enthält. Der Rand von G_0 liegt in $\overline{A}_0$, also ganz in G. Nun ist aber unsere Funktion $u(P)$ auf dem Rand von G_0 konstant gleich $\frac{u(P_0)+B}{2}$; da sie aber in G_0 harmonisch ist und auf $\overline{G}_0$ stetig, muss sie überall auf $\overline{G}_0$ konstant gleich $\frac{u(P_0)+B}{2}$ sein, dann haben wir aber auch für P_0 $u(P_0) = \frac{u(P_0)+B}{2}$ oder $u(P_0) = B$. Die letzte Gleichung aber widerspricht der Ungleichung (10.5). $u(P_0)$ darf also nicht $> B$ sein. Aehnlich beweist man, dass $u(P_0)$ nicht $< b$ sein darf.

Eindeutigkeit der Lösung: Unter den Voraussetzungen des Satzes 2, nehmen wir an, es gäbe eine andere harmonische Funktion $u'(P)$, die die Lösung des metrischen Dirichletschen Problems auf G für die vorgegebene metrisch stetige Funktion $f(\gamma)$ auf R_γ ist, dann ist $u(P) - u'(P)$ harmonisch auf G. Aus dem Satz 2 § 9 und der Relation (10.4) folgt aber, dass $u(P) - u'(P) \equiv 0$ auf G ist. Es existiert also entweder keine oder nur eine Lösung unseres Problems.

§ 11. - Wir bezeichnen mit $S(P)$ eine superharmonische und mit $s(P)$ eine subharmonische Funktion, die beide in G definiert sind ([13]).

Ist $S(P)$ eine superharmonische Funktion in dem beschränkten Gebiet G und ausserdem die metrisch stetige Fortsetzung einer auf R_γ definierten metrisch stetigen Funktion $\Lambda(\gamma)$, so lässt sich wie bei Satz 2 § 10, beweisen

$$\mathfrak{g}\{\Lambda(\gamma);\ \gamma \varepsilon R_\gamma\} \leqq S(P), \qquad P \varepsilon G \tag{11.1}$$

und falls $S(P)$ keine konstante Funktion ist,

$$\mathfrak{g}\{\Lambda(\gamma);\ \gamma \varepsilon R_\gamma\} < S(P), \qquad P \varepsilon G. \tag{11.1'}$$

Aehnlich haben wir für eine subharmonische Funktion $s(P)$ in G, die die metrisch stetige Fortsetzung einer metrisch stetigen Funktion $\lambda(\gamma)$, $\gamma \varepsilon R$ ist

$$\mathfrak{G}\{\lambda(\gamma);\ \gamma \varepsilon R_\gamma\} \geqq s(P), \qquad P \varepsilon G \tag{11.2}$$

und falls $s(P)$ keine konstante Funktion ist:

$$\mathfrak{G}\{\lambda(\gamma);\ \gamma \varepsilon R_\gamma\} > s(P), \qquad P \varepsilon G. \tag{11.2'}$$

([13]) Wir betrachten im folgenden nur die stetigen superharmonischen und subharmonischen Funktionen. Siehe ihre Definition Carathéodory. On Dirichlet's Problem. American Journal of Mathematics vol. LIX (1937) S. 709.

Wir betrachten jetzt ein beschränktes Gebiet G und eine metrisch stetige Funktion $f(\gamma)$ auf R_γ, wir schreiben

$$B = \mathbf{G}\{f(\gamma)\,;\ \gamma\,\varepsilon\,R_\gamma\} \quad \text{und} \quad b = \mathbf{g}\{f(\gamma)\,;\ \gamma\,\varepsilon\,R_\gamma\}$$

und wir setzen voraus, das B und b endliche Zahlen sind, also $f(\gamma)$ eine beschränkte Funktion in R_γ ist.

Wir bezeichnen mit $\{\overline{S}(a)\}$ die Menge aller metrisch stetigen Funktioneu in $M = G + R_\gamma$, die der Bedingung

$$\overline{S}(a) = \begin{cases} \Lambda(\gamma) \geqq f(\gamma) & \text{für} \quad a = \gamma\,\varepsilon\,R_\gamma \\ S(P) & \text{für} \quad P\,\varepsilon\,G \end{cases} \tag{11.4}$$

genügen und mit $\{\overline{s}(a)\}$ die Menge aller metrisch stetigen Funktionen in $M = G + R_\gamma$, die der Bedingung

$$\overline{s}(a) = \begin{cases} \lambda(\gamma) \leqq f(\gamma) & \text{für} \quad a = \gamma\,\varepsilon\,R_\gamma \\ s(P) & \text{für} \quad a = P\,\varepsilon\,G \end{cases} \tag{11.5}$$

genügen. Dann nennen wir $\{\overline{S}(a)\}$ die Menge aller Oberfunktionen von $f(\gamma)$ in M und $\{\overline{s}(a)\}$ die Menge aller Unterfunktionen von $f(\gamma)$ in M ([14]). $\{\overline{S}(a)\}$ wie auch $\{\overline{s}(a)\}$ sind nicht leer, da jede konst $\geqq B$ zu $\{\overline{S}(a)\}$ gehört und jede konst $\leqq b$ zu $\{\overline{s}(a)\}$.

Wir haben ausserdem nach (11.4) und (11.5)

$$\Lambda(\gamma) - \lambda(\gamma) \geqq 0 \tag{11.6}$$

Die superharmonische Funktion $S(P) - s(P)$ ist also die metrisch stetige Fortsetzung von einer nicht negativen Funktion (11.6). Wegen (11.1) gilt also für alle $a\,\varepsilon\,M$ die Relation

$$\overline{S}(a) - \overline{s}(a) \geqq 0 \quad \text{oder} \quad \overline{S}(a) \geqq \overline{s}(a). \tag{11.7}$$

Jetzt ist es klar, dass auch

$$\overline{S}(a) \geqq b \quad \text{und} \quad \overline{s}(a) \leqq B \quad \text{für} \quad a\,\varepsilon\,M \tag{11.8}$$

gelten. Die Menge $\{\overline{S}(a)\}$ ist also für jedes Element $a\,\varepsilon\,M$ nach unten beschränkt und besitzt eine endliche untere Grenze $\overline{u}(a)$, die mit der oberen Grenze der Menge $\{\overline{s}(a)\}$, die nach oben beschränkt ist, für dasselbe Element $a\,\varepsilon\,M$ wegen (11.7) zusammenfällt und zwar gilt wegen (11.8)

$$b \leqq \overline{u}(a) \leqq B, \qquad a\,\varepsilon\,M. \tag{11.9}$$

([14]) O. Perron: *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$*. Math. Zeitschr. Bd. 18 (1923) S. 42.

Schreibt man jetzt $\bar{u}(a)=u(P)$ für $a=P\,\varepsilon\,G$ so beweist man ([15]) dass $u(P)$ harmonisch in G ist.

§ 12. - Nun werden wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die berechnete harmonische Funktion $u(P)$, die metrisch stetige Fortsetzung von $f(\gamma)$ in G ist, d. h. unter welchen Bedingungen das Gebiet G metrisch regulär (normal) ist. Offenbar soll ein metrisch reguläres Gebiet ein Euklidisch reguläres Gebiet sein d. h. ein Gebiet, für welches das Euklidisch klassische Dirichletsche Problem lösbar ist.

Wir führen zuerst mit Lebesgue ([16]) eine Funktion $\bar{V}(\gamma_0, a)$ ein, die wir eine Barriere für G an dem Randelement $\gamma_0\,\varepsilon\,R_\gamma$ nennen und die folgende Eigenschaften besitzt:

I. Sie ist superharmonisch in G und metrisch stetig in M.

II. Ausserhalb jeder Punktmenge $\sigma(\gamma_0, \varrho)$ d. h. ausserhalb jeder Punktmenge, die aus allen Elementen $a\,\varepsilon\,M$ besteht, die der Relation $e^*(\gamma_0, a)<\varrho$ genügen, besitzt sie in M eine positive untere Grenze.

III. Ist $P_1, P_2, \ldots$ eine Punktfolge auf G, die der Relation $\lim_{n=\infty} e^*(P_n, \gamma_0)=0$ genügt, so ist $\lim_{n=\infty} \bar{V}(\gamma_0, P_n)=0$ anders gesagt: $\bar{V}(\gamma_0, \gamma_0)=0$.

Satz 1. - Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass G ein metrisch reguläres Gebiet ist, d. h. dass $u(P)$ die metrisch stetige Fortsetzung von $f(\gamma)$ auf G ist, ist, dass es eine Barriere $\bar{V}(\gamma, a)$ für G an jedem Randelement $\gamma\,\varepsilon\,R_\gamma$ gibt.

a) Die Bedingung ist notwendig: Sei G metrisch regulär, dann betrachten wir für ein Randelement γ_0 die Funktion $e^*(\gamma_0, \gamma)$ von $\gamma\,\varepsilon\,R_\gamma$; sie ist metrisch stetig auf R_γ, es existiert also eine harmonische Funktion $V(\gamma_0, P)$ in G, die die metrisch stetige Fortsetzung von $e^*(\gamma_0, \gamma)$ auf G ist. Dann besitzt die Funktion

$$\bar{V}(\gamma_0, a)=\begin{cases} e^*(\gamma_0, \gamma) & a=\gamma\,\varepsilon\,R_\gamma \\ V(\gamma_0, P) & a=P\,\varepsilon\,G \end{cases}$$

die Eigenschaften I. und III. einer Barriere. Ausserdem ist $e^*(\gamma_0, \gamma)>0$ für alle $\gamma\,\varepsilon\,R_\gamma$ ausser $\gamma=\gamma_0$ und keine konstante Funktion. Wir haben also nach Satz 2 § 10 $V(\gamma_0, P)>0$ für alle $P\,\varepsilon\,G$.

([15]) O. Perron l. c. §§ 2 und 3. Carathéodory l. c. § 18. Der Beweis von Caratheodory kann in unserem Falle unverändert übertragen werden, da $u(P)$ an jedem Punkt $P\,\varepsilon\,G$ die untere Grenze von allen $\bar{S}(a)=S(P)$, $a=P\,\varepsilon\,G$ ist. $\{S(P)\}$ sind aber superharmonisch und ausserdem Euklidisch stetig in G. Die Randwerte spielen, indem die Menge $\{S(P)\}$ konstruiert wurde, im Beweise, keine Rolle mehr. $u(P)$ ist nach Carathéodory harmonisch in jeder Kugel, die mit ihrem Rand innerhalb G liegt, sie ist also überall in G harmonisch.

([16]) LEBESGUE: *Sur le problème de Dirichlet.* Compt. Rendus 154 (1912), S. 335 oder KELLOG: *Foundations of Potential Theory.* Berlin 1929, S. 327.

$\overline{V}(\gamma_0, a)$ besitzt also auch die Eigenschaft II., sie ist also eine Barriere.

b) Die Bedingung ist hinreichend: Sei $\overline{V}(\gamma_0, a)$ eine Barriere für G an irgend einem Element $\gamma_0 \varepsilon R_\gamma$. Bedeutet dann ε eine positive Zahl, so gibt es wegen der metrischen Stetigkeit der Funktion $f(\gamma)$ auf R_γ eine Zahl δ, so dass mit

$$e^*(\gamma_0, \gamma) < \delta$$

auch

$$f(\gamma_0) - \varepsilon < f(\gamma) < f(\gamma_0) + \varepsilon \tag{12.1}$$

gilt. Wir bezeichnen jetzt mit $\overline{\sigma}(\gamma_0, \delta(\varepsilon))$ die Teilmenge von M, die der Relation $e^*(\gamma_0, a) < \delta$ genügt, und setzen wir $\sigma(\gamma_0, \delta) = G \cdot \sigma(\gamma_0, \delta)$, dann besitzt $\overline{V}(\gamma_0, a)$ wegen der Eigenschaft II. eine positive untere Grenze in $M - \overline{\sigma}(\gamma_0, \delta(\varepsilon))$, die wir mit $\mu(\varepsilon)$ bezeichnen.

Nun setzen wir

$$\overline{S}_0(a) = f(\gamma_0) + \varepsilon + \frac{B-b}{\mu(\varepsilon)} \overline{V}(\gamma_0, a) \qquad a \,\varepsilon\, M \tag{12.2}$$

$$\overline{s}_0(a) = f(\gamma) - \varepsilon - \frac{B-b}{\mu(\varepsilon)} \overline{V}(\gamma_0, a) \qquad a \,\varepsilon\, M \tag{12.3}$$

dann erkennen wir leicht, dass $\overline{S}_0(a) \,\varepsilon\, \{\overline{S}(a)\}$ und $\overline{s}_0(a) \,\varepsilon\, \{\overline{s}(a)\}$ für beliebige $\varepsilon > 0$ ist. Wegen Eigenschaft III. der Barriere $\overline{V}(\gamma_0, a)$ haben wir

$$\overline{S}_0(\gamma_0) = f(\gamma_0) + \varepsilon, \qquad \overline{s}_0(\gamma_0) = f(\gamma_0) - \varepsilon. \tag{12.4}$$

$\overline{S}_0(a)$ wie auch $\overline{s}_0(a)$ sind aber metrisch stetige Funktionen in γ_0 auf M, jeder gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ entspricht also eine Zahl $\delta' > 0$, derart, dass mit $e^*(P, \gamma_0) < \delta'$

$$S_0(P) < \overline{S}_0(\gamma_0) + \varepsilon, \qquad s_0(P) > \overline{s}_0(\gamma_0) - \varepsilon \tag{12.5}$$

gelten. Bezeichnen wir mit $\sigma(\gamma_0, \delta')$ die Punktmenge, die der Relation $e^*(P, \gamma_0) < \delta'$, $P \,\varepsilon\, G$, genügt, so haben wir aus (12.4) und (12.5)

$$\left.\begin{array}{l} S_0(P) < f(\gamma_0) + 2\varepsilon \\ s_0(P) > f(\gamma_0) - 2\varepsilon \end{array}\right\} \text{ für } P \,\varepsilon\, \sigma(\gamma_0, \delta) \cdot \sigma(\gamma_0, \delta') = \sigma(\gamma_0, \delta'') \text{ wobei } \delta'' = \text{Min.}\{\delta, \delta'\}.$$

dann ist aber sicher

$$u(P) < f(\gamma_0) + 2\varepsilon$$
$$u(P) > f(\gamma_0) - 2\varepsilon$$

also

$$|u(P) - f(\gamma_0)| < 2\varepsilon.$$

Ist also $2\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es eine Zahl. $\delta'' > 0$ derart, dass für alle Punkte P, die der Bedingung $e^*(\gamma_0, P) < \delta''$ genügen

$$|u(P) - f(\gamma_0)| < 2\varepsilon$$

ist. $u(P)$ nähert sich also metrisch stetig dem Randwerte $f(\gamma_0)$ und da es für jedes Randelement γ_0 gilt, ist $u(P)$ die metrisch stetige Fortsetzung der Funktion $f(\gamma)$ auf G.

§ **13.** - Sei G ein Euklidisch reguläres Gebiet, dann gibt es an jedem Randpunkt Q_0 auf G eine Euklidische Barriere, d. h. eine Funktion $W(Q_0, P)$ die stetig auf $\overline{G}$ und harmonisch in G ist, die an dem Punkt Q_0 verschwindet und an allen anderen Randpunkten positiv ist ([17]). Eine solche Barriere ist z. B. die harmonische Funktion $W(Q_0, P)$ in G, die die Randwerte $E^*(Q_0, P)$, $P \varepsilon R$ annimmt. Wir betrachten jetzt ein Randelement γ_0 und eine Folge von Teilgebieten $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \ldots$ von $\overline{G}$, die das Element γ_0 definiert und bezeichnen mit λ_i die Euklidische Entfernung des Punktes $Q_0 \subset \gamma_0$ vom Hilfsrand des Gebietes g_i und mit $\sigma(\gamma_0, \lambda_i^*)$ die Teilmenge von M, die aus allen Elementen $\alpha \varepsilon M$ besteht, die der Relation

$$e^*(\gamma_0, \alpha) < \lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} \tag{13.1}$$

genügen. Wir bilden jetzt eine Punktmenge $\Sigma(Q_0, \lambda_i)$, die die folgenden Punkte enthält: 1. alle $\overline{P} = \alpha \varepsilon G \sigma(\gamma_0, \lambda_i^*)$ und 2. alle $\overline{P} = Q \subset \gamma \varepsilon R_\gamma \sigma(\gamma_0, \lambda_i^*)$.

Wir erkennen leicht, dass $\Sigma(Q_0, \lambda_i) \subset \overline{g}_i$ ist. Sei $\overline{\Sigma}(Q_0, \lambda_i)$ die abgeschlossene Hülle von $\Sigma(Q_0, \lambda_i)$ auf $\overline{g}_i$, dann besitzt die Funktion $W(Q_0, P)$ auf der abgeschlossenen Hülle von $\overline{g}_i - \overline{\Sigma}(Q_0, \lambda_i)$ ein positives Minimum, das wir mit μ_i bezeichnen. Offenbar ist $\lim\limits_{i=\infty} \mu_i = 0$. Nun definieren wir eine Funktion

$$\overline{V}_i(\gamma_0, \alpha) = \begin{cases} \text{Min.}\, \{W(Q_0, P), \mu_i\} & \text{für} \quad P = \alpha \varepsilon G \cdot \sigma(\gamma_0, \lambda_i^*) \\ & \text{und} \quad P = Q \subset \gamma = \alpha \varepsilon R_\gamma \cdot \sigma(\gamma_0, \lambda_i^*) \\ \mu_i \quad \text{für} \quad \alpha \varepsilon M - \sigma(\gamma_0, \lambda_i^*). \end{cases} \tag{13.2}$$

So ist $\overline{V}(\gamma_0, \alpha)$ an allen Elementen von M eindeutig definiert, sie ist metrisch stetig auf M und superharmonisch in G. Wir wählen jetzt positive Zahlen a_n, $(n=1, 2, \ldots)$ derart, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, z. B. $\frac{1}{2^n}$ und schreiben

$$\overline{V}(\gamma_0, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{V}_i(\gamma_0, \alpha); \tag{13.3}$$

offenbar ist

$$\overline{V}_i(\gamma_0, \alpha) \leqq \text{Max}\, \{W(Q_0, P),\ P \varepsilon \overline{g}_1\} = A_1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots$$

([17]) Carathéodory l. c. § 19.

also

$$0 < a_n \overline{V}_i(\gamma_0, a) \leqq a_n A_1 .$$

Die Reihe (13.3) der Funktionen $a_n \overline{V}_i(\gamma_0, a)$, die metrisch stetig in M und superharmonisch in G sind, konvergiert also gleichmässig an jedem kompakten und abgeschlossenen Teil von M, sie stellt also eine metrisch stetige Funktion $\overline{V}(\gamma_0, a)$ auf M und eine superharmonische in G dar, $\overline{V}(\gamma_0, a)$ besitzt also die Eigenschaft I. einer Barriere. Wir erkennen leicht, dass $\overline{V}(\gamma_0, a)$ die Eigenschaft III. einer Barriere auch besitzt. Ist jetzt eine positive Zahl $\lambda^* = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ gegeben, so können wir j so wählen, dass $\lambda^* > \lambda_i^*$ für $i=j, j+1, \ldots.$ gilt, also $\sigma(\gamma_0, \lambda^*) \supset \sigma(\gamma_0, \lambda_i^*)$ für $i=j, j+1, \ldots.$ auch gilt; dann haben wir in $M - \sigma(\gamma_0, \lambda^*)$

$$\overline{V}(\gamma_0, a) \geqq \sum_{i=j}^{\infty} a_i \mu_i > 0$$

d. h. $\overline{V}(\gamma_0, a)$ besitzt die Eigenschaft II. einer Barriere. $\overline{V}(\gamma_0, a)$ ist also eine Barriere auf G an dem Element γ_0.

Da aber γ_0 beliebig gewählt wurde, gibt es eine Barriere auf G an jedem Element $\gamma \varepsilon R_\gamma$. Hiernach haben wir :

Satz 1. - Jedes Euklidisch reguläre Gebiet ist auch ein metrisch reguläres Gebiet.

Anders gesagt, da die Umkehrung des Satzes I. auch gilt,

Satz 2. - Das in § 10 gestellte M-Dirichletsche Problem besitzt eine Lösung und selbstverständlich nur eine Lösung, für ein Gebiet G und für eine beliebige beschränkte metrisch stetige Funktion $f(\gamma)$ auf R_γ, dann und nur dann, wenn das Euklidisch Dirichletsche Problem für das Gebiet G lösbar ist.