ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Su alcuni concetti dell'analisi moderna

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 1-2 (1942), p. 107-118

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_1-2_107_0>

SU ALCUNI CONCETTI DELL'ANALISI MODERNA (1).

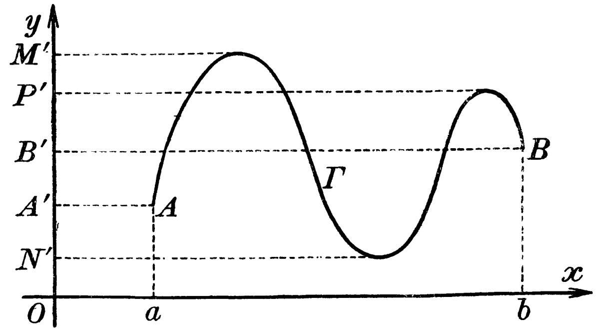
di LEONIDA TONELLI (Roma).

Nell'Analisi moderna hanno assunto una notevole importanza i concetti di *funzione a variazione limitata* e di *funzione assolutamente continua.* Il primo di essi fu posto, per la prima volta, e per le funzioni di una sola variabile, da CAMILLE JORDAN, in una Nota dei Comptes rendus del 1881, e subito dopo nel suo « *Cours d'Analyse* » ; il secondo è dovuto a GIUSEPPE VITALI, che lo introdusse, per le funzioni di una sola variabile, nel 1905, in una Nota della R. Accademia delle Scienze di Torino, e che, nel 1908, ne indicò anche una estensione alle funzioni di più variabili.

Di questi concetti, che riguardano le funzioni reali di variabili reali, intendo di parlare qui, trattando tanto le funzioni di una quanto quelle di più variabili.

* * *

Consideriamo una funzione $f(x)$, reale della variabile reale x, per tutti gli x di un intervallo (a, b). Se supponiamo che la $f(x)$ sia *continua*, l'equazione $y=f(x)$ possiamo interpretarla come *l'equazione di una curva* Γ. Questa curva potrà compiere una o più od anche infinite oscillazioni; e le sue oscillazioni potranno essere più o meno ampie.



Si comprende subito come possa riuscire importante per certe questioni l'avere una *misura* della totalità di queste oscillazioni. Una tale misura sarà necessariamente un numero il quale dovrà dipendere e dal numero delle oscillazioni compiute dalla Γ e dall'ampiezza di ciascuna oscillazione.

(1) Conferenza tenuta, il 23 febbraio 1942-XX, all'Istituto Matematico della R. Università di Bologna.

Un'idea si presenta qui molto naturalmente per ottenere la misura in questione. Si consideri la proiezione della curva Γ sull'asse delle y. Noi immagineremo, per semplicità, che il sistema degli assi x e y sia cartesiano ortogonale, e intenderemo di parlare di proiezione ortogonale della Γ sull'asse delle y. Questa proiezione, per il caso della figura che abbiamo disegnata, si riduce ad una spezzata, ripiegata su sè stessa, e precisamente alla spezzata, a lati rettilinei, $A'M'N'P'B'$; e la misura cercata possiamo assumerla come data dalla lunghezza della spezzata così ottenuta, lunghezza che, evidentemente, dipende dal numero delle oscillazioni della curva Γ e dall'ampiezza di ciascuna oscillazione.

La misura così definita, cioè uguale alla lunghezza della proiezione ortogonale sull'asse delle y della curva Γ rappresentata dall'equazione $y=f(x)$, la diremo *variazione totale* della funzione $f(x)$ nell'intervallo (a, b); e se questa variazione totale risulterà *finita*, diremo che $f(x)$ è *a variazione limitata in* (a, b).

È evidente che, se la curva Γ ha soltanto un numero finito di oscillazioni, la $f(x)$ risulta a variazione limitata; ma la funzione $f(x)$ potrà risultare a variazione limitata anche nel caso di una curva Γ avente *infinite* oscillazioni, purchè queste infinite oscillazioni abbiano uno smorzamento sufficientemente rapido. Se, invece, lo smorzamento non sarà abbastanza rapido, le infinite oscillazioni faranno sì che la $f(x)$ *non* risulti a variazione limitata.

Le definizioni di *funzione a variazione limitata* e di *variazione totale,* che abbiano date in *forma geometrica*, corrispondono esattamente alle definizioni in *forma analitica* del JORDAN; e queste definizioni in forma analitica, se da un lato restano più lontane dal fatto geometrico che esse traducono, dall'altro si applicano anche senza supporre, come noi abbiamo fatto, che la funzione $f(x)$ sia *continua.*

JORDAN definì le funzioni a variazione limitata, che, in un primo tempo, aveva chiamate *funzioni ad oscillazione limitata*, nel seguente modo. Considerata una qualsiasi funzione $f(x)$, definita in (a, b), si suddivida quest'intervallo in parti, in numero finito, mediante i punti

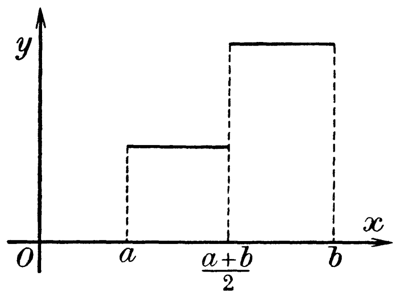
$$a_0=a<a_1<a_2<....<a_n=b,$$

e, per ogni parte (a_r, a_{r+1}), si formi il valore assoluto $|f(a_{r+1})-f(a_r)|$ della variazione $f(a_{r+1})-f(a_r)$ subita dalla funzione nel passare dall'ascissa a_r ad a_{r+1}; e si sommino tutti questi valori assoluti, cioè si costruisca la somma

$$\sum_{r=0}^{n-1} |f(a_{r+1})-f(a_r)|.$$

Se questa somma, qualunque sia la suddivisione di (a, b) mediante i punti a_r, resta sempre inferiore ad un numero positivo fisso, la $f(x)$ è detta da JORDAN *a variazione limitata*; e il confine superiore di tale somma, vale a dire il più piccolo numero che non è mai superato da questa somma, è detto da JORDAN *variazione totale* della $f(x)$ in (a, b).

Secondo le definizioni di JORDAN, non può essere a variazione limitata una funzione che non sia *limitata* in (a, b); ma possono risultare a variazione limitata anche funzioni discontinue, come, per esempio, la funzione uguale ad 1 nei punti precedenti $\frac{a+b}{2}$, e uguale a 2 negli altri.



Si dimostra però che ogni funzione a variazione limitata può ammettere soltanto *discontinuità di* 1^a *specie*, ed al più in un' *infinità numerabile*.

Nel caso di una funzione continua, le definizioni di funzione a variazione limitata e di variazione totale da noi date inizialmente equivalgono perfettamente a quelle di JORDAN.

Per le funzioni a variazione limitata, JORDAN mise in luce una molto semplice *proprietà caratteristica*, quella di poterle scrivere sotto forma di differenza di due funzioni ambedue non decrescenti. Stabilito un modo di scrivere una funzione a variazione limitata in questa forma, ne risultano subito infiniti altri; e, fra tutte queste rappresentazioni della funzione considerata, ve n'è una speciale che costituisce la così detta *decomposizione canonica di Jordan*: è quella in cui le due funzioni non decrescenti che, con la loro differenza, dànno la funzione considerata, sono ambedue non negative, crescono con la minore rapidità possibile e assumono, per $x=a$, i più piccoli valori possibili.

Se la funzione data è, oltre che a variazione limitata, anche continua, i termini della differenza che dà la decomposizione canonica sono anch'essi continui.

Un'altra notevole proprietà, di carattere differenziale, delle funzioni a variazione limitata fu scoperta da H. LEBESGUE nel 1904, con l'ipotesi supplementare della continuità, ipotesi che fu poi completamente rimossa da altri. Si ha così che ogni funzione $f(x)$ a variazione limitata ammette *quasi dappertutto* derivata $f'(x)$ finita; in altre parole, i punti di (a, b) in cui la derivata $f'(x)$ non esiste od è infinita si possono rinchiudere in un numero finito od al più in un'infinità numerabile di intervalli di lunghezza complessiva piccola quanto si vuole. Oltre a ciò, la derivata $f'(x)$ di una funzione a variazione limitata è integrabile in (a, b), l'integrazione essendo intesa nel senso del LEBESGUE; e vale la disuguaglianza

$$\int_a^b |f'(x)|\, dx \leqslant V,$$

dove V indica la variazione totale della $f(x)$ in (a, b).

Lo stesso JORDAN indicò due importanti applicazioni del concetto di funzione a variazione limitata. La prima di esse lo condusse alla caratterizzazione analitica delle curve rettificabili, ossia delle curve a lunghezza finita. Considerata una curva continua, data nella forma $y=f(x)$ oppure in quella più generale $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, con $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funzioni continue, JORDAN provò che condizione necessaria e sufficiente affinchè tale curva sia rettificabile è che la $f(x)$, nel primo caso, e le $\varphi(t)$, $\psi(t)$, nel secondo, siano funzioni a variazione limitata.

Un'altra applicazione si ha nel campo delle serie di FOURIER. JORDAN dimostrò che una funzione $f(x)$ a variazione limitata nell'intervallo $(0, 2\pi)$, e definita per mezzo della periodicità, di periodo 2π, in tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, è sviluppabile in serie di FOURIER, nel senso che la sua serie di FOURIER è ovunque convergente, con somma uguale al valore della funzione, ove questa è continua, e uguale alla semisomma $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ dei suoi valori limiti a destra ed a sinistra di x, ove la funzione è discontinua.

* * *

Il concetto di *funzione assolutamente continua* fu posto, per le funzioni di una sola variabile, nel 1905 dal VITALI, per caratterizzare le così dette *funzioni integrali.*

Data ancora in (a, b) una funzione reale $f(x)$, essa dicesi *assolutamente continua* se, preso comunque un numero positivo ε, è possibile di determinarne un altro δ in modo che, per qualsiasi gruppo di intervalli non sovrapponentisi di (a,b): (a_1, b_1), (a_2, b_2)...., (a_n, b_n), di lunghezza complessiva $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ minore di δ, si abbia

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon.$$

Si rifletta che, se il numero n degli intervalli (a_i, b_i) fosse fissato, ogni funzione continua risulterebbe assolutamente continua; ma il numero n, nella definizione ora posta, non è fissato e può assumere qualsiasi valore, per modo che la disuguaglianza sopra scritta deve valere qualunque sia il numero degli intervalli considerati, purchè non sovrapponentisi e di lunghezza complessiva minore di δ. Per questa ragione esistono delle funzioni continue che *non sono assolutamente continue.*

Ogni funzione assolutamente continua è a variazione limitata, e pertanto è derivabile quasi dappertutto, con derivata finita e integrabile; e si ha esattamente

$$\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)$$

e
$$\int_a^b |f'(x)|\, dx = V.$$

Inoltre, poichè dalla prima di queste uguaglianze segue, per ogni x di (a, b),
$$\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$$
ossia
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f(t)\, dt,$$
risulta che ogni funzione assolutamente continua è una *funzione integrale*. Viceversa, si dimostra che ogni funzione integrale è *assolutamente continua*, e si ottiene così che l'*assoluta continuità* è la proprietà caratteristica delle funzioni integrali.

Dell'assoluta continuità io mi servii, nel 1908, per risolvere completamente il problema della rappresentazione della lunghezza di una curva rettificabile mediante il noto integrale classico. Per una qualunque curva continua rettificabile, rappresentata analiticamente dal sistema
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$
io provai che l'integrale classico
$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$
esiste sempre finito (l'integrazione essendo intesa nel senso del LEBESGUE) e che esso è sempre minore od uguale alla lunghezza L della curva. Dimostrai poi che la condizione necessaria e sufficiente affinchè valga la formula
$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$
è espressa dall'assoluta continuità delle funzioni $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

Dell'assoluta continuità io feci, in seguito, un'altra applicazione, che costituisce il fondamento necessario per la nuova teoria del Calcolo delle Variazioni con la quale io ho potuto dar vita a quella che oggi è chiamata la *Scuola italiana di Calcolo delle Variazioni.*

Nella teoria classica del Calcolo delle Variazioni, le curve $y = y(x)$, che si considerano per lo studio degli integrali curvilinei in forma ordinaria
$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

sono supposte a tangente variabile in modo continuo o tutt'al più con un numero finito di punti angolosi; si suppone cioè che la $y(x)$ sia continua e che abbia la derivata $y'(x)$ continua o con al più delle discontinuità di 1ª specie in numero finito. Io, invece, nella mia teoria allargai notevolmente la classe delle curve prese in considerazione, supponendo semplicemente la $y(x)$ assolutamente continua. Con tale estensione potei ottenere notevoli teoremi di esistenza del minimo.

Si poteva pensare, dopo di ciò, di allargare ancor più la classe delle curve considerate; ma il LAVRENTIEFF dimostrò che questo non è possibile, perchè con un' ulteriore estensione i problemi di Calcolo delle Variazioni non ammetterebbero, in generale, soluzione Con ciò resta provato che le funzioni $y(x)$ assolutamente continue costituiscono la classe più ampia di funzioni che possano essere utilmente considerate nel Calcolo delle Variazioni.

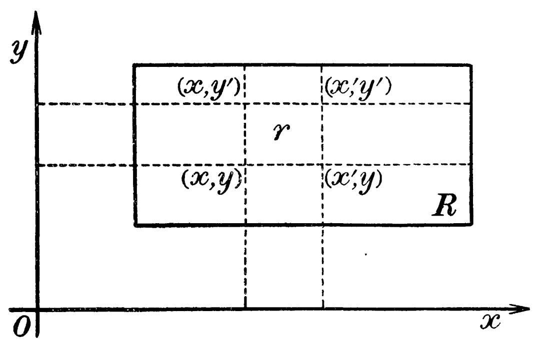
Sempre nel Calcolo delle Variazioni, nella parte che riguarda gli integrali curvilinei in forma parametrica

$$\int_C F(x, y, x', y')\, dt,$$

io ho potuto provare che il valore di questo integrale è indipendente dalla rappresentazione adottata per la curva C, purchè tale rappresentazione sia fatta con funzioni assolutamente continue, e che, in generale, si ottiene per l'integrale un valore diverso se si abbandona tale restrizione.

* * *

Vediamo ora come i concetti di funzione a variazione limitata e di funzione assolutamente continua siano stati estesi alle funzioni di più variabili. Per semplicità ci limiteremo a considerare soltanto le funzioni di *due* variabili.



Per quanto riguarda le funzioni a variazione limitata, sono state proposte varie definizioni per le funzioni di più variabili; ma effettivamente due soltanto fra tali definizioni hanno dimostrato di riuscire veramente utili.

Una prima estensione si è avuta prendendo in considerazione l'incremento doppio di una funzione $f(x, y)$. Supponiamo che la $f(x, y)$ sia definita in tutti i punti di un rettangolo R a lati paralleli agli assi x e y, e, considerati due punti (x, y) e (x', y') di R, formiamo l'espressione

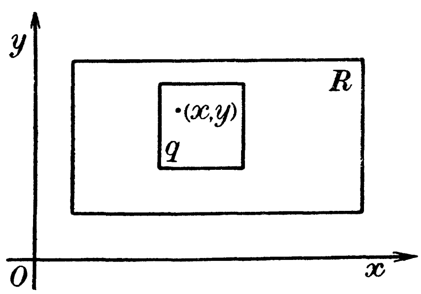
$$f(x', y') - f(x, y') - f(x', y) + f(x, y) = \{ f(x', y') - f(x, y') \} - \{ f(x', y) - f(x, y) \}$$

che chiameremo *incremento doppio della* $f(x, y)$ relativo al rettangolino r a lati paralleli agli assi e di vertici opposti (x, y) e (x', y'). Ciò premesso, immaginiamo di dividere il campo R in un numero finito qualunque di rettangoli, a lati paralleli agli assi x e y, e facciamo la somma dei valori assoluti degli incrementi doppi della $f(x, y)$ relativi a tutti i rettangoli della suddivisione. Se questa somma, qualunque sia la suddivisione operata del campo R, nel modo indicato, resta sempre inferiore ad un numero positivo fisso, diremo che la $f(x,y)$ è, in R, a *variazione doppia limitata.* Le funzioni a variazione doppia limitata sono quelle che VITALI, LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN ed altri, chiamarono funzioni di due variabili a *variazione limitata.*

In connessione con questa definizione, gli Autori già citati chiamarono *assolutamente continue* quelle funzioni $f(x, y)$, definite in R, che godono della seguente proprietà: preso ad arbitro un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\sigma > 0$ in modo che, considerato in R un qualsiasi gruppo di rettangoli non sovrapponentisi, a lati paralleli agli assi, e di area totale minore di σ, risulti sempre minore di ε la somma dei valori assoluti degli incrementi doppi della $f(x, y)$ relativi a tutti i rettangoli del gruppo considerato. Queste funzioni noi, per distinguerle da quelle che definiremo fra poco, le diremo *funzioni doppiamente assolutamente continue.*

Le definizioni di funzione $f(x, y)$ a variazione doppia limitata e doppiamente assolutamente continue sono state poste per lo studio del problema degli integrali doppi; ed a questo scopo servono egregiamente, perchè le funzioni doppiamente assolutamente continue permettono di caratterizzare le funzioni integrali di due variabili.

Le funzioni doppiamente assolutamente continue sono anche a variazione doppia limitata, e tutte queste funzioni ammettono quasi dappertutto, finita, la *derivata superficiale regolare.* Tale derivata è definita nel modo seguente: considerato un punto (x, y) di R, sia q un quadrato, a lati paralleli agli assi coordinati, contenente (x, y), e si formi il rapporto fra l'incremento doppio della $f(x, y)$ relativo a q e l'area di q. Se, al tendere a zero dell'area di q, il rapporto indicato ha un limite finito, tale limite si chiama *derivata superficiale regolare* della $f(x,y)$ nel punto (x, y).



Per una qualsiasi funzione a variazione doppia limitata, la sua derivata superficiale regolare è integrabile, nel senso del LEBESGUE. Inoltre, se la funzione a variazione doppia limitata è anche a variazione limitata come funzione della sola x su uno dei lati del rettangolo R paralleli all'asse delle x ed è pure a variazione limitata come funzione della sola y su uno dei lati di R paralleli all'asse delle y, allora, quasi dappertutto in R, esistono finite ambedue le derivate miste del secondo ordine f''_{xy} e f''_{yx}. Tutto ciò mostra che le funzioni a variazione limitata ammettono quasi dappertutto un elemento differenziale del 2° ordine.

* * *

Nel caso delle funzioni di una sola variabile, i concetti di funzione a variazione limitata e di funzione assolutamente continua hanno servito, fra l'altro, a risolvere il problema delle funzioni integrali e quello della rettificazione delle curve. Questi due problemi hanno i loro corrispondenti nel campo delle funzioni di due variabili. Il corrispondente del primo è il problema delle funzioni integrali di due variabili, e per questo problema servono ottimamente i concetti di funzione a variazione doppia limitata e di funzione doppiamente assolutamente continua. Il corrispondente del secondo è il problema della quadratura delle superficie; ma per questo non servono i concetti ora indicati e occorre trovare un'altra forma di estensione delle definizioni di funzione a variazione limitata e di funzione assolutamente continua.

Nel caso delle funzioni integrali in una variabile e in quello della rettificazione delle curve, ci troviamo di fronte a problemi che riguardano tutti e due elementi differenziali dello stesso ordine, e precisamente del 1° ordine: la derivata di una funzione integrale in una variabile è un elemento differenziale del 1° ordine, e nel problema della rettificazione delle curve intervengono soltanto delle derivate del 1° ordine.

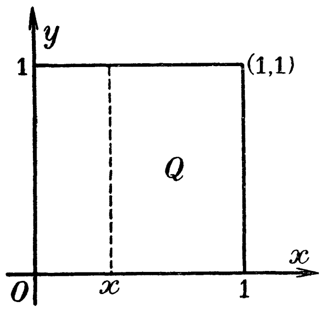
Per una funzione integrale in due variabili, la derivata superficiale regolare è un elemento differenziale del 2° ordine, mentre invece nel problema della quadratura delle superficie intervengono soltanto delle derivate del 1° ordine. Dunque questi due problemi impongono la considerazione di elementi differenziali di ordine diverso; ed è qui la ragione profonda del fatto che quell'estensione a due variabili dei concetti di funzione a variazione limitata e di funzione assolutamente continua, che serve per il primo dei due problemi indicati, non può servire per il secondo.

D'altronde, ripensando a quanto si dice nei Corsi ordinari di Analisi Matematica sull'area delle superficie, ci si convince subito che il concetto di funzione di due variabili a variazione doppia limitata non può servire a caratterizzare le superficie quadrabili (cioè ad area finita) date nella forma $z=f(x, y)$. Ed infatti, nei Corsi indicati, si prova che una superficie di questa forma, con $f(x, y)$ continua insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine, ha area finita, data precisamente dal noto integrale classico. Orbene, per queste superficie non si fa alcuna ipotesi circa l'esistenza di elementi differenziali del 2° ordine per la $f(x, y)$, mentre invece l'esistenza di uno di tali elementi è implicita nella definizione di funzione a variazione doppia limitata; cosicchè si intravvede l'esistenza di funzioni $f(x, y)$ che, pur essendo continue con le loro derivate parziali del 1° ordine, non sono a variazione doppia limitata. Ed effettivamente, si possono costruire funzioni di tale specie; e ciò prova che non tutte le superficie quadrabili della forma $z=f(x, y)$ hanno la $f(x, y)$ a variazione doppia limitata.

Vogliamo aggiungere su ciò un'ultima considerazione. Il concetto di funzione a variazione doppia limitata è legato all'orientamento degli assi x e y, mentre la quadrabilità di una superficie è un fatto indipendente da tale orientamento. Quel concetto non può dunque servire a caratterizzare le superficie quadrabili.

* * *

Allo scopo precisamente di risolvere il problema della quadratura delle superficie rappresentate da un'equazione $z=f(x, y)$, io ho dato, nel 1926, le definizioni di funzione di due variabili a variazione limitata e di funzione di due variabili assolutamente continue, concetti che si sono poi rivelati molto utili in diverse altre questioni. Supposto, per semplicità, che il campo di definizione della funzione $f(x, y)$ sia il quadrato Q, di vertici opposti (0, 0) e (1, 1), darò prima la definizione di funzione a variazione limitata in forma geometrica, riserbandomi di dare quella analitica in un secondo tempo.



Consideriamo la superficie S rappresentata, per (x, y) in Q, dall'equazione $z=f(x, y)$, ove supporremo la $f(x, y)$ *continua*. Ispirandoci a quanto abbiamo detto per definire geometricamente le funzioni di una variabile a variazione limitata, consideriamo l'area della proiezione ortogonale sul piano (x, z) (l'asse z essendo ortogonale in O al piano (x, y)) della superficie S, e pure consideriamo l'area della proiezione ortogonale della stessa superficie sul piano (y, z). Se queste due aree risultano ambedue finite, diremo che la $f(x, y)$ è *a variazione limitata in Q*.

Come si calcola l'area della proiezione di S sul piano (x, z)? Questa proiezione è una superficie in generale ripiegata più volte su sè stessa, e la sua area si calcola integrando rispetto ad x sull'intero intervallo (0, 1) la lunghezza della proiezione ortogonale sul piano (x, z) della sezione della superficie S col piano parallelo al piano (y, z) passante per il punto x dell'asse delle x. E poichè tale lunghezza è data dalla variazione totale $V_y(x)$ della funzione $f(x, y)$, considerata, per un fissato valore di x, come funzione della *sola* variabile y, la proiezione di S sul piano (x, z) risulta data dall'integrale

$$\int_0^1 V_y(x)\,dx.$$

Parimenti, la proiezione ortogonale di S sul piano (y, z) risulta data da

$$\int_0^1 V_x(y)\, dy,$$

dove $V_x(y)$ è la variazione totale della $f(x, y)$ considerata come funzione della sola x, quando sia fissato un valore di y.

Ne viene dunque che, affinchè la $f(x, y)$ sia a variazione limitata, le due variazioni totali $V_y(x)$ e $V_x(y)$ devono essere finite per quasi tutti gli x di $(0, 1)$, la prima, e per quasi tutti gli y di $(0, 1)$ la seconda, ed inoltre tali variazioni totali devono risultare integrabili. Si giunge così alla definizione analitica delle funzioni a variazione limitata, definizione che vale per le funzioni continue ed anche per quelle discontinue: la $f(x, y)$ dicesi *a variazione limitata in* Q se le variazioni totali $V_y(x)$ e $V_x(y)$ sono quasi dappertutto finite rispettivamente per x e y in $(0, 1)$, e se, inoltre, esse sono integrabili, nel senso del LEBESGUE, in tale intervallo.

Da questa definizione risulta subito che, se la $f(x, y)$ è a variazione limitata in Q, in quasi tutto Q esistono finite le due derivate parziali f_x' e f_y', e tali derivate risultano superficialmente integrabili in Q.

La forma geometrica della definizione di funzione a variazione limitata rende intuitiva la proposizione, da me stabilita, secondo la quale la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie continua S sia quadrabile è che la $f(x, y)$ risulti a variazione limitata. In questa proposizione la quadrabilità è intesa secondo la definizione generale di area data dal LEBESGUE, onde l'area di una superficie è il minimo limite delle aree delle superficie poliedriche tendenti alla superficie considerata; e siccome la quadrabilità è un fatto indipendente dall'orientamento degli assi x e y, ne viene che il concetto di funzione a variazione limitata è, *per le funzioni continue*, indipendente alla direzione degli assi coordinati.

Per le funzioni discontinue, invece, il concetto di funzione a variazione limitata non risulta indipendente dagli assi x e y: è ciò che hanno mostrato con un esempio ADAMS e CLARKSON. Peraltro, come ha fatto vedere il CESARI, una lieve modificazione della definizione da me data rende tale definizione di funzione a variazione limitata sempre indipendente dalla direzione degli assi x e y. Le nuove funzioni che così vengono definite, e che io ho proposto di chiamare *funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata*, sono quelle per le quali esiste in Q un insieme di punti E, di misura superficiale nulla, tale che, quando si calcolino le variazioni $V_x(y)$, $V_y(x)$, trascurando completamente i valori che la $f(x, y)$ assume nei punti dell'insieme E, queste variazioni risultino finite quasi dappertutto e integrabili in tutto l'intervallo $(0, 1)$. Per quanto riguarda le funzioni *continue*, la nuova classe di funzioni così definita coincide con quella delle funzioni a variazione limitata; ma essa risulta più ampia nel campo delle funzioni discontinue.

Del concetto di funzione di due variabili a variazione limitata io mi giovai, nel 1927, per giungere ad un teorema generale di convergenza riguardante le serie doppie di FOURIER, teorema dal quale discendono tutti i più importanti criteri di convergenza fino ad allora noti; in particolare potei così ottenere la prima dimostrazione rigorosa di un criterio molto semplice, enunciato al principio di questo secolo dal CERNI, il quale assicura la convergenza ovunque della serie doppia di FOURIER di una funzione lipschitziana, definita in un quadrato a lati paralleli agli assi coordinati e di lunghezza 2π. Del mio teorema generale, il CESARI diede un'estensione che io poi estesi a mia volta, ottenendo un enunciato in forma molto generale e semplice. E qui merita di esser ricordato un altro risultato del CESARI secondo il quale la serie doppia di FOURIER di una funzione periodica di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, quasi continua e generalmente a variazione limitata, converge quasi dappertutto verso la funzione medesima, e ciò tanto se s'intende la convergenza per rettangoli quanto se s'intende la convergenza per linee o per colonne.

* * *

Passiamo ora alle *funzioni di due variabili assolutamente continue.* Io ho chiamate così le funzioni continue che sono a variazione limitata e che, di più, su quasi tutte le parallele all'asse delle x risultano assolutamente continue come funzioni della sola x, e su quasi tutte le parallele all'asse delle y risultano assolutamente continue come funzioni della sola y.

Una funzione $f(x, y)$ continua, con derivate parziali del primo ordine continue, è certamente assolutamente continua; pertanto, in virtù di quanto abbiamo già detto, esistono delle funzioni assolutamente continue che *non* sono a variazione doppia limitata e quindi neppure doppiamente assolutamente continue. D'altro lato, ogni funzione $f(x, y)$, definita in Q e a variazione doppia limitata, può sempre decomporsi nella somma di una funzione a variazione limitata e di una funzione del tipo $\varphi(x)+\psi(y)$; ed analogamente, ogni funzione $f(x, y)$, definita in Q, e doppiamente assolutamente continua, può sempre decomporsi nella somma di una funzione assolutamente continua e di una funzione del tipo $\varphi(x)+\psi(y)$.

Del concetto di funzione di due variabili assolutamente continua, che risulta anch'esso indipendente dalla direzione degli assi x e y, mi sono servito per risolvere completamente il problema dell'espressione mediante il noto integrale classico dell'area di una superficie continua $z=f(x, y)$, quadrabile. Infatti, come ha provato il mio allievo LAMPARIELLO, se la superficie indicata è quadrabile, esiste finito l' integrale classico (inteso nel senso del LEBESGUE)

$$\iint_Q \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy\,;$$

ed io ho dimostrato che tale integrale è sempre minore od uguale all' area della superficie. Inoltre, ho anche dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente affinchè l' area sia proprio uguale all' integrale scritto è espressa dall' assoluta continuità della funzione $f(x, y)$.

Così il problema della quadratura delle superficie continue della forma $z=f(x, y)$ risulta pienamente risolto. Resta, dopo di ciò, da trattare lo stesso problema per le superficie continue date in forma parametrica: questione anch' essa assai ardua, che richiede profonde indagini di natura topologica e che finalmente è stata ora felicemente risolta dal CESARI per la quadrabilità intesa nel senso generale del LEBESGUE.

Dirò, infine, che, analogamente a quanto feci nel Calcolo delle Variazioni per gli integrali curvilinei della forma $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$, per mezzo dell' assoluta continuità potei costruire una teoria generale degli integrali doppi

$$\iint_Q f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy,$$

prendendo in considerazione la classe delle funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue; ed anche qui sussiste il risultato analogo a quello del LAVRENTIEFF, e cioè che la classe di queste funzioni è la più generale che possa utilmente prendersi in considerazione nel Calcolo delle Variazioni.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 7 settembre 1942-XX.