Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
*Classe di Scienze*

Luigi Amerio

**Sulla convergenza in media della serie $\sum_{0}^{\infty} {}_n a_n e^{i\lambda_n x}$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 10, nº 3-4 (1941), p. 191-198

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_191_0>

# SULLA CONVERGENZA IN MEDIA DELLA SERIE $\sum_0^\infty{}_n\, a_n\, e^{i\lambda_n x}$ (*)

di LUIGI AMERIO (Roma).

È noto (1) che se $\{\lambda_n\}$ è una successione di numeri reali soddisfacente alla condizione

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \delta > 0$$

e se $\{a_n\}$ è una successione di numeri complessi tale che la serie $\sum_0^\infty{}_n |a_n|^2$ sia convergente, la serie

$$\sum_0^\infty{}_n\, a_n\, e^{i\lambda_n x} \tag{1}$$

converge in media in ogni intervallo finito $a \leqslant x \leqslant b$ a una funzione $F(x)$ a quadrato integrabile in $a \vdash\!\dashv b$.

Si dimostra anzi che tale convergenza in media è uniforme nell'intervallo $(-\infty, \infty)$, nel senso che risulta

$$\lim_{N\to\infty} \int_k^{k+1} \left| \sum_0^N{}_n\, a_n\, e^{i\lambda_n x} - F(x) \right|^2 dx = 0 \tag{2}$$

uniformemente rispetto a $k$ variabile in $(-\infty, \infty)$.

Scopo di questa Nota è di indicare delle condizioni relative alle successioni $\{\lambda_n\}$ e $\{a_n\}$, comprendenti, come caso particolare, quelle ora ricordate, per l'uniforme convergenza in media nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ della serie $\sum_0^\infty{}_n\, a_n\, e^{i\lambda_n x}$.

A tale serie corrisponderà allora, per noti teoremi (2), una funzione $F(x)$ appartenente alla classe delle funzioni $\{S^2\}$ quasi periodiche secondo STEPHANOFF.

---

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Università di Roma.

(1) V. ad es. C. PALEY and N. WIENER: *Fourier Transforms in the complex domain*, Am. Math. Soc. Vol. XIX, 1934, p. 123, Theorem XLI.

(2) V. ad es. A. S. BESICOVITCH: *Almost periodic functions*, Cambridge, 1932, pp. 79, 81.

1. - Indicheremo, in quanto segue, con $\bar{a}_n$ il coniugato di $a_n$.

Posto poi, per $0 \leqslant N \leqslant R$, $p > 0$, $-\infty < k < \infty$,

$$S_{N,R}(k, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p|x|} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx$$

dimostriamo i seguenti teoremi.

TEOREMA I. - *Condizione necessaria e sufficiente per l'uniforme convergenza in media nell'intervallo* $(-\infty, \infty)$ *della serie* $\sum_{0}^{\infty}{}_n a_n e^{i\lambda_n x}$ *è che risulti, per un valore* $s > 0$,

$$\lim_{\substack{N \\ R}\Big\} \to \infty} S_{N,R}(k, s) = 0$$

*uniformemente rispetto a* $k$ *variabile in* $(-\infty, \infty)$.

*Dimostrazione.* - Siccome si ha, per $0 \leqslant N \leqslant R$, $-\infty < k < \infty$, $s > 0$,

$$0 \leqslant \int_{k}^{k+1} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx = \int_{0}^{1} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx$$

segue immediatamente che la condizione è sufficiente.

La condizione è necessaria. Preso $\varepsilon > 0$ e fissato un valore $s > 0$, si determini l'intero positivo $M$ in modo che risulti, per $M \leqslant N \leqslant R$, $-\infty < k < \infty$,

$$\int_{0}^{1} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx < \varepsilon \frac{1 - e^{-s}}{2}. \tag{3}$$

Si ha poi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{0}^{1} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx + \int_{0}^{1} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n(k-1)} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \right\} +$$

$$+ e^{-s} \left\{ \int_{0}^{1} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n(k+1)} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx + \int_{0}^{1} \left| \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n(k-2)} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \right\} +$$

$$+ \ldots < \varepsilon$$

per la (3).

TEOREMA II. - *Se esistono un intero positivo $T$ e un numero $s > 0$ tali che converga le serie*

$$\sum_T^\infty{}_n \sum_T^n{}_m \frac{|a_n a_m|}{s^2+(\lambda_n-\lambda_m)^2}$$

*la serie* $\sum_0^\infty{}_n a_n e^{i\lambda_n x}$ *converge uniformemente in media nell' intervallo* $(-\infty, \infty)$.

*Dimostrazione.* - Per il teorema I, basterà dimostrare che, nelle ipotesi poste, risulta

$$\lim_{\substack{N\\R}\}\to\infty} S_{N,R}(k, s) = 0 \tag{4}$$

uniformemente rispetto a $k$ variabile nell'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Ora si ha

$$\begin{aligned}
S_{N,R}(k, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|}\left|\sum_N^R{}_n a_n e^{i\lambda_n k}\, e^{i\lambda_n x}\right|^2 dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|}\left(\sum_N^R{}_n a_n e^{i\lambda_n k}\, e^{i\lambda_n x}\right)\left(\sum_N^R{}_n \bar{a}_n e^{-i\lambda_n k}\, e^{-i\lambda_n x}\right) dx = \\
&= \sum_{n,m}^{N\dots R} a_n \bar{a}_m e^{ik(\lambda_n-\lambda_m)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|}\, e^{i(\lambda_n-\lambda_m)x}\, dx = \\
&= 2\sum_{n,m}^{N\dots R} a_n \bar{a}_m e^{ik(\lambda_n-\lambda_m)} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos(\lambda_n-\lambda_m) x dx = \\
&= 2s\sum_{n,m}^{N\dots R} \frac{a_n \bar{a}_m e^{ik(\lambda_n-\lambda_m)}}{s^2+(\lambda_n-\lambda_m)^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

e quindi

$$0 \leqslant S_{N,R}(k, s) \leqslant \frac{2}{s}\sum_N^R{}_n |a_n|^2 + 4s\sum_{N+1}^R{}_n \sum_N^{n-1}{}_m \frac{|a_n a_m|}{s^2+(\lambda_n-\lambda_m)^2}. \tag{6}$$

Siccome è convergente la serie

$$\sum_T^\infty{}_n \sum_T^n{}_m \frac{|a_n a_m|}{s^2+(\lambda_n-\lambda_m)^2},$$

fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare $M \geqslant T$ in modo che per $N \geqslant M$ risulti

$$\sum_N^\infty{}_n \sum_T^n{}_m \frac{|a_n a_m|}{s^2+(\lambda_n-\lambda_m)^2} < \frac{\varepsilon}{4s}$$

e quindi, per la (6),

$$0 \leqslant S_{N,R}(k, s) < \varepsilon$$

che dimostra la (4).

**2.** - Indicheremo ora alcune conseguenze dei teoremi I e II nell'ipotesi che le successioni $\{a_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ soddisfino a particolari condizioni.

TEOREMA III. - *Se la successione* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa alla condizione*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \delta > 0,$$

*condizione necessaria e sufficiente per l'uniforme convergenza in media nell'intervallo* $(-\infty, \infty)$ *della serie* $\sum_0^\infty {}_n\, a_n e^{i\lambda_n x}$ *è che converga la serie*

$$\sum_0^\infty {}_n\, |a_n|^2.$$

*Dimostrazione.* - Si deduce dalla (5), per $p > 0$,

$$(7) \qquad \frac{2}{p}\left(\sum_N^R {}_n\, |a_n|^2 - 2\sum_{N+1}^R {}_n \sum_N^{n-1} {}_m \frac{|a_n a_m|}{1+\left(\frac{\lambda_n-\lambda_m}{p}\right)^2}\right) \leqslant S_{N,R}(k, p) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{p}\left(\sum_N^R {}_n\, |a_n|^2 + 2\sum_{N+1}^R {}_n \sum_N^{n-1} {}_m \frac{|a_n a_m|}{1+\left(\frac{\lambda_n-\lambda_m}{p}\right)^2}\right).$$

Si ha poi

$$(8) \qquad \sum_{N+1}^R {}_n \sum_N^{n-1} {}_m \frac{|a_n a_m|}{1+\left(\frac{\lambda_n-\lambda_m}{p}\right)^2} \leqslant \sum_{N+1}^R {}_n \sum_N^{n-1} {}_m \frac{|a_n a_m|}{1+\left(\frac{(n-m)\delta}{p}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\sum_{N+1}^R {}_n\, |a_n|^2 \sum_N^{n-1} {}_m \frac{1}{1+\left(\frac{(n-m)\delta}{p}\right)^2} + \sum_N^{R-1} {}_m\, |a_m|^2 \sum_{m+1}^R {}_n \frac{1}{1+\left(\frac{(n-m)\delta}{p}\right)^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_N^R {}_n\, |a_n|^2 \sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{1+\left(\frac{\nu\delta}{p}\right)^2}$$

e siccome è

$$\lim_{p\to 0} \sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{1+\left(\frac{\nu\delta}{p}\right)^2} = 0$$

si può determinare $s > 0$ in modo che risulti

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{1+\left(\frac{\nu\delta}{s}\right)^2} < \frac{1}{4}.$$

Per le (7), (8) si ottiene

$$\frac{1}{s}\sum_N^R {}_n\, |a_n|^2 \leqslant S_{N,R}(k, s) \leqslant \frac{3}{s}\sum_N^R {}_n\, |a_n|^2$$

e quindi, per il teorema I, la tesi è dimostrata.

TEOREMA IV. - *Se la successione* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa alla condizione*

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n > 0$$

*e se le serie*

$$\sum_0^\infty {}_n\, |a_n|^2, \qquad \sum_0^\infty {}_n\, \frac{|a_n|^2+|a_{n+1}|^2}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$$

*sono convergenti, la serie* $\sum_0^\infty {}_n\, a_n e^{i\lambda_n x}$ *converge uniformemente in media nell' intervallo* $(-\infty, \infty)$.

*Dimostrazione.* - Posto

$$S_{N,R}(k, 1)=S_{N,R}(k)$$

basterà provare, per il teorema I, che risulta

$$\lim_{\substack{N\\R}\}\to\infty} S_{N,R}(k)=0$$

uniformemente rispetto a $k$ variabile in $(-\infty, \infty)$.

Ora si ha, per la (5),

$$\begin{aligned}(9)\qquad 0 \leqslant S_{N,R}(k) &\leqslant 2\sum_N^R {}_n\, |a_n|^2+4\sum_{N+1}^R {}_n\, \frac{|a_n a_{n-1}|}{1+(\lambda_n-\lambda_{n-1})^2}+\\ &+4\sum_{N+2}^R {}_n\, |a_n| \sum_N^{n-2} {}_m\, \frac{|a_m|}{1+(\lambda_n-\lambda_m)^2} \leqslant\\ &\leqslant 6\sum_N^R {}_n\, |a_n|^2+4\sum_{N+2}^R {}_n\, |a_n| \sum_N^{n-2} {}_m\, \frac{|a_m|}{1+(\lambda_n-\lambda_m)^2}.\end{aligned}$$

Definiamo, nell' intervallo $0 \vdash \infty$, una funzione $g(x)$, ponendo $g(n)=\lambda_n$ per $n=0, 1, \ldots,$ e facendo variare la $g(x)$, per $n \leqslant x \leqslant n+1$, linearmente tra i valori $\lambda_n$ e $\lambda_{n+1}$.

Siccome è $\qquad \lambda_{n+1} > \lambda_n$

la funzione $g(x)$ è crescente.

Inoltre, per $n > m$, $n-1 \leqslant x \leqslant n$, $m \leqslant y \leqslant m+1$, risulta

$$\lambda_n-\lambda_m \geqslant |g(x)-g(y)|$$

e quindi

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{1+(\lambda_n-\lambda_m)^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} dx \int_{m}^{m+1} \frac{dy}{1+(g(x)-g(y))^2}\,.$$

Poniamo ora $\varphi_1(x)=|a_n|$ per $n-1 \leqslant x < n$, $\varphi_2(y)=|a_m|$ per $m \leqslant y < m+1$, con $n=1, 2,\ldots$; $m=0, 1\ldots$

Si ottiene dalla (10),

$$\frac{|a_n a_m|}{1+(\lambda_n-\lambda_m)^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \varphi_1(x)\, dx \int_{m}^{m+1} \frac{\varphi_2(y)\, dy}{1+(g(x)-g(y))^2}$$

e quindi

$$\text{(11)} \qquad \sum_{N+2}^{R} {}_n\, |a_n| \sum_{N}^{n-2} {}_m \frac{|a_m|}{1+(\lambda_n-\lambda_m)^2} \leqslant \int_{N}^{R} \varphi_1(x)\, dx \int_{N}^{x} \frac{\varphi_2(y)\, dy}{1+(g(x)-g(y))^2} = J_{N,R}\,.$$

Con il cambiamento di variabili

$$g(x)=t, \qquad g(y)=u$$

otteniamo, indicando con $\omega(t)$ la funzione inversa di $g(x)$,

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} J_{N,R} &= \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \varphi_1(\omega(t))\, \omega'(t)\, dt \int_{\lambda_N}^{t} \frac{\varphi_2(\omega(u))\, \omega'(u)}{1+(t-u)^2}\, du \\ &= \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_1(t)\, dt \int_{\lambda_N}^{t} \frac{h_2(u)}{1+(t-u)^2}\, du \end{aligned}$$

dove si è posto

$$h_1(t)=\varphi_1(\omega(t))\, \omega'(t)$$
$$h_2(u)=\varphi_2(\omega(u))\, \omega'(u).$$

Dalla (12) si ricava, con la trasformazione $t-u=z$,

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} J_{N,R} &= \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_1(t)\, dt \int_{0}^{t-\lambda_N} \frac{h_2(t-z)}{1+z^2}\, dz = \int_{0}^{\lambda_R-\lambda_N} \frac{dz}{1+z^2} \int_{\lambda_N+z}^{\lambda_R} h_1(t)\, h_2(t-z)\, dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \{ h_1^2(t)+h_2^2(t) \}\, dt = \frac{\pi}{4} \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \{ h_1^2(t)+h_2^2(t) \}\, dt. \end{aligned}$$

Ora si ha

$$\text{(14)} \qquad \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_1^2(t)\, dt = \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \varphi_1^2(\omega(t))\, \omega'^2(t)\, dt = \sum_{N}^{R-1} {}_n \frac{|a_{n+1}|^2}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$$

perchè, per $\lambda_n < t < \lambda_{n+1}$, risulta $\varphi_1\,(\omega(t))=|a_{n+1}|$, $\omega'(t)=\dfrac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\,.$

In modo analogo si ottiene

$$(15) \qquad \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_2^2(t)\, dt = \sum_N^{R-1}{}_n \frac{|a_n|^2}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}.$$

Per le (9), (11), (13), (14), (15), si ricava

$$0 \leqslant S_{N,R}(k) \leqslant 6 \sum_N^R{}_n |a_n|^2 + \pi \sum_N^R{}_n \frac{|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$$

e quindi il teorema è dimostrato.

Indichiamo ora alcuni corollari del teorema IV.

COROLLARIO I. - *Il teorema IV è valido se la successione* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa alla condizione*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c_n > 0$$

*con*

$$c_0 \geqslant c_1 \geqslant .... \geqslant c_n \geqslant ....$$

*e se è convergente la serie*

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{|a_n|^2}{c_n}.$$

*In particolare è valido il teorema IV se risulta*

$$0 < \lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant \lambda_n - \lambda_{n-1}$$

*e se converge la serie*

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{|a_n|^2}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}.$$

*Dimostrazione.* - Basta osservare che si ha

$$\frac{|a_{n+1}|^2}{c_n} \leqslant \frac{|a_{n+1}|^2}{c_{n+1}}.$$

COROLLARIO II. - *Il teorema IV è valido se risulta*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant H\{(n+1)^\beta - n^\beta\}$$

*con* $H > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$, *e se converge la serie*

$$\sum_1^\infty{}_n\, n^{1-\beta}\, |a_n|^2.$$

*Dimostrazione.* - Basta evidentemente considerare il caso in cui sia $0<\beta<1$. In tale ipotesi osserviamo che, posto, per $x > 0$,

$$f(x) = (x+1)^\beta - x^\beta,$$

si ha, essendo $0 < \beta < 1$,

$$f'(x) = \beta \left\{ \frac{1}{(x+1)^{1-\beta}} - \frac{1}{x^{1-\beta}} \right\} < 0$$

e quindi, per $n = 1, 2, \ldots,$

$$(n+1)^{\beta} - n^{\beta} \leqslant n^{\beta} - (n-1)^{\beta}.$$

Siccome poi risulta

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-\beta} \left\{ (n+1)^{\beta} - n^{\beta} \right\} = \lim_{n\to\infty} n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta} - 1 \right\} = \beta,$$

per il corollario I la tesi è provata.

COROLLARIO III. - *Il teorema IV vale se risulta*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant H \left\{ \log (n+2) - \log (n+1) \right\}$$

*con* $H > 0$, *e se converge la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} {}_n\, n \, | a_n |^2.$$

*Dimostrazione.* - Si ha, per $n = 1, \ldots,$

$$\log (n+2) - \log (n+1) = \log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log (n+1) - \log n$$

e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$