ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Sulle funzioni assolutamente continue in due variabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 2 (1941), p. 91-101
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_2_91_0>

SULLE FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE IN DUE VARIABILI (1)

di LAMBERTO CESARI (Pisa).

Una funzione $f(x, y)$ definita nel quadrato $A(0, 0, 1, 1)$ si dice assolutamente continua secondo TONELLI se, per quasi tutti i valori $\overline{x}$ e $\overline{y}$ di $(0, 1)$ le $f(\overline{x}, y)$ e $f(x, \overline{y})$ sono funzioni assolutamente continue rispettivamente della y e della x in $(0, 1)$, e se inoltre le variazioni totali $V_y(\overline{x})$ e $V_x(\overline{y})$ della $f(\overline{x}, y)$ e $f(x, \overline{y})$ in $(0, 1)$ sono funzioni, rispettivamente della $\overline{x}$ e della $\overline{y}$, integrabili in $(0, 1)$ (2).

Una funzione assolutamente continua è dotata quasi ovunque in A di derivate parziali prime e queste risultano integrabili L in A. Una tale funzione può però non essere differenziabile secondo STOLZ (3). S. SAKS (4) ha costruito infatti un esempio di funzione assolutamente continua che in nessun punto di A è differenziabile secondo STOLZ.

Scopo della presente nota è di dimostrare (§ 1) il

TEOREMA. - *Se $f(x, y)$ è assolutamente continua secondo Tonelli in A e le sue derivate parziali prime sono integrabili $L^{2+\alpha}$ con un $\alpha > 0$, la $f(x, y)$ è differenziabile secondo Stolz quasi ovunque in A.*

In questo teorema la sola derivabilità L^2 delle derivate parziali prime della funzione *non* è sufficiente. Infatti utilizzando il metodo usato da S. SAKS è possibile costruire (§ 2) *un esempio di funzione assolutamente continua secondo Tonelli dotata quasi ovunque in A di derivate parziali prime integrabili L^2 in A, che in nessun punto di A è differenziabile secondo Stolz.*

---

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) L. TONELLI: *Sulla quadratura della superficie.* Rend. Reale Accad. dei Lincei, Ser. VI, Vol. III (1926), pp. 633-638.

(3) Una funzione $f(x, y)$ definita in A si dice differenziabile secondo STOLZ in un punto (x_0, y_0) se per tutti i punti (x, y) di A si può scrivere

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = M(x - x_0) + N(y - y_0) + \varrho\varepsilon(x, y, x_0, y_0)$$

ove M, N sono indipendenti da x e y, $\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ed esiste un infinitesimo $\varepsilon(\varrho)$ tale che

$$|\varepsilon(x, y, x_0, y_0)| \leq \varepsilon(\varrho), \qquad \lim_{\varrho \to 0} \varepsilon(\varrho) = 0.$$

(4) S. SAKS: *On the surfaces without tangent planes.* Annals of Mathematics, Ser. II, Vol. 34 (1933), pp. 114-124.

§ 1. - Dimostrazione del teorema.

1. - Sia $f(x, y)$ una funzione soddisfacente alle ipotesi del teorema.

Sia (x_0, y_0) un punto di A e sia $C \equiv C(x_0, y_0, r)$ il cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio r del piano (x, y).

Cominciamo col dimostrare che *esiste un insieme E di misura nulla di punti di A tali che per ogni punto (x_0, y_0) di A fuori di E e per ogni coppia di numeri reali c_1 e c_2, si ha* [5]

$$(1)\qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C(x_0, y_0, r)} \left[\left| \frac{\partial f}{\partial x} - c_1 \right|^{2+\alpha} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} - c_2 \right|^{2+\alpha} \right] dx\,dy =$$
$$= \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c_1 \right|^{2+\alpha} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} - c_2 \right|^{2+\alpha} \right\}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Sia e l'insieme di misura nulla di punti di A costituito di tutti i punti del contorno di A e di tutti quei punti in cui non è:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C(x_0, y_0, r)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{1+\alpha} dx\,dy = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{1+\alpha}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} < \infty.$$

Sia e' l'analogo insieme relativo alla derivata $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Sia c' un qualunque numero razionale e diciamo $e_{c'}$ l'insieme di misura nulla dei punti di A in cui non è

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C(x_0, y_0, r)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c' \right|^{2+\alpha} dx\,dy = \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c' \right|^{2+\alpha}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} < \infty.$$

Diciamo $e'_{c'}$ l'analogo insieme relativo alla derivata $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Sia infine

$$E = e + e' + \sum e_{c'} + \sum e'_{c'},$$

ove le sommatorie sono estese a tutti i numeri razionali c' positivi e negativi. E è di misura nulla.

Sia ora (x_0, y_0) un punto di A fuori di E e c un numero irrazionale.

Siano $N > \left| \dfrac{\partial f}{\partial x} \right|^{1+\alpha}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ un numero reale *finito*, $\varepsilon > 0$ un numero reale e c' un numero *razionale* tale che

$$|c'| \leq |c|, \quad |c - c'| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad \frac{\varepsilon}{|c|^{1+\alpha}}.$$

---

[5] Cfr. per questa proposizione e per la sua dimostrazione il ben noto Lemma di Lebesgue: H. LEBESGUE: *Recherches sur la convergence des series de Fourier*. Math. Annalen Bd. 61 (1905), pp. 251-280. V. anche L. TONELLI: *Serie trigonometriche*. Zanichelli, 1928, p. 174.

Sia inoltre $r_0 > 0$ un numero tale che per ogni $0 < r < r_0$ si abbia

$$\left| \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C(x_0, y_0, r)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c' \right|^{2+\alpha} dx\, dy - \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c' \right|^{2+\alpha}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \right| < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C(x_0, y_0, r)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{1+\alpha} dx dy < \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{1+\alpha}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + N.$$

È allora, per ogni $0 < r < r_0$,

$$\left| \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c \right|^{2+\alpha} dx\, dy - \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c' \right|^{2+\alpha} dx\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C} \left| \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c \right|^{2+\alpha} - \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c' \right|^{2+\alpha} \right| dx dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1 | c - c' |}{\pi r^2} \iint\limits_{C} \left| \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + | c | \right|^{1+\alpha} dx dy \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C_2 | c - c' | \left\{ \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{1+\alpha} dx dy + | c |^{1+\alpha} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C_2 | c - c' | \left\{ N + N + | c |^{1+\alpha} \right\} \leqslant 3 C_1 C_2 \varepsilon$$

ove C_1 e C_2 sono costanti che dipendono solo da α (6).

Infine

$$\left| \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c \right|^{2+\alpha} dx\, dy - \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c \right|^{2+\alpha}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \right| < \varepsilon + 2 C_1 C_2 \varepsilon + 3 C_1 C_2 \varepsilon = (1 + 5 C_1 C_2) \varepsilon.$$

Ne segue che in (x_0, y_0) si ha

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C(x_0, y_0, r)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c \right|^{2+\alpha} dx\, dy = \left| \frac{\partial f}{\partial x} - c \right|^{2+\alpha}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Analogo risultato si ha per la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$. La (1) è così dimostrata in tutto A fuori di E e qualunque siano i numeri reali c_1 e c_2.

2. - Da quanto si è visto nel numero 1 segue, in forza della (1), che in tutti i punti (x_0, y_0) di A, ad eccezione al più di un insieme E di misura nulla, si ha

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{C(x_0, y_0, r)} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \right|^{2+\alpha} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \right|^{2+\alpha} \right\} dx dy = 0. \tag{2}$$

Diremo $I_r(x_0, y_0)$ la quantità sotto il segno di limite.

---

(6) C_1 e C_2 sono quelle costanti positive minime per le quali, qualunque siano i numeri reali a, b, $a \geqslant b \geqslant 0$, si ha $a^{2+\alpha} - b^{2+\alpha} \leqslant C_1 a^{1+\alpha}(a - b)$, $(a + b)^{1+\alpha} \leqslant C_2 (a^{1+\alpha} + b^{1+\alpha})$.

3. - Sia $Q \equiv (x_0, y_0)$ un punto *interno* ad A e sia $\mathfrak{L}$ una curva continua tutta *interna* ad A e dotata nelle coordinate polari (ϱ, θ), $x = x_0 + \varrho \cos \theta$, $y = y_0 + \varrho \operatorname{sen} \theta$, di rappresentazione

$$\varrho = \varrho(\theta), \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1, \qquad (0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant 2\pi, \quad \theta_1 - \theta_0 = \omega)$$

ove $\varrho(\theta)$, $0 < r_1 \leqslant \varrho(\theta) \leqslant r_2$ è una funzione continua di ϱ in (θ_0, θ_1). Sia L la regione di A formata dai punti (ϱ, θ) tali che

$$0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho(\theta), \qquad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 .$$

Dimostriamo che *se per tutti i punti* (x, y) *di* $\mathfrak{L}$ *si ha*

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \geqslant \delta \geqslant 0,$$

allora

$$\iint_L \left[\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{2+\alpha} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{2+\alpha} \right] dx dy \geqslant \frac{C \delta^{2+\alpha} \omega}{r_2^{\alpha}} \tag{3}$$

ove C è una costante assoluta che dipende solo da α e che è >0 per $\alpha > 0$.

Per $\delta = 0$ la (3) è evidente. Sia dunque $\delta > 0$. Sia $l_0 > 0$ la minima distanza di $\mathfrak{L}$ e di Q dalla periferia di A. Diciamo $[a, b, c, d]$ il quadrato $l_0 \leqslant x, y \leqslant 1 - l_0$.

Siano

$$f^{(1)}(x, y), \quad f^{(2)}(x, y), \ldots, \quad f^{(l)}(x, y), \ldots$$

i polinomi di STIELTES (7) della funzione $f(x, y)$ in A. È noto che, uniformemente nel quadrato (a, b, c, d) e quindi in L, si ha

$$\lim_{l \to \infty} f^{(l)}_{(x, y)} = f(x, y)$$

e inoltre

$$\lim_{l \to \infty} \iint_L \left\{ |f_x^{(l)}|^{2+\alpha} + |f_y^{(l)}|^{2+\alpha} \right\} dx dy = \iint_L \left\{ |f_x|^{2+\alpha} + |f_y|^{2+\alpha} \right\} dx dy.$$

Sia $0 < \sigma < 1$ un numero arbitrario. Esisterà un intero l tale che per ogni (x, y) di $\mathfrak{L}$

$$|f^{(l)}(x, y) - f^{(l)}(x_0, y_0)| \geqslant \delta(1 - \sigma),$$

e inoltre

$$\iint_L \left\{ |f_x^{(l)}|^{2+\alpha} + |f_y^{(l)}|^{2+\alpha} \right\} dx dy < \sigma + \iint_L \left\{ |f_x|^{2+\alpha} + |f_y|^{2+\alpha} \right\} dx dy. \tag{4}$$

---

(7) Cfr. per una trattazione generale di questi polinomi L. TONELLI: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*. Rend. Circolo Mat. di Palermo, Tomo XXIX (1910), pp. 1-36. Per il teorema che qui occorre vedi S. CINQUINI: *Sull'approssimazione delle funzioni di due variabili*, Annali di Mat. pura e applicata, S. IV, T. XI (1933), pp. 295-323 n. 3, Teor. III, nel quale si faccia $L \equiv D$, $D_1 \equiv D' \equiv A$.

Diciamo T l'integrale a primo membro e osserviamo che la funzione $f^{(l)}(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime continue in tutto A e quindi, introdotte le coordinate polari (ϱ, θ), si ha

$$f_x^{(l)} = f_\varrho^{(l)} \cos\theta - \frac{1}{\varrho} f_\theta^{(l)} \operatorname{sen}\theta, \qquad f_y^{(l)} = f_\varrho^{(l)} \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\varrho} f_\theta^{(l)} \cos\theta.$$

Da qui si deduce

$$\left[f_x^{(l)}\right]^2 + \left[f_y^{(l)}\right]^2 = \left[f_\varrho^{(l)}\right]^2 + \left[\frac{1}{\varrho} f_\theta^{(l)}\right]^2$$

$$\left[f_\varrho^{(l)}\right]^2 \leqslant 2 \max\left[\left[f_x^{(l)}\right]^2, \left[f_y^{(l)}\right]^2\right]$$

$$\left|f_\varrho^{(l)}\right|^{2+\alpha} \leqslant 2^{1+\alpha/2} \max\left[\left|f_x^{(l)}\right|^{2+\alpha}, \left|f_y^{(l)}\right|^{2+\alpha}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1+\alpha/2}\left[\left|f_x^{(l)}\right|^{2+\alpha} + \left|f_y^{(l)}\right|^{2+\alpha}\right].$$

Ne risulta

$$T \geqslant \frac{1}{2^{1+\alpha/2}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_0^{\varrho(\theta)} \varrho \left| f_\varrho^{(l)} \right|^{2+\alpha} d\varrho\, d\theta.$$

Sia ora θ un numero qualunque, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, e si ponga

$$\varrho(\theta) = a, \qquad \varrho = at, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad 0 < r_1 \leqslant a \leqslant r_2$$
$$\delta(\theta) = f^{(l)}[\varrho(\theta), \theta] - f^{(l)}(x_0, y_0), \qquad |\delta(\theta)| \geqslant \delta(1-\sigma)$$

e infine su tutto il segmento $x = x_0 + \varrho\cos\theta$, $y = y_0 + \varrho \operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho(\theta)$,

$$f^{(l)}(x, y) = f^{(l)}(x_0, y_0) + \delta(\theta)\,\varphi(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

La funzione $\varphi(t)$ riesce una funzione dotata di derivata prima continua in $(0, 1)$ e $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Si ha infine

$$\int_0^{\varrho(\theta)} \varrho \left| f_\varrho^{(l)} \right|^{2+\alpha} d\varrho = \frac{|\delta(\theta)|^{2+\alpha}}{a^\alpha} \int_0^1 t \left| \varphi'(t) \right|^{2+\alpha} dt.$$

Ma esiste una costante C, che dipende solo da α e che è >0 per $\alpha > 0$ tale che (8)

$$\int_0^1 t\,|\varphi'(t)|\,dt \geqslant C, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 1.$$

---

(8) L. TONELLI: *Un teorema sul Calcolo delle Variazioni.* Rend. Reale Accad. dei Lincei, Ser. 6ª, Vol. XV (1932), pp. 417-423.

Ne segue successivamente

$$\int_0^{\varrho(\theta)} \varrho \left| \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha} d\varrho \geqslant \frac{C\,|\,\delta(\theta)\,|^{2+\alpha}}{a^{\alpha}} \geqslant \frac{C(1-\sigma)^{2+\alpha}}{r_2^{\,\alpha}}\,\delta^{2+\alpha}$$

$$T \geqslant \frac{1}{2^{1+\alpha/2}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{C(1-\sigma)^{2+\alpha}}{r_2^{\,\alpha}}\,\delta^{2+\alpha}\,d\theta = \frac{C(1-\sigma)^{2+\alpha}\,\omega}{2^{1+\alpha/2}\,r_2^{\,\alpha}}\,\delta^{2+\alpha}$$

e infine per la (4)

$$\iint_L \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{2+\alpha} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{2+\alpha} \right\} dx\,dy > \frac{C(1-\sigma)^{2+\alpha}\,\omega}{2^{1+\alpha/2}\,r_2^{\,\alpha}}\,\delta^{2+\alpha} - \sigma .$$

Ma $0 < \sigma < 1$ è un numero arbitrario e quindi

$$\iint_L \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{2+\alpha} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{2+\alpha} \right\} dx\,dy \geqslant \frac{C\omega}{2^{1+\alpha/2}\,r_2^{\,\alpha}}\,\delta^{2+\alpha} \tag{5}$$

ove C è una costante assoluta che dipende solo da α e che è > 0 per $\alpha > 0$.

4. - Sia (x_0, y_0) un punto di A fuori di E. In (x_0, y_0) esistono entrambe finite le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Consideriamo la funzione

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} (y - y_0).$$

Il punto (x_0, y_0) è interno ad A. Sia r abbastanza piccolo perchè anche il cerchio $C(x_0, y_0, r)$ sia tutto interno ad A.

Diciamo A, B e C, D le intersezioni del contorno di C con le rette $x = x_0$ e $y = y_0$ rispettivamente.

Sia $P \equiv (x, y) \equiv (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ un punto del contorno di C e poniamo

$$\lambda(P, r) = \begin{cases} \min\limits_{-r \leqslant \xi \leqslant r} |\,\varphi(x_0 + \xi, y_0) - \varphi(x, y)\,| \text{ se } \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ oppure se } \left|\theta - \frac{3\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \min\limits_{-r \leqslant \eta \leqslant r} |\,\varphi(x_0, y_0 + \eta) - \varphi(x, y)\,| \text{ se } |\,\theta\,| \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ oppure se } |\,\theta - \pi\,| \leqslant \frac{\pi}{4} . \end{cases} \tag{6}$$

Per $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ assumiamo per $\lambda(P, r)$ il più grande dei due valori che la (6) fornisce.

Sia infine $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}) = (r \cos \bar{\theta}, r \operatorname{sen} \bar{\theta})$ un punto del contorno di C per il quale $\lambda(P, r)$ assuma il suo massimo valore. Sia questo $\lambda(r)$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $\frac{\pi}{4} \leqslant \bar{\theta} \leqslant \frac{3\pi}{4}$. Allora la differenza tra i valori che $\varphi(x, y)$ assume in $\bar{P}$ e quelli che la $\varphi(x, y)$ assume nel segmento AB è $\geqslant \lambda(r)$. Diciamo L il triangolo $A\bar{P}B$ che è rettangolo in $\bar{P}$. La distanza di $\bar{P}$ dai punti di AB

è compresa tra $r_1=r/\sqrt{2}$ e $r_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,r$. Tutte le condizioni ammesse nel n. 3 sono ora soddisfatte ove si sostituisca al punto Q il punto $\bar{P}$, a $\mathfrak{L}$ il segmento AB, alla funzione f la funzione φ. L'angolo ω è qui $\omega=\pi/2$ e il punto $\bar{P}$, quanto il segmento AB, sono *interni* ad A. Per la (5) (ossia la (3) del n. 3) si ha

$$\iint_L \{|\varphi_x|^{2+\alpha}+|\varphi_y|^{2+\alpha}\}\,dx\,dy \geqslant \frac{C\pi}{2^{2+\alpha/2}(2+\sqrt{2})^{\alpha/2}\,r^\alpha}\,\lambda^{2+\alpha}(r).$$

Ma

$$\varphi_x=f_x-(f_x)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\qquad \varphi_y=f_y-(f_y)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

e d'altra parte L è completamente contenuto nel cerchio $C(x_0, y_0, r)$. Ricordando la definizione di $I_r(x_0, y_0)$ introdotta nel n. 2, si ha

$$I_r(x_0, y_0) \geqslant \frac{1}{\pi r^2}\,\frac{C\pi}{2^{2+\alpha/2}(2+\sqrt{2})^{\alpha/2}r^\alpha}\,\lambda^{2+\alpha}(r).$$

Ma (x_0, y_0) è un punto di A fuori di E e quindi vale la (2) del n. 2, ossia esiste un infinitesimo $\varepsilon(r)$ tale che

$$I_r(x_0, y_0) \leqslant \varepsilon(r)$$

e quindi

$$\lambda^{2+\alpha}(r) \leqslant \frac{2^{2+\alpha/2}(2+\sqrt{2})^{\alpha/2}}{C}\,r^{2+\alpha}\,\varepsilon(r),$$

e se C una opportuna costante positiva e finita e $\varepsilon_1(r)=\varepsilon^{\frac{1}{2+\alpha}}(r)$

$$\lambda(r) \leqslant Cr\varepsilon_1(r),\qquad \lim_{r\to 0}\varepsilon_1(r)=0. \tag{7}$$

Osserviamo che la funzione $\varphi(\xi, y_0)$ per $\xi=x_0$ è differenziabile come funzione della sola ξ e che la funzione $\varphi(x_0, \eta)$ per $\eta=y_0$ è differenziabile come funzione della sola η. D'altra parte $\varphi(x, y)$ ha in (x_0, y_0) derivate parziali prime nulle e quindi esiste un infinitesimo $\varepsilon_2(r)$ tale che

$$\begin{cases} |\varphi(x_0+\xi, y_0)| \leqslant r\varepsilon_2(r) & \text{per} \quad -r\leqslant\xi\leqslant+r,\\ |\varphi(x_0, y_0+\eta)| \leqslant r\varepsilon_2(r) & \text{per} \quad -r\leqslant\eta\leqslant+r. \end{cases} \tag{8}$$

Per ogni punto $P\equiv(x, y)$ del contorno di C si ha

$$\lambda(P, r) \leqslant \lambda(r)$$

e in forza delle (6), (7), (8)

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \lambda(P, r)+r\varepsilon_2(r) \leqslant r[C\varepsilon_1(r)+\varepsilon_2(r)]=r\varepsilon_3(r),$$

ossia

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)-(x-x_0)(f_x)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}-(y-y_0)(f_y)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}| < r\varepsilon_3(r),$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\qquad \lim_{r\to 0}\varepsilon_3(r)=0,$$

ciò che dimostra la differenziabilità secondo STOLZ della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0). Ma (x_0, y_0) è un punto qualunque di A fuori dell' insieme di misura nulla E, da cui l' asserto.

§ 2. - Sull' esempio di S. Saks.

5. - Dobbiamo qui dimostrare che *esiste una funzione $f(x, y)$ assolutamente continua secondo Tonelli in A, dotata, quasi ovunque in A, di derivate parziali prime f_x e f_y integrabili L^2 in A, che in nessun punto di A è differenziabile secondo Stolz.*

Per questo ci serviremo del medesimo procedimento che ha adoperato S. SAKS [9] per dimostrare l' analogo risultato relativo alle funzioni soltanto assolutamente continue secondo TONELLI.

Sia T_2 la totalità delle funzioni assolutamente continue nel quadrato A, dotate di derivate parziali prime integrabili L^2. Se $u(x, y)$ è una funzione di T diciamo *norma* di u il seguente numero reale $\geqslant 0$

$$\| u \| = \max_A |u(x, y)| + \left[\int_0^1\!\!\int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dxdy \right]^{1/2}.$$

Diciamo poi distanza tra le due funzioni u e v di T_2 la quantità $\| u-v \|$ che indicheremo talvolta con

$$\| u, v \|.$$

Lo spazio T_2 è con ciò evidentemente *metrico* e *lineare*. È facile dimostrare che T_2 è *completo*, ossia che se $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ è una successione di funzioni di T_2 e

$$\lim_{m, n \to \infty} \| u_m, u_n \| = 0,$$

allora u_n converge uniformemente verso una funzione u appartenente a T_2 e inoltre

$$\lim_{n \to \infty} \| u_n, u \| = 0 \quad [10].$$

---

[9] Loc. cit. in [4].

[10] Infatti poichè $\lim_{m, n \to \infty} \| u_m, u_n \| = 0$ anche $\lim_{m, n \to \infty} \max_A |u_m - u_n| = 0$ e quindi esiste una funzione $u(x, y)$ continua in A tale che $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ uniformemente in A. Di più esistono due funzioni $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ integrabili L^2 (E. W. HOBSON: *The theory of functions of a real variable*. Vol. II, 2ª Ed., Cambridge, 1926, nn. 171-172) tali che

$$(*) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1\!\!\int_0^1 [(u_n)_x - g_1]^2 dxdy = 0, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1\!\!\int_0^1 [(u_n)_y - g_2]^2 dxdy = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1\!\!\int_0^1 (u_n)_x^2 \, dxdy = \int_0^1\!\!\int_0^1 g_1^2 \, dxdy, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1\!\!\int_0^1 (u_n)_y^2 \, dxdy = \int_0^1\!\!\int_0^1 g_2^2 \, dxdy. \end{cases}$$

Diciamo I l'insieme delle funzioni appartenenti a T_2 per le quali in tutti i punti (x, y) di A

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left| \frac{1}{t}\left[u(x+t\cos\theta,\, y+t\operatorname{sen}\theta)-u(x,y)\right]\right| = +\infty.$$

Diciamo A_n l'insieme delle funzioni di T_2 per le quali esiste almeno un punto $x=x_0$, $y=y_0$, $\frac{1}{n}\leq x_0, y_0\leq 1-\frac{1}{n}$ di A tale che per tutti i $0<t\leq\frac{1}{n}$

$$\max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left| \frac{1}{t}\left[u(x+t\cos\theta,\, y+t\operatorname{sen}\theta)-u(x,y)\right]\right| \leq n.$$

Le funzioni differenziabili almeno in un punto di A appartengono ad uno degli insiemi A_n. Manifestamente $T_2=I+\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ e gli insiemi A_n sono chiusi.

Ma per ogni (x, y) di A

$$\left| \int_0^x\!\!\int_0^y (u_n)_x\, dxdy - \int_0^x\!\!\int_0^y g_1\, dxdy \right| \leq \left\{ \int_0^1\!\!\int_0^1 [(u_n)_x - g_1]^2\, dx\, dy \right\}^{1/2}$$

e quindi per la (*)

$$(**)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^x\!\!\int_0^y (u_n)_x\, dxdy = \int_0^x\!\!\int_0^y g_1\, dxdy.$$

La funzione, della sola x, $u_n(x, y_0)$ è assolutamente continua per quasi tutti gli y_0, e quindi, per quasi tutti gli y_0, si ha, per ogni x,

$$\int_0^x\!\!\int_0^{y_0} (u_n)_x\, dxdy = \int_0^{y_0} u_n\, dy, \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Ma entrambi i membri di questa uguaglianza rappresentano funzioni continue in A e quindi, per *tutti* gli (x, y) di A,

$$\int_0^x\!\!\int_0^y (u_n)_x\, dxdy = \int_0^y u_n\, dy.$$

Infine per la (**)

$$(a)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^y u_n\, dy = \int_0^x\!\!\int_0^y g_1\, dxdy.$$

D'altra parte $u_n \to u$ uniformemente in A e quindi per la (a)

$$\int_0^y u\, dy = \int_0^x\!\!\int_0^y g_1\, dxdy$$

e, per il teorema di FUBINI,

$$\int_0^y \left[u - \int_0^x g_1\, dx\right] dy = 0.$$

Noi dimostreremo che gli insiemi A_n sono mai densi e allora, per un teorema di BAIRE, l'insieme I è non vuoto.

Sia $u(x, y)$ una funzione appartenente all'insieme A_N.

Poniamo $\sigma_n = \max |u(x, y) - u(x', y')|$ per tutti i punti $P = (x, y)$, $P' = (x', y')$ di A tali che $\overline{PP'} \leq \frac{1}{n}$. Manifestamente $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = 0$.

Consideriamo per ogni intero n i punti $P_{ij}^{(n)} \equiv \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$ e i cerchi $C_{ij}^{(n)}$ di centro $P_{ij}^{(n)}$ e raggio $r_n = \frac{1}{3n}$. Sia $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ una successione di numeri reali positivi tali che $-\log \varrho_n > 8\pi(n-1)^2$, $\varrho_n < 1$ e costruiamo i cerchi $C'^{(n)}_{ij}$ concentrici ai precedenti e di raggio $\varrho_n r_n < r_n$. Sia infine $v_n(x, y)$ la funzione identicamente nulla in tutto A fuori dei cerchi $C_{ij}^{(n)}$, uguale a $2(\sigma_n + n^{-1/2})$ nei cerchi $C'^{(n)}_{ij}$ e definita in tutti i punti (x, y) della corona circolare $C_{ij}^{(n)} - C'^{(n)}_{ij}$ ponendo [11]

$$x = \frac{i}{n} + t \cos \theta, \quad y = \frac{j}{n} + t \operatorname{sen} \theta, \quad r_n \varrho_n \leq t \leq r_n,$$

$$v_n(x, y) = \frac{\log r_n - \log t}{-\log \varrho_n} \cdot 2(\sigma_n + n^{-1/2}).$$

Per un noto teorema (L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti.* Rend. R. Accad. dei Lincei, Ser. 5ª, Vol. XVIII (1909), pp. 246-253) segue che, quasi ovunque in A, deve essere

$$(\beta) \qquad u(x, y) = \int_0^x g_1(\xi, y)\, d\xi.$$

Sia E l'insieme di misura nulla dei punti di A nei quali la β non è vera. Diciamo e l'insieme di misura lineare nulla dei numeri $\bar{y}$ di (0, 1) tali che E sega sulla retta $y = \bar{y}$ un insieme di misura lineare non nulla (o non misurabile) oppure tali che $g_1(\xi, \bar{y})$ sia non integrabile L (o non misurabile). Allora per ogni $y = y_0$ non appartenente ad e la (β) vale per *quasi tutti* i valori x e i due membri della (β) stessa sono funzioni continue di x. Per tali valori di y la (β) vale allora per *tutti* gli x e quindi $u(x, y_0)$ riesce una funzione assolutamente continua della sola x. La funzione della sola x, $u(x, y_0)$ è dunque assolutamente continua per quasi tutti gli y_0. Analogo risultato scambiando x con y.

Ma $u(x, y)$ è una funzione continua e quindi l'insieme dei punti (x, y) di A in cui manca la derivata $p(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ è un insieme di BAIRE (cfr. C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen ü. reelle Funktionen.* Teubner (1927), nn. 472, 557) e quindi misurabile. Ma tale insieme sega su quasi tutte le rette $y = \bar{y}$ un insieme di punti di misura nulla e dunque $p(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = g_1(x, y)$ quasi ovunque in A. Analogamente si dimostra che $q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = g_2(x, y)$ quasi ovunque in A. Dunque p e q sono integrabili L^2 e ciò basta per assicurare che $u(x, y)$ appartiene a T_2.

[11] Cfr. per questa posizione, L. TONELLI, loc. cit. in (8), pag. 423.

Evidentemente la funzione $v_n(x, y)$ appartiene a T_2 e inoltre, con calcoli elementari

$$\| v_n(x, y) \| = 2(\sigma_n + n^{-1/2}) + \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} \iint_{C_{ij}^{(n)} - C'^{(n)}_{ij}} \left[\left(v_n\right)_x^2 + \left(v_n\right)_y^2 \right] dxdy \right\}^{1/2}$$

$$= 2(\sigma_n + n^{-1/2}) + (\sigma_n + n^{-1/2}) \left\{ \frac{8\pi (n-1)^2}{-\lg \varrho_n} \right\}^{1/2}$$

e tenendo presente che $-\log \varrho_n > 8\pi(n-1)^2$

$$\| v_n(x, y) \| < 3(\sigma_n + n^{-1/2}).$$

Se ora consideriamo la funzione $u_n = u + v_n$ è evidente che

$$\lim_{n \to \infty} \| u_n, u \| = \lim_{n \to \infty} \| v_n \| = 0.$$

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto qualsiasi di A. Se

$$v_n(x_0, y_0) \leqslant \sigma_n + n^{-1/2}$$

allora esiste un punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ tale che $v_n(x_1, y_1) = 2(\sigma_n + n^{-1/2})$, $\overline{P_0 P_1} < \frac{1}{n}$ e quindi posto $x_1 = x_0 + t_1 \cos \theta_1$, $y_1 = y_0 + t_1 \operatorname{sen} \theta_1$, si ha $0 < t_1 < \frac{1}{n}$

$$\left| \frac{1}{t_1} \left[u_n(x_0 + t_1 \cos \theta_1, y_0 + t_1 \operatorname{sen} \theta_1) - u_n(x_0, y_0) \right] \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{t_1} \left[u(x_1, y_1) + v_n(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) - v_n(x_0, y_0) \right] \right| \geqslant n \cdot n^{-1/2} = n^{1/2}.$$

Se invece

$$v_n(x_0, y_0) > \sigma_n + n^{-1/2}$$

allora esiste un punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ tale che $v_n(x_1, y_1) = 0$, $\overline{P_0 P_1} < \frac{1}{n}$ e quindi posto $x_1 = x_0 + t_1 \cos \theta_1$, $y_1 = y_0 + t_1 \operatorname{sen} \theta_1$ si ha ancora $0 < t_1 < \frac{1}{n}$ e

$$\left| \frac{1}{t_1} \left[u_n(x_0 + t_1 \cos \theta_1, y_0 + t_1 \operatorname{sen} \theta_1) - u_n(x_0, y_0) \right] \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{t_1} \left[u(x_1, y_1) + v_n(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) - v_n(x_0, y_0) \right] \right| \geqslant n \cdot n^{-1/2} = n^{1/2}.$$

Dunque se $n > N^2$ la funzione u_n non può appartenere ad A_N. Gli insiemi A_N sono dunque mai densi in T_2.