

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

**Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale  
per l'analisi dei problemi di propagazione**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n° 2 (1941), p. 139-152

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1941\\_2\\_10\\_2\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_2_139_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTO ALLA SISTEMAZIONE TEORICA  
DEL METODO VARIAZIONALE PER L'ANALISI  
DEI PROBLEMI DI PROPAGAZIONE (\*)

di SANDRO FAEDO (Roma).

In una memoria <sup>(1)</sup>, uscita nei Rendiconti dell'Accademia di Scienze della Società Reale di Napoli nel 1936, M. PICONE ha dato un metodo, che ha chiamato *variazionale*, per integrare le equazioni differenziali alle derivate parziali della fisica - matematica. Esso è già stato applicato in varie questioni proposte all'*Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo* ed ha dato ottimi risultati, sia per il grado di approssimazione rapidamente raggiunto, che per la relativa brevità dei calcoli numerici, nel confronto con altri metodi noti <sup>(2)</sup>.

Tale metodo consiste sostanzialmente nel costruire una successione di funzioni, che, come M. PICONE <sup>(3)</sup> ha dimostrato, nell'ipotesi dell'esistenza della soluzione del problema, verificano le equazioni con un errore quadratico medio infinitesimo.

Si abbia, ad esempio, da integrare l'equazione differenziale

$$(1) \quad E(u) = 0,$$

dove  $E$  è un operatore differenziale del 2° ordine e  $u$  è funzione del posto  $P$  e del tempo  $t$ ; sono date opportune condizioni al contorno del campo  $C$ , in cui varia  $P$ , e al tempo iniziale  $t=0$ . Si ricerca la soluzione della (1), soddisfacente le condizioni assegnate per  $0 \leq t \leq T$  e  $P$  in  $C$ .

---

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

<sup>(1)</sup> M. PICONE: *Nuovi contributi all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione*. Serie IV, Vol. VI.

Cfr. anche M. PICONE: *Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione*. Atti 1° Congresso U. M. I., 1937, pp. 109-124.

<sup>(2)</sup> M. SALVADORI: *Le tensioni tangenziali nella sollecitazione di flessione, torsione, taglio*. Annali lavori pubblici, 1936.

B. BARILE: *Una particolare soluzione dell'equazione del calore*. Giorn. Ist. Ital. Attuari, An. IX, N. 4, 1938.

C. MINELLI - W. GROBNER: *Indagini sulle vibrazioni dei velivoli*. Aerotecnica, XIX, 4, 1939.

W. GROBNER: *Condotta forzata scavata in roccia*. L'Energia Elettrica, Vol. XVI, Fasc. VIII, 1939 e Atti II Congresso Mat. Applicata, Roma (23-25 Febbraio 1939-xvii).

<sup>(3)</sup> M. PICONE: Cfr. la prima Memoria cit. in <sup>(1)</sup>.

Secondo il metodo variazionale, l'approssimazione  $v^{ma}$  in media della soluzione si ottiene ponendo dapprima

$$u_v(P, t) = \sum_{i=1}^v \Phi_i(P) \omega_i(t)$$

dove le  $\Phi_i(P)$  sono opportune funzioni note; le  $\omega_i(t)$  si determinano poi in modo da rendere minimo l'integrale

$$(2) \quad \int_0^T \int_C q(P, t) [E(u_v)]^2 dP dt,$$

dove la  $q(P, t)$  è una assegnata funzione peso continua e positiva.

Se tale integrale fosse nullo, la  $u_v(P, t)$  darebbe la soluzione effettiva; altrimenti, come ha dimostrato M. PICONE sotto condizioni assai larghe, l'errore quadratico medio che si ha, sostituendo alla  $u$  la  $u_v$ , tende a zero per  $v \rightarrow \infty$ .

Un ulteriore contributo alla sistemazione teorica del metodo è stata data dal compianto amico B. MANIÀ <sup>(4)</sup>, in un lavoro uscito postumo negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore ».

Facendo uso dei metodi diretti della Scuola Italiana di Calcolo delle Variazioni, egli ha dimostrato l'esistenza del minimo dell'integrale (2), nel caso in cui si cerchi la soluzione in un intervallo finito  $(0, T)$  di tempo.

In tal caso ha anche risolto in modo affermativo la questione pregiudiziale della compatibilità delle equazioni di EULERO — per la ricerca del minimo di (2) — con le condizioni ai limiti imposte dal problema fisico.

Ma in varie questioni di Fisica - Matematica e di alta tecnica — talvolta di importanza nazionale — interessa spesso lo studio del fenomeno nell'intervallo infinito di tempo e principalmente lo studio del comportamento delle soluzioni (ad es. la loro stabilità) al tendere del tempo all'infinito <sup>(5)</sup>.

Il primo passo da compiere nel proseguimento della sistemazione del metodo variazionale è quindi la dimostrazione dell'esistenza del minimo anche nell'intervallo di tempo infinito e vedere se si abbia ancora la compatibilità del sistema delle equazioni di EULERO con le condizioni ai limiti.

Questo caso si distingue però nettamente da quello studiato da B. MANIÀ in quanto ora l'approssimazione  $v^{ma}$  può addirittura mancare.

<sup>(4)</sup> B. MANIÀ: *Sopra una questione di compatibilità nel metodo variazionale*. Vol. IX, pp. 79-97, 1940.

<sup>(5)</sup> Cfr. ad es. il problema trattato da B. BARILE nel lavoro citato in <sup>(2)</sup>. Tale problema, proposto all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo dal prof. F. GIORDANI, consiste nel determinare una soluzione approssimata di un'equazione a derivate parziali, per  $t$  in  $(0, \infty)$ .

Ciò però non infirma l'applicabilità del metodo variazionale perchè, con l'uso dei metodi della Scuola Italiana del Calcolo delle Variazioni (<sup>5</sup>), vien qui dimostrato che *si può sempre scegliere la funzione peso  $q(P, t)$  in modo che esista la  $v^{ma}$  approssimazione.*

Si danno anche dei criteri per effettuare tale scelta e si illumina l'utilità e l'importanza di questa funzione peso, anche ai fini dei calcoli pratici.

Per quel che riguarda l'effettiva determinazione delle successive approssimazioni, si stabilisce il sistema delle equazioni di EULERO e si prova la compatibilità di tali equazioni con le condizioni ai limiti.

Vengono così date al metodo variazionale solide basi, che assicurano in ogni caso l'esistenza e la possibilità di calcolare le successive approssimazioni.

Colgo qui l'occasione per ringraziare, dei consigli datimi, il mio Maestro L. TONELLI.

### Posizione del problema di propagazione.

1. - Prenderemo in esame un problema di propagazione molto generale e precisamente quello considerato da M. PICONE (<sup>6</sup>) nell'espone il metodo variazionale. Lo studio che faremo ha però carattere affatto generale e non dipende in alcun modo dal problema su cui fisseremo particolarmente la nostra attenzione.

È dato nello spazio  $(x, y, z)$  un corpo elastico, che al tempo  $t=0$  entra in vibrazione, e sia possibile di rappresentarlo biunivocamente sul cubo  $C \equiv (0, 0, 0; 1, 1, 1)$  in modo che ai suoi punti interni corrispondano punti interni di  $C$  e ai punti del suo contorno punti della frontiera di  $C$ .

Se

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(x, y, z, t) \\ u_2(x, y, z, t) \\ u_3(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

sono le componenti dello spostamento del generico punto di  $C$  al tempo  $t$ , tali funzioni soddisfano a un sistema di equazioni a derivate parziali del seguente tipo:

Nell'interno di  $C$ :

$$(4) \quad \sum_{k=1}^3 \left( p_{hk}^{11} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + p_{hk}^{22} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} + p_{hk}^{33} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + p_{hk}^{44} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \right. \\ \left. + p_{hk}^{23} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y \partial z} + p_{hk}^{31} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial z} + p_{hk}^{12} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + p_{hk}^{1x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + p_{hk}^{2y} \frac{\partial u_k}{\partial y} + p_{hk}^{3z} \frac{\partial u_k}{\partial z} + p_{hk}^{1t} \frac{\partial u_k}{\partial t} + p_{hk} u_k \right) - p_h = 0$$

con  $h=1, 2, 3$ ;

(<sup>5</sup>) Si tiene conto, in particolare, di un procedimento usato da S. CINQUINI: *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni*. Ann. R. Sc. Normale Sup. di Pisa, Vol. IX, 1940, pp. 253-262.

(<sup>6</sup>) M. PICONE, I<sup>a</sup> Memoria cit. in (4).

e, sulle faccie di  $C$ ,

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^3 \left[ a_{hk}^{01} \frac{\partial u_k}{\partial x} + a_{hk}^{02} \frac{\partial u_k}{\partial y} + a_{hk}^{03} \frac{\partial u_k}{\partial z} + a_{hk}^{04} \frac{\partial u_k}{\partial t} + a_{hk}^0 u_k \right]_{x=0} - a_h^0(y, z, t) = 0 \\ \sum_{k=1}^3 \left[ a_{hk}^{11} \frac{\partial u_k}{\partial x} + a_{hk}^{12} \frac{\partial u_k}{\partial y} + a_{hk}^{13} \frac{\partial u_k}{\partial z} + a_{hk}^{14} \frac{\partial u_k}{\partial t} + a_{hk}^1 u_k \right]_{x=1} - a_h^1(y, z, t) = 0 \\ \sum_{k=1}^3 \left[ b_{hk}^{01} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{hk}^{02} \frac{\partial u_k}{\partial y} + b_{hk}^{03} \frac{\partial u_k}{\partial z} + b_{hk}^{04} \frac{\partial u_k}{\partial t} + b_{hk}^0 u_k \right]_{y=0} - b_h^0(z, x, t) = 0 \\ \sum_{k=1}^3 \left[ b_{hk}^{11} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{hk}^{12} \frac{\partial u_k}{\partial y} + b_{hk}^{13} \frac{\partial u_k}{\partial z} + b_{hk}^{14} \frac{\partial u_k}{\partial t} + b_{hk}^1 u_k \right]_{y=1} - b_h^1(z, x, t) = 0 \\ \sum_{k=1}^3 \left[ c_{hk}^{01} \frac{\partial u_k}{\partial x} + c_{hk}^{02} \frac{\partial u_k}{\partial y} + c_{hk}^{03} \frac{\partial u_k}{\partial z} + c_{hk}^{04} \frac{\partial u_k}{\partial t} + c_{hk}^0 u_k \right]_{z=0} - c_h^0(x, y, t) = 0 \\ \sum_{k=1}^3 \left[ c_{hk}^{11} \frac{\partial u_k}{\partial x} + c_{hk}^{12} \frac{\partial u_k}{\partial y} + c_{hk}^{13} \frac{\partial u_k}{\partial z} + c_{hk}^{14} \frac{\partial u_k}{\partial t} + c_{hk}^1 u_k \right]_{z=1} - c_h^1(x, y, t) = 0. \end{array} \right.$$

Si hanno complessivamente tre equazioni ( $h=1, 2, 3$ ) nell'interno di  $C$  e diciotto sulle facce; i coefficienti e i termini noti di tali equazioni sono funzioni reali continue, per  $(x, y, z)$  in  $C$  e  $t \geq 0$  qualsiasi, e dipendenti in generale oltre che dal posto anche dal tempo.

Si hanno le condizioni iniziali

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_k(x, y, z, 0) = u_k^{(0)}(x, y, z) \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} u_k(x, y, z, t) \right]_{t=0} = u_k^{(1)}(x, y, z) \end{array} \right. \quad (k=1, 2, 3)$$

dove le funzioni note  $u_k^{(0)}(x, y, z)$  e  $u_k^{(1)}(x, y, z)$  sono finite e continue con le loro derivate fino al 2° ordine.

Introduciamo alcuni simboli, che sono assai opportuni per rendere più concise le espressioni che avremo da considerare.

$$\text{Con} \quad E^h(u_1, u_2, u_3), \quad (h=1, 2, 3)$$

indicheremo il primo membro della (4) e con

$$E_x^{0h}(u_1, u_2, u_3), \quad E_x^{1h}(u_1, u_2, u_3), \dots, \quad E_z^{1h}(u_1, u_2, u_3), \quad (h=1, 2, 3)$$

i primi membri delle (5).

### Applicazione del metodo variazionale.

2. - Per gli scopi di questo lavoro possiamo semplificare notevolmente, dal punto di vista formale, l'applicazione del metodo variazionale, rispetto a quella originale di M. PICONE (7).

(7) M. PICONE, I<sup>a</sup> Memoria cit. in (4).

Sia  $\{\varphi_i(x, y, z)\}$ ,  $(i=1, 2, \dots)$

un sistema di funzioni reali e continue, che sia in  $C$  completo (<sup>7)</sup>).

Si ponga

$$(7) \quad u_{k, \nu} = u_k^{(0)}(x, y, z) + t u_k^{(1)}(x, y, z) + \sum_{j=1}^{\nu} \varphi_j(x, y, z) \omega_{(k-1)\nu+j}(t), \quad (k=1, 2, 3)$$

in cui le funzioni — per ora indeterminate —  $\omega_i(t)$  [ $i=1, \dots, 3\nu=n$ ] hanno la derivata prima  $\omega_i'(t)$  assolutamente continua in ogni intervallo finito  $(0, T)$ , con  $T > 0$ , ed è

$$(8) \quad \begin{cases} \omega_i(0) = 0 \\ \omega_i'(0) = 0 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, 3\nu=n).$$

Per determinare le funzioni  $\omega_i(t)$  si sostituiscano le (7) nelle equazioni (4) e (5). I primi membri di tali equazioni daranno delle espressioni, in generale non identicamente nulle,

$$E^h[u_{1, \nu}, u_{2, \nu}, u_{3, \nu}], E_x^{0h}[u_{1, \nu}, u_{2, \nu}, u_{3, \nu}], \dots, E_z^{1h}[u_{1, \nu}, u_{2, \nu}, u_{3, \nu}], \quad (h=1, 2, 3).$$

Si fissino delle funzioni reali, positive e continue

$$(9) \quad q^h(x, y, z, t), \quad (h=1, 2, 3)$$

delle variabili  $(x, y, z, t)$  per  $(x, y, z)$  in  $C$  e  $t \geq 0$ ; e parimenti delle funzioni

$$(10) \quad \begin{cases} q_x^{0h}(y, z, t), & q_x^{1h}(y, z, t) \\ q_y^{0h}(x, z, t), & q_y^{1h}(x, z, t) \\ q_z^{0h}(x, y, t), & q_z^{1h}(x, y, t) \end{cases} \quad (h=1, 2, 3)$$

pure reali, positive e continue per  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  e  $t \geq 0$ .

Di tali funzioni, che si chiamano *funzioni peso*, studieremo più avanti il significato e la portata della loro utilità pratica.

Si consideri ora la funzione di  $t$ ,  $\omega_i(t)$ ,  $\omega_i'(t)$ ,  $\omega_i''(t)$  [ $i=1, 2, \dots, n$ ].

$$(11) \quad f[t; \omega_1(t), \dots, \omega_n(t); \omega_1'(t), \dots, \omega_n'(t); \omega_1''(t), \dots, \omega_n''(t)] = \\ = \sum_{k=1}^3 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q^h [E^h(u_{1, \nu}, u_{2, \nu}, u_{3, \nu})]^2 dx dy dz + \right. \\ \left. + \sum_{(x, y, z)} \int_0^1 \int_0^1 (q_x^{0h} [E_x^{0h}(u_{1, \nu}, u_{2, \nu}, u_{3, \nu})]^2 + q_x^{1h} [E_x^{1h}(u_{1, \nu}, u_{2, \nu}, u_{3, \nu})]^2) dy dz \right\}$$

dove gli altri due termini di  $\sum_{(x, y, z)}$  si ottengono permutando circolarmente  $x, y, z$ .

(<sup>7)</sup> In un lavoro di prossima pubblicazione preciserò le condizioni a cui deve soddisfare tale sistema di funzioni.

Supponiamo di poter considerare delle funzioni  $\omega_i(t)$ , assolutamente continue con  $\omega'(t)$ , soddisfacenti alle (8) e per cui esista finito il

$$(12) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f[t, \omega_1, \dots, \omega_n'] dt = \int_0^{\infty} f[t, \omega_1, \dots, \omega_n'] dt.$$

Qualora le (7) dessero la soluzione del nostro problema, e solo allora, l'integrale (12) sarà nullo.

Supponiamo ancora che nel campo ora definito di funzioni  $\omega_i(t)$  l'integrale (12) ammetta il minimo assoluto e che si riesca a determinare in modo unico le funzioni

$$(13) \quad \bar{\omega}_1(t), \quad \bar{\omega}_2(t), \dots, \quad \bar{\omega}_n(t)$$

che realizzano tale minimo.

Nel metodo variazionale si assume come approssimazione  $\nu^{ma}$  della soluzione l'espressione

$$(14) \quad \bar{u}_{k, \nu} = u_k^{(0)}(x, y, z) + t u_k^{(1)}(x, y, z) + \sum_{j=1}^{\nu} \varphi_j(x, y, z) \bar{\omega}_{(k-1)\nu+j}(t) \quad (k=1, 2, 3).$$

Ciò è legittimato dal fatto che  $u_{k, \nu}$  converge in media alla soluzione del problema (8).

Nel seguito di questo lavoro toglieremo le ipotesi ora fatte, dimostrando l'esistenza del minimo di (12) e come si possano determinare le (13).

### La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'approssimazione $\nu^{ma}$ in media.

3. - Prima di procedere a dimostrare l'esistenza del minimo per l'integrale (2) è bene precisare e chiarire alcuni punti.

Come ha mostrato S. CINQUINI (9), quando si vogliono studiare problemi di Calcolo delle Variazioni per integrali su un intervallo infinito, l'essenziale sta nell'impostare bene il problema, senza lasciarsi fuorviare da facili analogie con quanto accade per gli ordinari integrali su un intervallo finito d'integrazione.

Può altrimenti accadere — come mostrano gli esempi dati dal CINQUINI stesso — che i problemi così impostati non ammettano a priori alcuna soluzione.

La funzione  $f$  definita dalla (11) è del tipo seguente:

$$(11') \quad f[t; \omega_1, \dots, \omega_n; \omega_1', \dots, \omega_n'; \omega_1'', \dots, \omega_n''] = \\ = \sum_{i,j}^{1 \dots n} A_{ij}(t) \omega_i'' \omega_j'' + \sum_{i=1}^n B_i[t; \omega_1, \dots, \omega_n; \omega_1', \dots, \omega_n'] \omega_i'' + C(t; \omega_1, \dots, \omega_n; \omega_1', \dots, \omega_n'),$$

(8) M. PICONE, I<sup>a</sup> Memoria cit. in (4), pag. 13 dell'estratto.

(9) S. CINQUINI, loc. cit. in (5').

dove le funzioni  $A_{ij}(t)$ ,  $B_i(t, \omega_1, \dots, \omega_n')$  e  $C(t, \omega_1, \dots, \omega_n')$  sono note e continue per  $t \geq 0$ . Le  $B_i$  sono lineari e la  $C$  quadratica nelle  $\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_1', \dots, \omega_n'$ .

Dal modo come la si è costruita è manifestamente

$$(15) \quad f \geq 0.$$

Andiamo a vedere più particolarmente com'è costituita la funzione

$$C(t; \omega_1, \dots, \omega_n; \omega_1', \dots, \omega_n').$$

È

$$(16) \quad C(t; \omega_1, \dots, \omega_n; \omega_1', \dots, \omega_n') = \\ \sum_{i,j}^{1..n} a_{ij}(t) \omega_i \omega_j + \sum_{i,j}^{1..n} \beta_{ij}(t) \omega_i \omega_j' + \sum_{i,j}^{1..n} \gamma_{ij}(t) \omega_i' \omega_j' + \sum_i^{1..n} \delta_i(t) \omega_i + \sum_i^{1..n} \varepsilon_i(t) \omega_i' + \varrho(t)$$

dove le funzioni  $a_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $\delta_i$ ,  $\varepsilon_i$  e  $\varrho$  sono note per ogni  $t \geq 0$ .

Ci interessa l'espressione di  $\varrho(t)$ .

Posto

$$(17) \quad u_k^* = u_k^{(0)}(x, y, z) + t u_k^{(1)}(x, y, z), \quad (k=1, 2, 3)$$

è

$$(18) \quad \varrho(t) = \sum_{h=1}^3 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q^h [E^h(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dx dy dz + \right. \\ \left. + \sum_{(xyz)} \int_0^1 \int_0^1 (q_x^{0h} [E_x^{0h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 + q_x^{1h} [E_x^{1h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2) \right\} dy dz.$$

Noi dovremo cercare se esiste il minimo dell'integrale

$$I = \int_0^\infty f(t, \omega_1, \dots, \omega_n'') dt$$

nella classe ( $K$ ) delle funzioni  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$  assolutamente continue con le derivate prime in ogni intervallo finito  $(0, T)$ , tali da dare a  $I$  un valore finito e soddisfacenti alle (8).

Nel caso dell'analogo integrale

$$I_T = \int_0^T f(t, \omega_1, \dots, \omega_n'') dt$$

B. MANIÀ ha dimostrato che tale minimo esiste sempre, con le ipotesi di continuità anche da noi fatte.

Ma si presenta ora un fatto nuovo, che modifica in modo essenziale la questione.

Nel caso considerato da B. MANIÀ esiste sempre una classe ( $K_T$ ) di funzioni  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$  assolutamente continue con le derivate prime in  $(0, T)$  soddisfacenti alle (8), per cui  $I_T$  è finito.



Se invece si considera l'integrale  $I$ , la classe  $(K)$  può essere vuota. Ci si può persuadere di ciò dal seguente esempio assai semplice. Mentre per l'integrale

$$\int_0^T (1 + \omega''^2(t)) dt, \quad \text{con } \omega(0) = \omega'(0) = 0$$

la classe  $(K_T)$  esiste, è invece vuota la classe  $(K)$  relativa a

$$\int_0^\infty [1 + \omega''^2(t)] dt$$

perchè, qualunque sia il valore di  $\omega''(t)$ ,  $1 + \omega''^2(t)$  non è mai integrabile in  $(0, \infty)$ .

Perchè le (14) diano una effettiva approssimazione della soluzione del problema è essenziale che il minimo di  $I$  sia finito, e quindi *condizione necessaria per l'esistenza dell'approssimazione  $r^{ma}$  in media è che esista almeno una  $n^{upla}$  di funzioni  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$  assolutamente continue con la derivata prima in ogni intervallo finito  $(0, T)$ , con  $\omega_i(0) = 0, \omega_i'(0) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e tali da rendere integrabile in  $(0, \infty)$  la (11')*.

Andiamo ora a provare che questa condizione è anche sufficiente all'esistenza della  $r^{ma}$  approssimazione.

Premettiamo il seguente

LEMMA: *La classe  $K_\lambda$  delle curve  $(\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t))$  per  $0 \leq t \leq T$ , per cui è*

$$\int_0^T f[t; \omega_1(t), \dots, \omega_n(t); \omega_1'(t), \dots, \omega_n'(t); \omega_1''(t), \dots, \omega_n''(t)] dt \leq \lambda$$

*è tale che le funzioni  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t), \omega_1'(t), \dots, \omega_n'(t)$  sono equilimitate ed equiassolutamente continue in  $(0, T)$ .*

Tale proposizione è data implicitamente nel citato lavoro di B. MANIÀ <sup>(40)</sup> e costituisce la parte essenziale della dimostrazione dei teoremi di esistenza ivi dati.

Supponiamo ora non vuota la classe  $(K)$  precedentemente definita e sia

$$(19) \quad \{ \omega_{1,m}(t), \omega_{2,m}(t), \dots, \omega_{n,m}(t) \}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

una successione di curve di  $(K)$  minimizzante  $I$ . Esiste allora una costante  $\delta > 0$  tale che è

$$\int_0^\infty f[t; \omega_{1,m}, \dots, \omega_{n,m}; \omega'_{1,m}, \dots, \omega'_{n,m}; \omega''_{1,m}, \dots, \omega''_{n,m}] dt \leq \delta$$

<sup>(40)</sup> B. MANIÀ, loc. cit. in (4), pp. 82, 85, 89.

e quindi, se  $T$  è un qualunque numero positivo, e tenuto conto della (15), è

$$\int_0^T f[t; \omega_{1,m}, \dots, \omega''_{n,m}] dt \leq - \int_T^\infty f(t, \omega_{1,m}, \dots, \omega''_{n,m}) dt + \delta \leq \delta.$$

Per il lemma sopra riportato le funzioni  $\omega_{1,m}(t), \dots, \omega_{n,m}(t)$  e le loro derivate prime sono equilimitate ed equiassolutamente continue in  $(0, T)$ . Poniamo successivamente  $T=1, 2, \dots$  <sup>(14)</sup>.

Per  $T=1$  dalla (19) si deduce una successione parziale

$$\{\omega_{1,m,1}(t), \dots, \omega_{n,m,1}(t)\}, \quad (m=1, 2, \dots),$$

uniformemente convergente in  $(0, 1)$  con  $\{\omega'_{1,m,1}(t), \dots, \omega'_{n,m,1}(t)\}$ .

Da questa un'altra

$$\{\omega_{1,m,2}(t), \dots, \omega_{n,m,2}(t)\}, \quad (m=1, 2, \dots)$$

uniformemente convergente in  $(0, 2)$  con le derivate prime, e così successivamente.

Allora la successione

$$\{\omega_{1,m,m}(t), \dots, \omega_{n,m,m}(t)\}, \quad (m=1, 2, \dots)$$

converge uniformemente in ogni intervallo finito  $(0, T)$  verso una curva

$$\{\omega_{1,0}(t), \dots, \omega_{n,0}(t)\}$$

e la successione  $\{\omega'_{1,m,m}(t), \dots, \omega'_{n,m,m}(t)\}$

converge pure uniformemente a

$$\{\omega'_{1,0}(t), \dots, \omega'_{n,0}(t)\}.$$

Poichè  $I_T = \int_0^T f[t, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots, \omega_n''] dt$  è semicontinuo inferiormente <sup>(12)</sup>, segue

$$(20) \quad \int_0^T f[t, \omega_{1,0}(t), \dots, \omega'_{n,0}(t)] dt \leq \underline{\lim}_0^T \int_0^T f[t, \omega_{1,m,m}(t), \dots, \omega'_{n,m,m}(t)] dt \leq \delta.$$

Di qui si ha anzitutto che esiste finito

$$\int_0^\infty f(t, \omega_{1,0}(t), \dots, \omega'_{n,0}(t)) dt.$$

<sup>(14)</sup> Il procedimento qui usato è analogo a quello tenuto da S. CINQUINI, loc. cit. in <sup>(9)</sup>, pag. 256.

<sup>(12)</sup> B. MANIÀ, loc. cit. in <sup>(4)</sup>.

Inoltre, essendo  $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = i$ , dove  $i$  indica il confine inferiore di  $I$  in  $(K)$ , e sempre  $f \geq 0$ , è  $I_{m,T} \leq I_m$  onde  $\underline{\lim} I_{m,T} \leq \lim I_m = i$  e per la (20)

$$\int_0^T f(t, \omega_{1,0}(t), \dots, \omega''_{n,0}(t)) dt \leq i$$

e quindi anche

$$\int_0^{\infty} f[t, \omega_{1,0}(t), \dots, \omega''_{n,0}(t)] dt \leq i.$$

Si è così completamente dimostrato che: *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista l'approssimazione  $v^{ma}$  in media è che esista almeno una  $n^{upla}$  di funzioni  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$ , assolutamente continue con la derivata prima in ogni intervallo finito  $(0, T)$ , con  $\omega_i(0) = 0$ ,  $\omega_i'(0) = 0$  e tali da rendere integrabile in  $(0, \infty)$  la (11').*

#### Condizioni sufficienti per l'esistenza dell'approssimazione in media.

4. - Daremo ora delle condizioni sufficienti perchè esista almeno una curva  $[\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)]$  con  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$  assolutamente continue con le derivate prime (in ogni intervallo finito),  $\omega_i(0) = 0$ ,  $\omega_i'(0) = 0$ , e per cui

$$\int_0^{\infty} f[t, \omega_1(t), \dots, \omega_n(t), \dots, \omega_n''(t)] dt$$

è finito, dove la  $f$  è definita dalla (11').

#### Prima condizione sufficiente:

*Se le funzioni peso (10) sono scelte in modo che la  $\varrho(t)$ , definita dalla (18), risulti integrabile in  $(0, \infty)$ , allora esiste l'approssimazione  $v^{ma}$  in media.*

E infatti, si consideri la curva  $\omega_1 \equiv 0$ ,  $\omega_2 \equiv 0, \dots, \omega_n \equiv 0$ ; essa soddisfa alle (8) ed è per le (11') e (16)

$$\int_0^{\infty} f(t, 0, 0, \dots, 0) dt = \int_0^{\infty} C(t, 0, 0, \dots, 0) dt = \int_0^{\infty} \varrho(t) dt.$$

Tale curva appartiene quindi a  $(K)$ , e, per la condizione necessaria e sufficiente data, esiste l'approssimazione  $v^{ma}$  in media.

Seconda condizione sufficiente :

Se le funzioni peso (10) dipendono soltanto dal tempo e sono tali da rendere integrabili per  $t$  in  $(0, \infty)$  i prodotti

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} q(t) \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [E^h(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dx dy dz \\ q(t) \cdot \int_0^1 \int_0^1 [E_x^{0h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dy dz \\ q(t) \cdot \int_0^1 \int_0^1 [E_x^{1h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dy dz \\ q(t) \cdot \int_0^1 \int_0^1 [E_y^{0h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dx dz \\ q(t) \cdot \int_0^1 \int_0^1 [E_y^{1h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dx dz \\ q(t) \cdot \int_0^1 \int_0^1 [E_z^{0h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dx dy \\ q(t) \cdot \int_0^1 \int_0^1 [E_z^{1h}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)]^2 dx dy \end{array} \right. \quad (h=1, 2, 3)$$

(dove le funzioni di  $(x, y, z, t)$   $u_1^*, u_2^*, u_3^*$  sono definite dalle (17)) esiste l'approssimazione  $v^{ma}$  in media.

E infatti, sotto queste condizioni, la funzione  $q(t)$  definita dalla (18) riesce integrabile in  $(0, \infty)$ .

Poichè si possono sempre trovare delle funzioni peso tali da rendere integrabili le (21) in  $(0, \infty)$ , si ha il

TEOREMA. - Si possono sempre trovare — e in infiniti modi — delle funzioni peso tali che esista l'approssimazione  $v^{ma}$  in media.

### Osservazioni sulle funzioni peso.

5. - Il teorema ora dato mette in luce l'importanza delle funzioni peso, senza l'introduzione delle quali può effettivamente mancare l'approssimazione  $v^{ma}$  del metodo variazionale. Ciò non accade quando si considerino problemi per un intervallo finito di tempo, come risulta dal citato lavoro di B. MANIÀ.

Le funzioni peso per cui esiste l'approssimazione  $\nu^{ma}$  costituiscono una classe ( $Q$ ) di funzioni; la condizione che siano integrabili le (21) individua perfettamente una sottoclasse *non vuota* di ( $Q$ ).

Il teorema dato afferma quindi non soltanto l'esistenza di opportune funzioni peso per cui c'è l'approssimazione  $\nu^{ma}$ , ma dà anche un criterio pratico per la loro scelta.

Consideriamo ora la totalità ( $M$ ) delle curve di  $S_{n+1}$   $\{\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)\}$  con  $\omega_1'(t), \dots, \omega_n'(t)$  assolutamente continue in ogni intervallo finito  $(0, T)$  e tali che sia

$$\omega_i(0) = 0, \quad \omega_i'(0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si viene ad avere nell' $S_{n+1}$  un pennello di curve uscenti dall'origine e tangenti all'asse  $t=0$ .

Scelto nella classe ( $Q$ ) un sistema di funzioni peso, sia ( $M_1$ ) la sottoclasse di ( $M$ ) per cui è finito

$$\int_0^{\infty} f[t; \omega_1(t), \dots, \omega_n(t)] dt,$$

dove nella  $f$ , definita dalla (11'), si siano poste le funzioni peso ora scelte. Sceglierlo un altro sistema di funzioni peso, si otterrà una sottoclasse ( $M_2$ ), e si può sempre fare in modo che ( $M_2$ ) contenga ( $M_1$ ). Si viene così ad allargare il pennello di curve uscenti dall'origine di  $S_{n+1}$  e in cui si deve cercare quella che rende minimo l'integrale (12).

Ciò è molto importante nei calcoli pratici in quanto una felice scelta delle funzioni peso potrà dare fin dal primo passo risultati sufficientemente approssimati.

Una volta che siano date le condizioni sufficienti per la convergenza puntuale delle successioni  $\bar{u}_{k, \nu}(x, y, z, t)$  (14) alla soluzione del problema, si dovranno ottenere delle ulteriori indicazioni sia per la scelta delle funzioni peso che per quella del sistema completo  $\{\varphi_i(x, y, z)\}$  di funzioni ortogonali e normali in  $C$ .

### Determinazione delle successive approssimazioni.

6. - È nota l'estensione del classico lemma di P. DU BOIS REYMOND <sup>(13)</sup>.

« Se  $f(t)$  è continua in  $(a, b)$ , e se per qualsiasi  $\varphi(t)$  derivabile in  $(a, b)$ , con  $\varphi'(t)$  a rapporto incrementale limitato e soddisfacente alle

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi'(a) = 0 \\ \varphi(b) &= \varphi'(b) = 0, \end{aligned}$$

<sup>(13)</sup> Per la dimostrazione di tale estensione si veda:

A. HAAR: *Über eine Verallgemeinerung des Du Bois Reymond'schen Lemmas*. Acta Litterarum ac Scientiarum R. Universitatis Hungaricae Franciscus-Josephinae. T. I (1922), pp. 33-38.

S. CINQUINI: *Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine  $n$* . Ann. di Mat. IV, XVI, 1937, p. 67.

se è sempre

$$\int_a^b \varphi''(t) f(t) dt = 0,$$

è necessariamente

$$f(t) = at + \beta$$

dove  $a$  e  $\beta$  sono costanti ».

Si sia scelto il sistema di funzioni peso in modo che esista il minimo dell'integrale (12) e sia  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$  una  $n^{upla}$  di funzioni che lo realizzano e  $\varphi(t)$  una funzione assolutamente continua con  $\varphi'(t)$  in  $(0, T)$ ;  $\varphi'(t)$  sia a rapporto incrementale limitato e infine

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(T) = \varphi'(T) = 0;$$

per  $t \geq T$  si ponga  $\varphi(t) = 0$ .

Riesce allora finito l'integrale

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_0^\infty f[t; \omega_1 + \varepsilon\varphi, \omega_2, \dots, \omega_n; \omega_1' + \varepsilon\varphi', \omega_2', \dots, \omega_n'; \omega_1'' + \varepsilon\varphi'', \omega_2'', \dots, \omega_n''] dt = \\ &= \int_0^T f[t; \omega_1 + \varepsilon\varphi, \omega_2, \dots, \omega_n; \omega_1' + \varepsilon\varphi', \omega_2', \dots, \omega_n'; \omega_1'' + \varepsilon\varphi'', \omega_2'', \dots, \omega_n''] dt + \\ &+ \int_T^\infty f(t, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n'') dt \end{aligned}$$

ed è

$$\left( \frac{dI_\varepsilon}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

Si ha

$$(22) \quad \left( \frac{dI_\varepsilon}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_0^T [f_{\omega_1} \varphi + f_{\omega_1'} \varphi' + f_{\omega_1''} \varphi''] dt = 0.$$

Integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_0^T f_{\omega_1} \varphi dt &= - \int_0^T \left( \varphi' \int_0^t f_{\omega_1} d\tau \right) dt = \int_0^T \left( \varphi'' \int_0^t \int_0^\sigma f_{\omega_1} d\tau d\sigma \right) dt \\ \int_0^T f_{\omega_1'} \varphi' dt &= - \int_0^T \left( \varphi'' \int_0^t f_{\omega_1'} d\tau \right) dt \end{aligned}$$

e sostituendo nella (21)

$$\int_0^T \varphi'' \left[ f_{\omega_1''} - \int_0^t f_{\omega_1'} d\tau + \int_0^t \int_0^\sigma f_{\omega_1} d\tau d\sigma \right] dt = 0$$

e, per il lemma ricordato,

$$(23) \quad f_{\omega_1''} - \int_0^t f_{\omega_1'} d\tau + \int_0^t \int_0^\sigma f_{\omega_1} d\tau d\sigma = at + \beta.$$

Se ora supponiamo che i coefficienti e i termini noti delle equazioni (4) e (5) e il sistema delle funzioni peso scelte abbiano derivate seconde continue rispetto al tempo, la (23) può essere derivata due volte rispetto a  $t$  e si ottiene l'equazione differenziale di EULERO

$$f_{\omega_1} - \frac{d}{dt} \left[ f_{\omega_1'} - \frac{d}{dt} f_{\omega_1''} \right] = 0.$$

Analogamente si dimostra che le funzioni  $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$  che realizzano il minimo soddisfano al sistema di equazioni differenziali del quarto ordine di EULERO

$$f_{\omega_i} - \frac{d}{dt} \left[ f_{\omega_i'} - \frac{d}{dt} f_{\omega_i''} \right] = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Le condizioni ai limiti sono date da

$$\omega_i(0) = 0, \quad \omega_i'(0) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

e inoltre che le  $\omega_i(t)$  siano tali da rendere integrabile la  $f[t, \omega_1(t), \dots, \omega_n''(t)]$  per  $t$  in  $(0, \infty)$ .

Da quanto si è precedentemente dimostrato risulta che *queste condizioni sono sempre fra loro compatibili*.

È così risolta affermativamente anche nel caso dell'intervallo di tempo infinito la questione che si poneva a priori della compatibilità del sistema delle equazioni di EULERO con le condizioni ai limiti <sup>(14)</sup>.

Si ha inoltre che se i coefficienti e i termini noti delle (4) e (5) e il sistema delle funzioni peso possiedono derivate rispetto al tempo fino all'ordine  $p \geq 2$ , allora le funzioni (14) che danno la  $p^{\text{ma}}$  approssimazione in media sono derivabili rispetto a  $t$  almeno fino all'ordine  $p+2$ .

---

<sup>(14)</sup> M. PICONI, II<sup>a</sup> Memoria cit. in <sup>(4)</sup>, pag. 118.