ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

LUIGI AMERIO

**Studi su gli integrali doppi del calcolo delle variazioni**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 10, nº 1 (1941), p. 57-89

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_1_57_0>

# STUDI SU GLI INTEGRALI DOPPI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

di LUIGI AMERIO (Roma).

In questa Memoria si studia, seguendo il metodo di TONELLI, l'integrale doppio nel Calcolo delle Variazioni

$$\mathfrak{J}_D(z) = \iint_D F(x, y, z, p, q)\,dxdy, \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

dove $D$ è un campo aperto e limitato e la funzione $z(x, y)$ è assolutamente continua, in $D$, nel senso di TONELLI, facendo delle ipotesi particolari sulla natura delle funzioni $z(x, y)$, $F(x, y, z, p, q)$ e del campo $D$.

Si ammetterà sempre che la $F(x, y, z, p, q)$ sia finita e continua, assieme alle sue derivate parziali $F_p(x, y, z, p, q)$, $F_q(x, y, z, p, q)$ in tutti i punti $(x, y)$ del campo $D$ e per tutti i valori finiti di $z, p, q$, e che $\mathfrak{J}_D(z)$ sia quasi-regolare positivo, cioè si abbia

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, p_0, q_0) &\geqslant \\ \geqslant (p - p_0) F_p(x, y, z, p_0, q_0) &+ (q - q_0) F_q(x, y, z, p_0, q_0) \end{aligned}$$

per $(x, y)$ in $D$ e per tutti i valori finiti di $z, p, p_0, q, q_0$.

Studieremo dapprima l'integrale $\mathfrak{J}_D(z)$, considerandolo nella classe delle funzioni che soddisfano in $D$ alla medesima condizione di LIPSCHITZ.

Si possono enunciare così, sotto condizioni larghissime per la $F(x, y, z, p, q)$, dei teoremi sulla semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}_D(z)$ e sull'esistenza dell'estremo assoluto.

I risultati ottenuti sono completati da un lemma in cui si dimostra l'esistenza di almeno una funzione $\psi(x, y)$, definita in tutto il piano $(x, y)$ e ivi Lipschitziana, la quale coincida nei punti di un insieme chiuso e limitato $\bar{E}$ con una funzione assegnata $\varphi(x, y)$, soddisfacente in $\bar{E}$ a una condizione di LIPSCHITZ.

---

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

Successivamente si dà un teorema sulla semicontinuità inferiore dell'integrale $\mathfrak{I}_D(z)$, quando lo si consideri nella classe delle funzioni $z(x, y)$ integrabili, oltre che assolutamente continue, in $D$, e si facciano alcune ipotesi sulla $F(x, y, z, p, q)$ e sul campo $D$.

Nell'ultima parte, muovendo da un teorema dimostrato da TONELLI nella Memoria: *L'estremo assoluto degli integrali doppi* (1), e da altri suoi teoremi sugli integrali semplici in forma ordinaria (2), si enunciano alcuni teoremi sull'esistenza dell'estremo assoluto per $\mathfrak{I}_D(z)$ e, infine, si trasportano nel campo degli integrali doppi i concetti relativi all'*estremo in piccolo*, introdotti da TONELLI per gli integrali semplici (3).

## § 1. - L'integrale $\mathfrak{I}_D(z)$ nella classe delle funzioni soddisfacenti in $D$ alla medesima condizione di Lipschitz.

1. - Ordinariamente indicheremo con $D$ un campo aperto e limitato, con $\overline{D}$ il campo chiuso corrispondente.

Essendo limitato, il campo $D$ sarà contenuto in un quadrato $Q$ coi lati paralleli agli assi $x$ e $y$; diviso $Q$ in $4^n$ quadrati eguali, indicheremo con $D_n$ il campo formato dai quadrati che così si ottengono e che sono costituiti interamente da punti di $D$.

Adoperando gli stessi simboli $D_n$ e $D$ per indicare le misure dei campi $D_n$ e $D$ rispettivamente, si avrà allora

$$\lim_{n\to\infty} D_n = D.$$

2. - TEOREMA I. — *Sia $\mathfrak{I}_D(z)$ quasi-regolare positivo ed esista, in corrispondenza di ogni numero positivo $M$, una funzione $f_M(x, y)$, definita e integrabile in $D$, tale che risulti*

$$F(x, y, z, p, q) > f_M(x, y)$$

*per $(x, y)$ in $D$, $|z| \leq M$, $|p| \leq M$, $|q| \leq M$.*

*Allora se $C$ è una classe di funzioni $z(x, y)$, soddisfacenti in $D$ alla medesima condizione di Lipschitz, l'integrale $\mathfrak{I}_D(z)$, considerato in $C$, è semicontinuo inferiormente per ogni funzione $z_0(x, y)$ di $C$, tale che $\mathfrak{I}_D(z_0)$ esista finito.*

---

(1) L. TONELLI: *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, serie II, vol. II, 1933, pp. 89-130.

(2) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni,* due volumi, Zanichelli, Bologna. Vedasi vol. II, cap. V, nn. 87 e 88.

(3) L. TONELLI, luogo cit. in (2), vol. II, cap. V, n. 91.

DIMOSTRAZIONE. - Per ipotesi, se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono due punti di $D$, esiste una costante $K$ per cui sia

$$|z(P_1) - z(P_2)| \leqslant K\overline{P_1P_2} \tag{1}$$

per tutte le funzioni $z(x, y)$ della classe $C$; inoltre ognuna di queste funzioni ammette quasi ovunque, in $D$, le derivate parziali $p$ e $q$ ed è $|p| \leqslant K$, $|q| \leqslant K$.

Sia $z_0(x, y)$ una funzione di $C$ per cui $\mathfrak{I}_D(z_0)$ esiste finito; essa sarà ovviamente limitata in $D$, cioè si avrà $|z_0(x, y)| \leqslant R$.

Sia $M$ il maggiore tra i numeri $R+1$ e $K$ e cominciamo col considerare tutte le funzioni della classe $C$ soddisfacenti in $D$ alla condizione

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < 1.$$

Se ora indichiamo con $B_n$ l'insieme complementare di $D_n$ rispetto a $D$, fissato $\sigma > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{B_n}(z) - \mathfrak{I}_{B_n}(z_0) &> \iint_{B_n} f_M(x, y)\,dxdy - \mathfrak{I}_{B_n}(z_0) \\ &> -\sigma \end{aligned} \tag{2}$$

quando sia $n \geqslant \bar{n}$ sufficientemente grande.

Considerando ora il campo $D_{\bar{n}}$, esso consterà di un numero $m$, finito, di quadrati; se $\Delta$ è uno di questi si ha

$$\begin{aligned} \iint_\Delta F(x, y, z, p, q)\,dxdy - \iint_\Delta F(x, y, z_0, p_0, q_0)\,dxdy \geqslant \\ \geqslant \iint_\Delta \{F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z_0, p, q)\}\,dxdy \\ + \iint_\Delta \{(p-p_0)F_p(x, y, z_0, p_0, q_0) + (q-q_0)F_q(x, y, z_0, p_0, q_0)\}\,dxdy. \end{aligned}$$

Ora $F(x, y, z, p, q)$ è funzione continua per $(x, y)$ in $\bar{\Delta}$, $|z| \leqslant M$, $|p| \leqslant M$, $|q| \leqslant M$; si può perciò prendere $\varrho_1$, con $0 < \varrho_1 < 1$, in modo che, per $|z - z_0| < \varrho_1$, sia

$$\left| \iint_\Delta \{F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z_0, p, q)\}\,dxdy \right| < \frac{\sigma}{m}. \tag{3}$$

Inoltre siccome, per $\alpha > 0$, le funzioni $z(x, y)$ soddisfano alla condizione

$$\iint_\Delta |p - p_0|^{1+\alpha}\,dxdy \leqslant (2K)^{1+\alpha}\Delta, \qquad \iint_\Delta |q - q_0|^{1+\alpha}\,dxdy \leqslant (2K)^{1+\alpha}\Delta$$

e le funzioni $F_p(x, y, z_0, p_0, q_0)$, $F_q(x, y, z_0, p_0, q_0)$ sono limitate in $\Delta$, per un teorema di TONELLI ([4]), potremo determinare $\varrho_2$, con $0<\varrho_2<1$, in modo che per $|z-z_0|<\varrho_2$, sia

$$(4)\qquad \left|\iint_{\Delta}\{(p-p_0)F_p(x,\,y,\,z_0,\,p_0,\,q_0)+(q-q_0)F_q(x,\,y,\,z_0,\,p_0,\,q_0)\}dxdy\right|<\frac{\sigma}{m}.$$

Tenuto conto delle (2), (3), (4), e supposto $\varrho$ minore del più piccolo tra tutti i numeri $\varrho_1$ e $\varrho_2$ relativi ai quadrati di cui è composto $D_{\bar{n}}$, si avrà, per $|z-z_0|<\varrho$,

$$\mathfrak{J}_D(z)-\mathfrak{J}_D(z_0)>-3\sigma$$

che dimostra la tesi.

Osserviamo ora che, se la fuzione $F(x,\,y,\,z,\,p,\,q)$ soddisfa alla condizione del teorema I, supposta $z(x,\,y)$ Lipschitziana in $D$ e introdotta la corrispondente $f_M(x,\,y)$, l'integrale

$$\iint_D\{F(x,\,y,\,z,\,p,\,q)-f_M(x,\,y)\}dxdy$$

o esiste finito o vale $+\infty$. Siccome la $f_M(x,\,y)$ è integrabile in $D$, ne segue che l'integrale $\mathfrak{J}_D(z)$ o esiste finito o è infinito positivo.

In quest'ultimo caso può ancora parlarsi di semicontinuità inferiore per $\mathfrak{J}_D(z)$ nel senso precisato dal seguente

TEOREMA II. - *Sia $\mathfrak{J}_D(z)$ quasi-regolare positivo, soddisfacente alla condizione del teorema I.*

*Allora se $C$ è una classe di funzioni $z(x,\,y)$, soddisfacenti in $D$ alla medesima condizione di Lipschitz, e per una funzione $z_0(x,\,y)$, di $C$, si ha*

$$\mathfrak{J}_D(z_0)=+\infty,$$

*fissato un numero $N>0$, è possibile determinare $\varrho>0$ in modo che per tutte le funzioni di $C$ soddisfacenti alla condizione*

$$|z(x,\,y)-z_0(x,\,y)|<\varrho$$

*si abbia*

$$\mathfrak{J}_D(z)>N.$$

DIMOSTRAZIONE. - Per ipotesi esiste una costante $K>0$ tale che sia

$$|z(P_1)-z(P_2)|\leq K\overline{P_1P_2}$$

per tutte le funzioni di $C$ e per $P_1(x_1,\,y_1)$ e $P_2(x_2,\,y_2)$ in $D$.

Potremo inoltre limitarci a considerare le funzioni per cui $\mathfrak{J}_D(z)$ esiste finito

---

([4]) L. TONELLI: *Sur la semi-continuité des integrales doubles du Calcul des Variations.* Acta Math., vol. 53, 1929, pp. 333-334.

(per le altre il teorema è certamente vero), e, tra queste, soltanto quelle soddisfacenti in $D$ alla condizione

$$(1) \qquad |z(x, y) - z_0(x, y)| < 1.$$

Osserviamo ora che $F(x, y, z_0, p_0, q_0)$ è limitata, e quindi integrabile, in ogni campo $D_n$ e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} F(x, y, z_0, p_0, q_0)\,dxdy = +\infty$$

e quindi, per $n \geqslant n_0$ sufficientemente grande,

$$(2) \qquad \iint_{D_n} F(x, y, z_0, p_0, q_0)\,dxdy > N + 2.$$

Sia $R > 0$ un numero tale che risulti $|z_0(x, y)| \leqslant R$ per $(x, y)$ in $D$; $M$ il maggiore tra i numeri $R+1$ e $K$.

Se $B_n$ è l'insieme complementare di $D_n$ rispetto a $D$, si ha allora, per le funzioni di $C$ soddisfacenti alla (1),

$$(3) \qquad \iint_{B_{\bar{n}}} F(x, y, z, p, q)\,dxdy > \iint_{B_{\bar{n}}} f_M(x, y)\,dxdy > -1$$

se $\bar{n} \geqslant n_0$ è abbastanza grande.

Siccome $\mathfrak{I}_{D_{\bar{n}}}(z)$, considerato in $C$, è semicontinuo inferiormente per la funzione $z_0(x, y)$, possiamo determinare $\varrho$, con $0 < \varrho < 1$, in modo che per tutte le funzioni di $C$ soddisfacenti in $D$ alla condizione

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho$$

sia

$$\mathfrak{I}_{D_{\bar{n}}}(z) > \mathfrak{I}_{D_{\bar{n}}}(z_0) - 1$$

Ne segue, per la (2),

$$\mathfrak{I}_{D_{\bar{n}}}(z) > N + 1$$

e, per la (3),

$$\mathfrak{I}_D(z) > N.$$

**3.** - Se $C$ è una classe di funzioni, definite nel campo aperto e limitato $D$, si dice che $\varphi(x, y)$, anch'essa definita in $D$, è una funzione di accumulazione per le funzioni di $C$ se, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, esiste sempre una funzione $z(x, y)$ della classe considerata, soddisfacente in tutto $D$ alla condizione

$$|z(x, y) - \varphi(x, y)| < \varepsilon.$$

Diremo poi che una classe $C$ di funzioni $z(x, y)$, assolutamente continue in $D$, per le quali $F(x, y, z, p, q)$ sia integrabile in $D$, è completa [5] in $D$, rispetto a $\mathfrak{J}_D(z)$, quando ogni sua funzione di accumulazione, in $D$, $\varphi(x, y)$, che risulti assolutamente continua in $D$ e che renda integrabile nello stesso campo la $F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$, appartiene a $C$.

È chiaro inoltre che, se le funzioni di $C$ soddisfano in $D$ alla stessa condizione di LIPSCHITZ, vi soddisfa anche ogni loro funzione di accumulazione, $\varphi(x, y)$, che risulta perciò assolutamente continua in $D$.

4. - TEOREMA III. — *Se $\mathfrak{J}_D(z)$ è quasi-regolare positivo e soddisfa alla condizione del teorema I, esiste il minimo assoluto in ogni classe completa $C$ di funzioni egualmente limitate in $D$ e soddisfacenti alla stessa condizione di Lipschitz.*

DIMOSTRAZIONE. - Per ipotesi esiste una costante $R>0$, tale che tutte le funzioni $z(x, y)$ della classe $C$ soddisfino, in $D$, alla condizione

$$|z(x, y)| \leq R. \tag{1}$$

Si ha poi, per $P_1$ e $P_2$ in $D$,

$$|z(P_1) - z(P_2)| \leq K\overline{P_1P_2} \tag{2}$$

e quindi $|p| \leq K, |q| \leq K$.

Se $M$ è il maggiore tra i numeri $R$ e $K$, si ha allora, per tutte le funzioni di $C$,

$$\mathfrak{J}_D(z) > \iint_D f_M(x, y)\,dx\,dy$$

e quindi l'estremo inferiore $i$ di $\mathfrak{J}_D(z)$, in $C$, è finito.

Sia ora

$$z_1(x, y),\quad z_2(x, y),\ldots,\quad z_n(x, y),\ldots \tag{3}$$

una successione minimizzante, soddisfacente alla condizione

$$\mathfrak{J}_D(z_n) \leq i + \frac{1}{n}.$$

Siccome le funzioni della successione (3) sono, per la (1), egualmente limitate in $D$ e, per la (2), egualmente continue in $D$, dalla (3) potrà estrarsi una successione parziale

$$\bar{z}_1(x, y),\quad \bar{z}_2(x, y),\ldots,\quad \bar{z}_n(x, y),\ldots$$

---

[5] L. TONELLI, luogo cit. in [1], p. 118.

$\left(\text{per la quale sarà ancora } \mathfrak{J}_D(\bar{z}_n) \leqslant i + \frac{1}{n}\right)$ convergente uniformemente in $D$ a una funzione $z_\infty(x, y)$ che soddisfa ancora alle condizioni (1) e (2), come facilmente si dimostra.

Ora si ha sempre

$$\mathfrak{J}_D(\bar{z}_n) \leqslant i + 1$$

e quindi, per il teorema II, $\mathfrak{J}_D(z_\infty)$ esiste finito.

Essendo la classe $C$ completa, sarà allora

$$\mathfrak{J}_D(z_\infty) \geqslant i$$

e, per la semicontinuità, dimostrata nel teorema I,

$$\mathfrak{J}_D(z_\infty) = i.$$

5. - Lemma. — *Se $\varphi(x, y)$ è una funzione definita in un insieme chiuso e limitato $\bar{E}$ e ivi Lipschitziana, è possibile determinare una funzione $\psi(x, y)$, definita e Lipschitziana in tutto il piano $(x, y)$, coincidente in $\bar{E}$ con la $\varphi(x, y)$.*

Dimostrazione. - Per ipotesi, se $Q_1$ e $Q_2$ sono due punti dell'insieme $\bar{E}$, la $\varphi(x, y)$ soddisfa alla condizione

$$(1) \qquad |\varphi(Q_1) - \varphi(Q_2)| < K_1 \overline{Q_1 Q_2}$$

dove $K_1$ è una opportuna costante positiva.

Noi ci proponiamo di determinare una costante $K_2 \geqslant K_1$ e una funzione $\psi(x, y)$, coincidente in $\bar{E}$ colla $\varphi(x, y)$, in modo che, presi due punti qualunque, $P_1$ e $P_2$, del piano $(x, y)$, si abbia

$$(2) \qquad |\psi(P_1) - \psi(P_2)| < K_2 \overline{P_1 P_2}.$$

Ora è nota ([6]) l'esistenza di una funzione $\psi(x, y)$, continua in tutti i punti del piano $(x, y)$, la quale coincida in $\bar{E}$ colla funzione assegnata $\varphi(x, y)$, supposta continua.

Noi definiremo la $\psi(x, y)$ ripetendo la costruzione data dal Lebesgue in l. c. ([6]) (salvo un cambiamento di piccola importanza), e dimostreremo che se la $\varphi(x, y)$ soddisfa in $\bar{E}$ alla (1), la $\psi(x, y)$ così definita soddisfa alla (2).

Dividiamo, mediante parallele agli assi $x$ e $y$, il piano $(x, y)$ in quadrati, tutti di lato eguale ad 1; mediante parallele agli assi, dividiamo poi ciascuno di questi quadrati in quattro quadrati eguali; e così proseguiamo indefinitamente.

Abbiamo in tal modo, successivamente, delle divisioni $\Delta_1$, $\Delta_2$,...., $\Delta_n$,.... del piano $(x, y)$ in quadrati di lato $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$.

---

([6]) Vedi per es. H. Lebesgue: *Sur le problème de Dirichlet.* Rend. Circ. Mat. di Palermo, vol. XXIV, II. sem. 1907, n. 6.

Indichiamo con $D_1$ il complesso di quei quadrati della divisione $\Delta_1$ che non contengono, all'interno o sul contorno, nessun punto di $\overline{E}$; con $D_2$ il complesso di quei quadrati di $\Delta_2$, non interni a $D_1$, e che non contengono, all'interno o nel contorno, punti di $\overline{E}$; con $D_3$ il complesso di quei quadrati di $\Delta_3$, non interni a $D_1$ o a $D_2$, e che non contengono, all'interno o nel contorno, punti di $\overline{E}$. E così via.

Sia poi $D$ il complesso di tutti i quadrati facenti parte di $D_1$, di $D_2$,...., di $D_n$,.....

Definiamo, in ciascun vertice dei quadrati di $D$, la funzione $\psi(x, y)$ ponendola eguale al minimo dei valori che la $\varphi(x, y)$ prende nei punti di $\overline{E}$ che si trovano alla minima distanza dal vertice stesso.

Sul contorno di un quadrato $Q_{n,m}$ di $D_n$, la $\psi(x, y)$ risulta definita in un numero finito di punti; e precisamente nei vertici di $Q_{n,m}$ e in un certo gruppo di punti, i quali sono sicuramente in numero finito perchè, se $\delta > 0$ rappresenta la minima distanza del contorno di $Q_{n,m}$ dall'insieme $\overline{E}$, non possono essere adiacenti a $Q_{n,m}$ quadrati di lato più piccolo di quelli appartenenti alla divisione $\Delta_r$, dove $r \geqslant n$ è il più piccolo intero positivo per cui è $\frac{1}{2^r} < \delta$.

Definiamo la $\psi(x, y)$, nel contorno di $Q_{n,m}$, in modo che essa vari linearmente fra i valori che assume nei punti in cui è già definita; successivamente, sui segmenti delle parallele alla retta $y = x$ che risultano compresi in $Q_{n,m}$, definiamo la $\psi(x, y)$ facendola variare linearmente tra i valori che assume negli estremi.

In tutti i punti di $\overline{E}$ poniamo infine $\psi = \varphi$.

La funzione $\psi(x, y)$ che così si ottiene risulta definita in tutto il piano $(x, y)$. Resta da dimostrare che essa è anche Lipschitziana.

*a*) Cominciamo col considerare la $\psi(x, y)$ definita nei vertici di quadrati appartenenti a $D$.

Se $P_1$ e $P_2$ sono vertici di tali quadrati esistono allora sempre in $\overline{E}$ due punti $P_1'$ e $P_2'$ per cui è $\psi(P_1) = \varphi(P_1')$, $\psi(P_2) = \varphi(P_2')$.

Diremo poi, per brevità, che $P_1$ e $P_2$ sono vertici di quadrati di lato $\frac{1}{2^r}$ e $\frac{1}{2^s}$ rispettivamente, se tra i quadrati di cui $P_1(P_2)$ è vertice, ve n'è almeno uno di lato $\frac{1}{2^r}\left(\frac{1}{2^s}\right)$, mentre gli altri hanno tutti lato $\geqslant \frac{1}{2^r}\left(\frac{1}{2^s}\right)$.

Supponiamo dapprima $P_1$ e $P_2$ vertici di quadrati di lato 1; si ricava allora, per la (1), indicando con $\lambda$ la massima distanza tra i punti di $\overline{E}$,

$$\frac{|\psi(P_1) - \psi(P_2)|}{\overline{P_1 P_2}} = \frac{|\varphi(P_1') - \varphi(P_2')|}{\overline{P_1' P_2'}} \frac{\overline{P_1' P_2'}}{\overline{P_1 P_2}}$$

$$< K_1 \lambda \tag{3}$$

perchè è $\overline{P_1 P_2} \geqslant 1$.

Se $P_1$ e $P_2$ sono vertici di quadrati di lato $\frac{1}{2}$, si ha

$$\overline{P_1'P_2'} \leqslant \overline{P_1P_2} + \delta(P_1) + \delta(P_2)$$

dove $\delta(P_1) = \overline{P_1P_1'}$ e $\delta(P_2) = \overline{P_2P_2'}$ rappresentano le minime distanze di $P_1$ e $P_2$ da $\overline{E}$, minime distanze che non possono superare il valore $\sqrt{2}$, perchè se un punto $P$ del piano $(x, y)$ ha da $\overline{E}$ una minima distanza $\delta(P) > \sqrt{2}$, appartiene sicuramente a quei quadrati della divisione $\varDelta_1$ che danno luogo a $D_1$; se è un vertice in tale divisione, è vertice comune di quattro quadrati di $D_1$; se appartiene a un lato di un quadrato, fanno parte di $D_1$ i due quadrati che hanno quel lato comune. In ogni caso, $P$ non può essere vertice di un quadrato di lato $\frac{1}{2}$.

Ne segue, osservando che è $\overline{P_1P_2} \geqslant \frac{1}{2}$,

$$\frac{\overline{P_1'P_2'}}{\overline{P_1P_2}} \leqslant 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} < 7$$

e quindi

$$\frac{|\psi(P_1) - \psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} < 7K_1. \tag{4}$$

Se, in generale, $P_1$ e $P_2$ sono vertici di quadrati di lato $\frac{1}{2^n}$, si ottiene ancora la (4), perchè si ha $\delta(P_1) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$, $\delta(P_2) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$, $\overline{P_1P_2} \geqslant \frac{1}{2^n}$.

Nel caso in cui $P_1$ e $P_2$ siano vertici di quadrati di lati $\frac{1}{2^r}$ e $\frac{1}{2^s}$, con $s > r \geqslant 1$, vale sempre la (4), perchè si ha $\delta(P_1) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{r-1}}$, $\delta(P_2) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{s-1}}$, $\overline{P_1P_2} \geqslant \frac{1}{2^r}$.

Supposto infine che $P_1$ e $P_2$ siano vertici di quadrati di lati 1 e $\frac{1}{2^s}$, con $s \geqslant 1$, si ricava

$$\frac{\overline{P_1'P_2'}}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \lambda$$

e quindi la (3).

Dalle (3) e (4) si deduce perciò, considerando $\psi(x, y)$ definita nei punti che risultano vertici di quadrati appartenenti a $D$,

$$\frac{|\psi(P_1) - \psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} < K_1(7 + \lambda) \tag{5}$$

*b)* Supponiamo che $P_1$ e $P_2$ appartengano a un quadrato $\varDelta$ facente parte di $D$.

Sul contorno di $\varDelta$ la $\psi(x, y)$ varia linearmente tra i valori che assume nei punti che sono vertici di quadrati appartenenti a $D$.

Perciò, se $P_1$ e $P_2$ appartengono a uno stesso lato di $\Delta$, si ricava facilmente che continua a valere la (5).

Se $P_1$ e $P_2$ appartengono a due lati di $\Delta$ aventi un vertice $P_0$ comune si avrà

$$\frac{|\psi(P_1)-\psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \frac{|\psi(P_1)-\psi(P_0)|}{\overline{P_1P_0}} + \frac{|\psi(P_0)-\psi(P_2)|}{\overline{P_0P_2}}$$

$$< 2K_1(7+\lambda). \tag{6}$$

Nel caso in cui $P_1$ e $P_2$, in $\Delta$, siano situati sulla medesima perpendicolare alla retta $y=x$, si considerino le due parallele alla retta $y=x$, passanti per $P_1$ e $P_2$, e intersecanti il contorno di $\Delta$ rispettivamente nei punti $R_1$ e $S_1$, $R_2$ e $S_2$.

Se, ad esempio, è $\overline{R_1S_1} \leqslant \overline{R_2S_2}$ abbassiamo dai punti $R_1$ e $S_1$ le perpendicolari a $\overline{R_2S_2}$, che incontreranno $\overline{R_2S_2}$ nei punti $R_2'$ e $S_2'$ rispettivamente; siccome su $\overline{R_1S_1}$ e su $\overline{R_2'S_2'}$ la $\psi(x, y)$ varia linearmente, la differenza $|\psi(P_1)-\psi(P_2)|$ è massima in corrispondenze di una coppia di estremi, ad esempio $R_1$ e $R_2'$: si ha allora, osservando che è $\overline{R_1R_2'}=\overline{P_1P_2}$, $\overline{R_1R_2'} \geqslant \frac{\overline{R_1R_2}}{\sqrt{2}}$, $\overline{R_1R_2'} \geqslant \overline{R_2R_2'}$,

$$\frac{|\psi(P_1)-\psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \frac{|\psi(R_1)-\psi(R_2')|}{\overline{R_1R_2'}}$$

$$\leqslant \sqrt{2}\,\frac{|\psi(R_1)-\psi(R_2)|}{\overline{R_1R_2}} + \frac{|\psi(R_2)-\psi(R_2')|}{\overline{R_2R_2'}}$$

$$< 6K_1(7+\lambda) \tag{7}$$

per la (6).

Siano infine $P_1$ e $P_2$ due punti qualsiasi di $\Delta$; indichiamo con $P_1'$ il punto in cui la perpendicolare abbassata da $P_1$ su $\overline{R_2S_2}$ (supposto ancora $\geqslant \overline{R_1S_1}$) incontra $\overline{R_2S_2}$; si ricava, per le (6) e (7),

$$\frac{|\psi(P_1)-\psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \frac{|\psi(P_1)-\psi(P_1')|}{\overline{P_1P_1'}} + \frac{|\psi(P_1')-\psi(P_2)|}{\overline{P_1'P_2}}$$

$$< 8K_1(7+\lambda). \tag{8}$$

*c*) Siano $P_1$ e $P_2$ situati sul contorno di quadrati distinti facenti parte di $D$. Possono allora darsi i seguenti casi:

1) $P_1$ e $P_2$ appartengono rispettivamente a due segmenti $\delta_1$ e $\delta_2$ sui quali la $\psi(x, y)$ varia linearmente tra i due valori assunti negli estremi e tali segmenti sono paralleli allo stesso asse delle coordinate, sul quale però le proiezioni di $\delta_1$ e $\delta_2$ non hanno nessun punto interno comune.

Esistono allora due estremi, $P_1'$ in $\delta_1$, $P_2'$ in $\delta_2$ tali che sia $\overline{P_1'P_2'} \leqslant \overline{P_1P_2}$, e, siccome è anche $\overline{P_1P_2} \geqslant \overline{P_1P_1'}$, $\overline{P_1P_2} \geqslant \overline{P_2P_2'}$, si ricava

$$\frac{|\psi(P_1)-\psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \frac{|\psi(P_1)-\psi(P_1')|}{\overline{P_1P_1'}} + \frac{|\psi(P_1')-\psi(P_2')|}{\overline{P_1'P_2'}} + \frac{|\psi(P_2')-\psi(P_2)|}{\overline{P_2'P_2}}$$

$$\leqslant 3K_1(7+\lambda) \tag{9}$$

per la (5).

2) I segmenti $\delta_1$ e $\delta_2$ sono paralleli uno all'asse della $x$, l'altro all'asse della $y$; inoltre la retta su cui è situato $\delta_1$ non incontra $\delta_2$ in un punto interno e viceversa; si può allora ripetere la stessa osservazione del caso precedente e continua a valere la (9).

3) I segmenti $\delta_1$ e $\delta_2$ sono paralleli allo stesso asse delle coordinate e le loro proiezioni su tale asse hanno almeno un punto interno comune; in tal caso si osservi che, siccome tanto $\delta_1$ quanto $\delta_2$ fanno ciascuno parte del contorno di due quadrati distinti, di lati $\geqslant \delta_1$ e $\geqslant \delta_2$ rispettivamente, la loro distanza è $\geqslant \delta_1 + \delta_2$ ed è perciò $\overline{P_1P_2} \geqslant \delta_1 + \delta_2$.

Presi poi, su $\delta_1$ e su $\delta_2$, due estremi, $P_1'$ e $P_2'$, in modo che sia

$$|\psi(P_1') - \psi(P_2')| \geqslant |\psi(P_1) - \psi(P_2)|$$

si ha

$$\frac{|\psi(P_1) - \psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \frac{|\psi(P_1') - \psi(P_2')|}{\overline{P_1'P_2'}} \; \frac{\overline{P_1'P_2'}}{\overline{P_1P_2}}$$

ed è

$$\overline{P_1'P_2'} \leqslant \overline{P_1P_2} + \overline{P_1P_1'} + \overline{P_2P_2'}$$

da cui, avendosi $\overline{P_1P_1'} \leqslant \delta_1$, $\overline{P_2P_2'} \leqslant \delta_2$,

$$\frac{\overline{P_1'P_2'}}{\overline{P_1P_2}} \leqslant 3 \tag{10}$$

cioè vale ancora la (9).

4) I segmenti $\delta_1$ e $\delta_2$ sono paralleli uno all'asse delle $x$, l'altro all'asse delle $y$ e la retta su cui è situato $\delta_1$ incontra $\delta_2$ in un punto interno. In tal caso è sicuramente $\delta_2 > \delta_1$, perchè $\delta_2$ e $\delta_1$ sono lati di quadrati di due divisioni $\Delta_p$ e $\Delta_q$ rispettivamente e, per l'ipotesi fatta, deve essere $p < q$.

Si ha allora $\overline{P_1P_2} \geqslant \delta_2$ perchè $\delta_2$ fa parte del contorno di due quadrati di lato $\geqslant \delta_2$; vale allora la (10) e quindi la (9).

*d*) Se $P_1$ e $P_2$ sono punti del piano $(x, y)$ che non appartengono all'insieme $\overline{E}$, indichiamo con $\Delta_1$ e $\Delta_2$ i quadrati (o due dei quadrati) cui appartengono, con $P_1'$ e $P_2'$ i punti in cui il segmento $\overline{P_1P_2}$ interseca i contorni di $\Delta_1$, $\Delta_2$.

Si ha allora

$$\frac{|\psi(P_1) - \psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \frac{|\psi(P_1) - \psi(P_1')|}{\overline{P_1P_1'}} + \frac{|\psi(P_1') - \psi(P_2')|}{\overline{P_1'P_2'}} + \frac{|\psi(P_2') - \psi(P_2)|}{\overline{P_2'P_2}}$$

$$< 19\ K_1(7 + \lambda) \tag{11}$$

per le (8) e (9).

*e*) Supponiamo infine che $P_1$ appartenga a $D$, $P_2$ a $\overline{E}$. In tal caso, fissato un numero $N > 0$ comunque grande, internamente al segmento $\overline{P_1P_2}$ esistono punti appartenenti a campi $D_n$, con $n > N$.

Si può perciò prendere $n_0$ e, in $D_{n_0}$, il vertice $P_0$ di un quadrato (che non contenga $P_1$ e abbia almeno un punto comune al segmento $\overline{P_1P_2}$), in modo che risulti

$$\overline{P_1P_0} < \overline{P_1P_2}, \quad \overline{P_0P_2} < \overline{P_1P_2}.$$

Siccome è $\psi(P_2) = \varphi(P_2)$, indicando con $P_1'$ il punto in cui il segmento $\overline{P_1P_0}$ interseca il contorno del quadrato $\Delta_1$ cui appartiene $P_1$, si ricava

$$\frac{|\psi(P_1) - \psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} < \frac{|\psi(P_1) - \psi(P_1')|}{\overline{P_1P_1'}} + \frac{|\psi(P_1') - \psi(P_0)|}{\overline{P_1'P_0}} + \frac{|\psi(P_0) - \psi(P_2)|}{\overline{P_0P_2}}.$$

D'altra parte è $\psi(P_0) = \varphi(P_0')$, dove $P_0'$ è un punto di $\overline{E}$ tale che sia $\overline{P_0P_0'} \leqslant \overline{P_0P_2}$.

Sarà allora $\overline{P_0'P_2} \leqslant 2\,\overline{P_0P_2}$ e quindi, per le (1), (8), (9),

$$\frac{|\psi(P_1) - \psi(P_2)|}{\overline{P_1P_2}} \leqslant \frac{|\psi(P_1) - \psi(P_1')|}{\overline{P_1P_1'}} + \frac{|\psi(P_1') - \psi(P_0)|}{\overline{P_1'P_0}} + 2\,\frac{|\varphi(P_0') - \varphi(P_2)|}{\overline{P_0'P_2}}$$
$$< (11(7+\lambda)+2)K_1$$

che dimostra, assieme alle (1) e (11), la tesi.

Si è trovato così per $K_2$ il valore 19 $K_1$ $(7+\lambda)$.

6. - TEOREMA IV. — *Sia $\mathfrak{J}_D(z)$ quasi-regolare positivo, e soddisfi alla condizione del teorema I.*

*Allora, se $C$ è la classe di tutte le funzioni $z(x, y)$ che soddisfano in $\overline{D}$ alle medesima condizione di Lipschitz*

$$|z(P_1) - z(P_2)| \leqslant K\overline{P_1P_2}$$

*e coincidono sulla frontiera $F$ di $D$ con una funzione assegnata $\varphi(x, y)$, ivi Lipschitziana, se $K$ è sufficientemente grande la classe $C$ non è vuota; inoltre se per una funzione $\bar{z}(x, y)$ di $C$, $\mathfrak{J}_D(\bar{z})$ esiste finito, in $C$ esiste il minimo assoluto per $\mathfrak{J}_D(z)$.*

DIMOSTRAZIONE. - Se $Q_1$ e $Q_2$ sono due punti di $F$ si ha per ipotesi

$$|\varphi(Q_1) - \varphi(Q_2)| < K_1\overline{Q_1Q_2}$$

e quindi, per il lemma dimostrato, si può affermare che per $K \geqslant 19K_1(7+\lambda)$ la classe $C$ non è vuota.

Le funzioni di $C$ sono egualmente continue in $D$; esse sono inoltre, in $D$, egualmente limitate. Infatti se $Q_0$ è un punto di $F$ e $P$ un punto di $D$, si ha

$$|z(P)| \leqslant |z(Q_0)| + K\overline{Q_0P} \leqslant |\varphi(Q_0)| + K\lambda$$

dove $\lambda$ è la massima distanza tra i punti di $\overline{D}$. Non resta allora che applicare il teorema III.

## § 2. - Un teorema sulla semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}_D(z)$.

7. - Supponiamo che per il campo aperto e limitato $D$, approssimabile mediante i campi $D_n$ in modo che sia $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$, esista, in corrispondenza di ogni $n$, un numero finito (variabile con $n$) di poligonali chiuse e semplici, una delle quali contenga nel suo interno tutte le altre, ciascuna costituita di un numero finito di lati appartenenti a $D$, in modo che se $\Delta_n$ è l'insieme dei punti interni alla prima ed esterni alle altre, $\overline{\Delta}_n$ faccia parte di $D$, contenga nel suo interno $\overline{D}_n$, e sia inoltre interno a $\Delta_{n+1}$.

Si ha ovviamente $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = D$; indicando poi con $\lambda_n$ e $l_n$ contemporaneamente i contorni di $\Delta_n$ e di $D_n$ e le loro lunghezze, ammettiamo che esista un numero $\lambda > 0$ per cui sia sempre $\lambda_n < \lambda$.

Se le ipotesi ora fatte sono verificate, diremo che il campo $D$ soddisfa alla condizione ($\lambda$).

Ciò posto, dimostriamo il seguente

TEOREMA V. - *Se il campo D soddisfa alla condizione* ($\lambda$); *se* $\mathfrak{J}_D(z)$ *è quasi-regolare positivo e la funzione* $F(x, y, z, p, q)$ *soddisfa alle seguenti condizioni*:

*a) esistono finite e continue, per* $(x, y)$ *in* $D$, $z, p, q$ *arbitrari, oltre alle derivate* $F_p(x, y, z, p, q)$ *e* $F_q(x, y, z, p, q)$, *le derivate* $F_{px}(x, y, z, p, q)$, $F_{qy}(x, y, z, p, q)$;

*b) esistono quattro numeri* $\bar{z}, \bar{p}, \bar{q}, M > 0$, *tali che* $F(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})$ *sia integrabile in* $D$, *esista finita la derivata* $F_z(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})$, *e risulti, per* $(x, y)$ *in* $D$,

$$|F_z(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M, \quad |F_p(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M, \quad |F_q(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}| < M,$$
$$|F_{px}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M, \quad |F_{qy}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) < M;$$

*c) per tutti i valori finiti di* $z, p, q$ *si ha*

$$F(x, y, z, p, q) - F(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) \geqslant (z-\bar{z}) F_z(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})$$
$$+ (p-\bar{p}) F_p(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) + (q-\bar{q}) F_q(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q});$$

*allora* $\mathfrak{J}_D(z)$ *è semicontinuo inferiormente, nella classe C delle funzioni* $z(x, y)$ *assolutamente continue e integrabili in D, per ogni funzione di C che renda* $\mathfrak{J}_D(z)$ *finito.*

DIMOSTRAZIONE. - Sia $z_0(x, y)$ una funzione della classe $C$, per cui $\mathfrak{J}_D(z_0)$ esista finito.

Preso $r \geqslant n$, indichiamo con $E_{nr}$ l'insieme costituito dai punti esterni a $D_n$ e interni a $\Delta_r$.

Si ha per la condizione $c$)

$$(1)\qquad 0\leqslant F(x,y,z_0,p_0,q_0)-\{F(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+(z_0-\bar z)F_z(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+ \\ +(p_0-\bar p)F_p(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+(q_0-\bar q)F_q(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)\}$$

da cui, fissato $\sigma>0$ e indicando con $B_n$ l'insieme complementare di $D_n$ rispetto a $D$,

$$(2)\qquad 0\leqslant\iint_{E_{nr}} F(x,y,z_0,p_0,q_0)dxdy-\iint_{E_{nr}}\{F(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+(z_0-\bar z)F_z(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+ \\ +(p_0-\bar p)F_p(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+(q_0-\bar q)F_q(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)\}\,dxdy\leqslant \\ \leqslant\iint_{B_n}\{|F(x,y,z_0,p_0,q_0)|+|F(x,y,\bar z,\bar p,\bar q|\}\,dxdy+ \\ +M\iint_{B_n}\{|z_0-\bar z|+|p_0-\bar p|+|q_0-\bar q|\}\,dxdy<\sigma$$

quando sia $n\geqslant n_0$ sufficientemente grande.

Si ha poi

$$(3)\qquad F(x,y,z,p,q)\geqslant F(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+(z-\bar z)F_z(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+ \\ (p-\bar p)F_p(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+(q-\bar q)F_q(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)$$

e quindi $\mathfrak{I}_D(z)$, se $z$ è una funzione di $C$, o esiste finito o vale $+\infty$.

Possiamo evidentemente limitarci al caso di $\mathfrak{I}_D(z)$ finito. In tal caso si ha dalle (2) e (3)

$$(4)\qquad \iint_{E_{n_0r}}F(x,y,z,p,q)dxdy-\iint_{E_{n_0r}}F(x,y,z_0,p_0,q_0)dxdy\geqslant \\ \geqslant\iint_{E_{n_0r}}\{(z-z_0)F_z(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)+(p-p_0)F_p(x,y,\bar z,\bar p,q)+ \\ +(q-q_0)F_q(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)\}\,dxdy-\sigma.$$

Ora, per $|z-z_0|<\varrho$, si ricava

$$(5)\qquad \left|\iint_{E_{n_0r}}(z-z_0)F_z(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)dxdy\right|<\varrho MD.$$

Osserviamo poi che il campo $E_{n_0r}$ può non essere connesso ma consta sempre di un numero finito di parti connesse ciascuna delle quali ha per contorni delle poligonali chiuse, facenti parte di $\lambda_r$ o di $l_{n_0}$.

Considerando una di queste parti, $E'_{n_0r}$, sia $\lambda_r'$ la lunghezza della porzione di $\lambda_r$ che le compete, $l'_{n_0}$ la corrispondente di $l_{n_0}$.

Si ha, per il teorema di GAUSS,

$$\iint_{E'_{n_0 r}} \{(p-p_0)F_p(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})+(q-q_0)F_q(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\}\, dxdy$$

$$=\int_{\lambda_r'+l'_{n_0}} \{(z-z_0)F_p(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})dy+(z-z_0)F_q(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})dx\}$$

$$-\iint_{E'_{n_0 r}} (z-z_0)\{F_{px}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})+F_{qy}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\}\, dxdy$$

e quindi, supposto $|z-z_0|<\varrho$, si ricava

$$\left|\iint_{E_{n_0 r}} \{(p-p_0)F_p(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})+(q-\bar{q})F_q(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\}\, dxdy\right|< \tag{6}$$
$$<2\varrho M(\lambda+l_{n_0})+2\varrho MD$$

Preso $\varrho$ in modo che sia $2\varrho M\{\lambda+l_{n_0}+2D\}<\sigma$ si ricava, per le (4), (5) e (6),

$$\iint_{B_{n_0}} F(x, y, z, p, q)dxdy-\iint_{B_{n_0}} F(x, y, z_0, p_0, q_0)dxdy> -2\sigma.$$

Considerando ora l'insieme $D_{n_0}$, che consta di un numero finito di quadrati, siccome $\mathfrak{J}_{D_{n_0}}(z)$ è quasi-regolare positivo e vale la condizione *a*), la semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}_{D_{n_0}}(z)$, rispetto alla funzione $z_0(x, y)$, segue da un teorema di TONELLI (7) e quindi la tesi è dimostrata.

## § 3. - Teoremi sull'esistenza dell'estremo assoluto.

8. - Se $C$ è una classe di funzioni definite in $D$, si dice che una funzione $\varphi(x, y)$, definita in $D$, è una funzione di accumulazione (8) nell'interno di $D$, rispetto a $C$, se, considerato un qualsiasi insieme chiuso $\bar{E}$, appartenente a $D$, e preso ad arbitrio $\varepsilon>0$, esiste in $C$ almeno una funzione $z(x, y)$, soddisfacente in $\bar{E}$ alla diseguaglianza

$$|\varphi(x, y)-z(x, y)|<\varepsilon.$$

Supposto poi che le funzioni di $C$ siano assolutamente continue e rendano $F(x, y, z, p, q)$ integrabile in $D$, si dice che la classe $C$ è completa (9) nell'in-

(7) L. TONELLI, luogo cit. in (2), pp. 342-343.
(8) L. TONELLI, luogo cit. in (1), p. 118.
(9) L. TONELLI, luogo cit. in (1), p. 118.

terno di $D$, se ogni funzione $\varphi(x, y)$, di accumulazione, rispetto a $C$, nell'interno di $D$, la quale risulti assolutamente continua in $D$ e renda $F(x, y, z, p, q)$ integrabile in $D$, appartiene a $C$.

Diremo infine che le funzioni di una classe $C$ sono egualmente limitate (o egualmente continue), nell'interno di $D$, se lo sono in ogni insieme $\bar{E}$, chiuso e appartenente a $D$.

9. - Per quello che esporremo in seguito è opportuno richiamare il seguente teorema di TONELLI [10].

*Sia $\mathfrak{J}_D(z)$ quasi-regolare positivo, soddisfacente alla condizione seguente:*

*a) esistono tre numeri $\alpha>0$, $\mu>0$, $M$ tali che in ogni punto $(x, y)$ di $D$ e per tutti i valori finiti di $z, p, q$, risulti*

$$F(x, y, z, p, q)>\mu\{|p|^{2+\alpha}+|q|^{2+\alpha}\}+M.$$

*Allora se le funzioni $z(x, y)$ di una classe $C$, completa nell'interno di $D$, rispetto a $\mathfrak{J}_D(z)$, sono tutte egualmente limitate nell'interno di $D$, in $C$ esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D(z)$.*

10. - TEOREMA VI. — *Sia $\mathfrak{J}_D(z)$ quasi-regolare positivo, soddisfacente alla condizione seguente:*

*a) esistono tre numeri $\alpha>0$, $\mu>0$, $M$ tali che in ogni punto $(x, y)$ di $D$ e per tutti i valori finiti di $z, p, q$, risulti*

$$F(x, y, z, p, q)>\mu\{|p|^{1+\alpha}+|q|^{1+\alpha}\}+M.$$

*Allora se le funzioni $z(x, y)$ di una classe $C$, completa nell'interno di $D$, rispetto a $\mathfrak{J}_D(z)$, sono egualmente limitate ed egualmente continue nell'interno di $D$, in $C$ esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D(z)$.*

DIMOSTRAZIONE. - Essendo $\mathfrak{J}_D(z)>MD$, l'estremo inferiore $i$ di $\mathfrak{J}_D(z)$ in $C$ è finito.

Sia allora

$$(1) \qquad z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \ldots, \quad z_n(x, y), \ldots$$

una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_D(z)$ in $C$, tale cioè che risulti

$$(2) \qquad \mathfrak{J}_D(z_n)\leq i+\frac{1}{n}.$$

Siccome le funzioni della successione (1) sono egualmente continue ed egualmente limitate in $\bar{D}_1$, possiamo estrarre dalla (1) una successione

$$(3) \qquad z_{11}, \quad z_{12}, \ldots, \quad z_{1n}, \ldots$$

---

[10] L. TONELLI, luogo cit. in [1], pp. 119-121.

convergente uniformemente in $\overline{D}_1$, a una funzione $z^{(1)}(x, y)$, la quale, per un teorema di TONELLI ([11]), sarà assolutamente continua in $D_1$, avendosi, per la condizione $a$) e per la (2), qualunque siano gli indici $m$ e $n$

$$\iint_{D_m} \{|p_n|^{1+\alpha}+|q_n|^{1+\alpha}\}\,dxdy<\frac{1}{\mu}\{i+1+|M|D\}=H. \tag{4}$$

Sia poi

$$z_{21},\quad z_{22},\ldots,\quad z_{2n},\ldots \tag{5}$$

una successione estratta dalla (3), convergente uniformemente in $\overline{D}_2$ a una funzione $z^{(2)}(x, y)$, assolutamente continua in $D_2$, coincidente con $z^{(1)}(x, y)$ in $\overline{D}_1$.

Così proseguendo, si ricava, dalle (3), (5) e dalle analoghe che potrebbero scriversi relativamente ai campi $D_3$, $D_4,\ldots$, $D_m,\ldots$, una successione

$$z_{11},\quad z_{22},\ldots,\quad z_{nn},\ldots \tag{6}$$

la quale converge in tutti i punti di $D$ a una funzione $z_\infty(x, y)$, coincidente in $\overline{D}_m$ con la $z^{(m)}(x, y)$ e quindi assolutamente continua in $D_m$.

Inoltre la successione (6) converge uniformemente alla $z_\infty(x, y)$ in ogni campo $\overline{D}_m$.

Osserviamo ora che, posto $g(p, q)=|p|^{1+\alpha}+|q|^{1+\alpha}$, esistono finite e continue le derivate $g_p$ e $g_q$ e si ha

$$g(p, q)\geqslant g(p_0, q_0)+(p-p_0)g_p(p_0, q_0)+(q-q_0)g_q(p_0, q_0)$$

cioè, per un dato $n$, l'integrale

$$G_{D_n}(z)=\iint_{D_n}\{|p|^{1+\alpha}+|q|^{1+\alpha}\}\,dxdy \tag{7}$$

è quasi-regolare positivo.

Ne segue che, avendosi, per la (4),

$$\iint_{D_n}\{|p_{mm}|^{1+\alpha}+|q_{mm}|^{1+\alpha}\}\,dxdy<H,$$

esisterà finito, per un teorema di TONELLI ([12]), l'integrale

$$\iint_{D_n}\{|p_\infty|^{1+\alpha}+|q_\infty|^{1+\alpha}\}\,dxdy. \tag{8}$$

([11]) L. TONELLI, luogo cit. in ([1]), pp. 92-96.
([12]) L. TONELLI, luogo cit. in ([1]), pp. 114-117.

Inoltre l'integrale (7) è semicontinuo inferiormente ([13]) rispetto a ogni funzione $z(x, y)$, assolutamente continua in $D_n$, per cui $G_{D_n}(z)$ esiste finito; sarà perciò

$$\iint_{D_n} \{ |p_\infty|^{1+\alpha} + |q_\infty|^{1+\alpha} \} \, dxdy \leq H$$

e quindi

$$\iint_{D} \{ |p_\infty|^{1+\alpha} + |q_\infty|^{1+\alpha} \} \, dxdy \leq H$$

da cui

$$\iint_{D} \{ |p_\infty| + |q_\infty| \} \, dxdy \leq H + 2D$$

cioè la $z_\infty(x, y)$ è assolutamente continua in $D$.

Seguendo una dimostrazione di TONELLI ([14]), osserviamo ora che si ha, per tutti gli $m$ ed $n$,

$$\mathfrak{J}_D(z_{mm}) > \mathfrak{J}_{D_n}(z_{mm}) - |M| (D - D_n)$$

cioè

$$\mathfrak{J}_{D_n}(z_{mm}) < \mathfrak{J}_D(z_{mm}) + |M| (D - D_n) < i + 1 + |M| D.$$

Per la condizione $a)$ si può allora affermare che esiste finito l'integrale $\mathfrak{J}_{D_n}(z_\infty)$ e, per la semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}_{D_n}(z)$ ([15]), sarà

$$\mathfrak{J}_{D_n}(z_\infty) \leq i + |M| (D - D_n). \tag{9}$$

Ora, per la condizione $a)$, l'integrale $\mathfrak{J}_D(z_\infty)$ o esiste finito o è infinito positivo e, per la (9), si ottiene

$$\mathfrak{J}_D(z_\infty) \leq i.$$

Siccome la classe $C$ è completa nell'interno di $D$, rispetto a $\mathfrak{J}_D(z)$, si ricava allora che $z_\infty(x, y)$ appartiene a $C$ e che si ha

$$\mathfrak{J}_D(z_\infty) = i.$$

OSSERVAZIONE. - La condizione del teorema, relativa alla uguale continuità delle funzioni della classe $C$, nell'interno di $D$, sarà verificata se in ogni campo $D_n$ le $z(x, y)$ soddisfano alla condizione

$$|z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)| \leq A_n \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

---

([13]) L. TONELLI, luogo cit. in ([4]), p. 337.
([14]) L. TONELLI, luogo cit. in ([1]), p. 120.
([15]) L. TONELLI, luogo cit. in ([4]), p. 337.

oppure se sono monotone nel senso di LEBESGUE e soddisfano alla condizione [16]

$$\iint_{D_n} (p^2+q^2)dxdy \leqslant B_n$$

oppure se esiste per ogni $n$ un numero $\beta_n > 0$ tale che risulti [17]

$$\iint_{D_n} \{|p|^{2+\beta_n}+|q|^{2+\beta_n}\}dxdy \leqslant C_n$$

dove $A_n$, $B_n$ e $C_n$ sono delle costanti positive dipendenti da $n$ e non dalla particolare funzione $z(x, y)$, di $C$, considerata.

11. - TEOREMA VII. — *Sia $\mathfrak{J}_D(z)$ quasi-regolare positivo, soddisfacente alle seguenti condizioni:*

*a) esistono per ogni $\varrho$ con $0<\varrho\leqslant\varrho_0$, tre numeri $\mu_\varrho>0$, $\alpha_\varrho>0$, $M_\varrho$ tali che risulti*

$$F(x, y, z, p, q) > \mu_\varrho\{|p|^{2+\alpha_\varrho}+|q|^{2+\alpha_\varrho}\}+M_\varrho$$

*per tutti i valori finiti di $z$, $p$, $q$, e per $(x, y)$ in $D$, esclusi i punti $P(x, y, z)$ interni a un cubo $A_\varrho$ di centro in $P_0(x_0, y_0, z_0)$, spigoli di lunghezza $2\varrho$ paralleli agli assi, e tale che il quadrato $S_\varrho(x_0-\varrho\leqslant x\leqslant x_0+\varrho\,;\ y_0-\varrho\leqslant y\leqslant y_0+\varrho)$ appartenga a $D$;*

*b) esistono, per lo stesso $\varrho$, tre numeri $\nu_\varrho>0$, $0<\beta_\varrho\leqslant 1$, $N_\varrho$ tali che entro $A_\varrho$ sia, per tutti i valori finiti di $p$ e $q$,*

$$F(x, y, z, p, q) > \nu_\varrho\{|p|^{1+\beta_\varrho}+|q|^{1+\beta_\varrho}\}+N_\varrho.$$

*Allora se le funzioni di una classe $C$, completa nell'interno di $C$, rispetto a $\mathfrak{J}_D(z)$, sono tutte egualmente limitate nell'interno di $D$, in $C$ esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D(z)$.*

DIMOSTRAZIONE. - Cominciamo coll'osservare che se, per un dato valore di $\varrho$, $K$ è il minore tra i numeri $M_\varrho$ e $N_\varrho$, si ha

$$\mathfrak{J}_D(z) > KD \tag{1}$$

e quindi l'estremo inferiore $i$ di $\mathfrak{J}_D(z)$, in $C$, è finito.

Sia allora

$$z_1(x, y,), \quad z_2(x, y),\ldots, \quad z_n(x, y),\ldots \tag{2}$$

una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_D(z)$, in $C$, soddisfacente cioè alla condizione

$$\mathfrak{J}_D(z_n) \leqslant i+\frac{1}{n}. \tag{3}$$

---

[16] L. TONELLI, luogo cit. in [1], p. 110.

[17] L. TONELLI, luogo cit. in [1], pp. 97-100.

Considerando il campo $A_\varrho$, può darsi che esista un $\varrho_1 \leq \varrho_0$ tale che nella successione (2) vi siano infinite funzioni prive di punti interni ad $A_{\varrho_1}$.

Vale allora la condizione $a$) e, per il teorema del n. 9, si può affermare che esiste in $C$ il minimo assoluto per $\mathfrak{J}_D(z)$.

La funzione $z_\infty(x, y)$, per cui è $\mathfrak{J}_D(z_\infty) = i$, è assolutamente continua in $D$ e non ha punti interni ad $A_{\varrho_1}$.

Può darsi invece che, per quanto piccolo si prenda $\varrho$, esista sempre nella (2) un $n_\varrho$ tale che, per $n \geqq n_\varrho$, ogni $z_n(x, y)$ abbia punti interni ad $A_\varrho$.

Fissato, in questo caso, $\varrho \ll \varrho_0$ e considerati i campi $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ possiamo senz'altro supporre che $D_n$ contenga per $n \geqq 1$ il quadrato $S_\varrho$ e che, nella successione (2), $z_n(x, y)$ abbia punti interni ad $A_{\frac{\varrho}{n}}$ (è chiaro che se questo non si verifica può estrarsi dalla (2) una successione per cui avvenga).

Preso un intero positivo $p$, indichiamo con $D_{\frac{\varrho}{p}}$ e con $D_{m,\frac{\varrho}{p}}$ i campi che si ottengono da $D$ e da $D_m$ rispettivamente non considerando in essi i punti del quadrato $S_{\frac{\varrho}{p}}$.

Le $z_n(x, y)$ sono ugualmente continue in $\overline{D}_{m,\frac{\varrho}{p}}$.

Infatti si ricava dalla $a$) per ogni $n$,

$$(4) \qquad \iint_{D_{\frac{\varrho}{p}}} \left\{ |p_n|^{2+\alpha_{\frac{\varrho}{p}}} + |q_n|^{2+\alpha_{\frac{\varrho}{p}}} \right\} dx\,dy < \frac{1}{\mu_{\frac{\varrho}{p}}} \left\{ I_D(z_n) + |M_{\frac{\varrho}{p}}| D \right\}$$

$$(5) \qquad < \frac{1}{\mu_{\frac{\varrho}{p}}} \left\{ i + 1 + |M_{\frac{\varrho}{p}}| D \right\}$$

e quindi, per un teorema di TONELLI, le $z_n(x, y)$ sono egualmente continue in ogni campo chiuso interno a $D_{\frac{\varrho}{p}}$; ponendo poi nella (5), $p + k_p$, con $k_p$ sufficientemente grande, in luogo di $p$, si deduce l'eguale continuità delle $z_n(x, y)$ in $\overline{D}_{m,\frac{\varrho}{p}}$.

Considerando ora, per ogni $z_n(x, y)$, soltanto quella parte che risulta definita nel quadrato $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$, poniamo $z_n'(x, y) = z_n(x, y)$ nei punti dell'insieme chiuso $\overline{S}'_{n,\frac{\varrho}{p}}$, contenuto in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$, in cui è $z_n(x, y) \geqq z_0 + \frac{\varrho}{p}$; $z_n'(x, y) = z_0 + \frac{\varrho}{p}$ negli altri punti di $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$. Poniamo poi $z_n''(x, y) = z_n(x, y)$ nei punti dell'insieme chiuso $\overline{S}''_{n,\frac{\varrho}{p}}$, contenuto in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$, in cui è $z_n(x, y) \leqq z_0 - \frac{\varrho}{p}$, $z_n''(x, y) = z_0 - \frac{\varrho}{p}$ negli altri punti di $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$, convenendo di non considerare definite la $z_n'(x, y)$, o la $z_n''(x, y)$, se gli insiemi $\overline{S}'_{n,\frac{\varrho}{p}}$, o $\overline{S}''_{n,\frac{\varrho}{p}}$, non contengono nessun punto.

Le $z_n'(x, y)$ sono ugualmente continue in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$.

Si ha infatti

$$\iint\limits_{\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}} \left\{ |p_n'|^{\frac{2+\alpha_{\varrho}}{p}} + |q_n'|^{\frac{2+\alpha_{\varrho}}{p}} \right\} dx\, dy = \iint\limits_{\overline{S}_{n,\frac{\varrho}{p}}} \left\{ |p_n|^{\frac{2+\alpha_{\varrho}}{p}} + |q_n|^{\frac{2+\alpha_{\varrho}}{p}} \right\} dx\, dy <$$

$$< \frac{1}{\mu_{\frac{\varrho}{p}}} \left\{ I_D(z_n) + |M_{\frac{\varrho}{p}}| D \right\} \leq \frac{1}{\mu_{\frac{\varrho}{p}}} \left\{ i + 1 + |M_{\frac{\varrho}{p}}| D \right\}$$

da cui si ricava l'eguale continuità delle $z_n'(x, y)$ in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$ per un teorema di TONELLI.

Allo stesso modo si procede per le $z_n''(x, y)$.

Indichiamo ora con $B_{\frac{\varrho}{p}}$ il parallelepipedo $\left(x_0 - \frac{\varrho}{p} \leq x \leq x_0 + \frac{\varrho}{p};\ y_0 - \frac{\varrho}{p} \leq y \leq y_0 + \frac{\varrho}{p};\ z_0 - \frac{\varrho}{2p} \leq z \leq z_0 + \frac{\varrho}{2p}\right)$. Sia $\overline{S}'''_{n,\frac{\varrho}{p}}$ l'insieme chiuso, contenuto in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$, in cui è $z_n(x, y) \geq z_0 + \frac{\varrho}{2p}$; poniamo $z_n'''(x, y) = z_n(x, y)$ in $\overline{S}'''_{n,\frac{\varrho}{p}}$, $z_n'''(x,y) = z_0 + \frac{\varrho}{2p}$ negli altri punti di $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$. Allo stesso modo definiamo la funzione $z_n^{\mathrm{IV}}(x, y)$ considerando l'insieme $\overline{S}^{\mathrm{IV}}_{n,\frac{\varrho}{p}}$ in cui si ha $z_n(x, y) \leq z_0 - \frac{\varrho}{2p}$.

È evidente che $\overline{S}'_{n,\frac{\varrho}{p}}$ è contenuto in $\overline{S}'''_{n,\frac{\varrho}{p}}$, e $\overline{S}''_{n,\frac{\varrho}{p}}$ in $\overline{S}^{\mathrm{IV}}_{n,\frac{\varrho}{p}}$.

Le $z_n'''(x, y)$, e le $z_n^{\mathrm{IV}}(x, y)$, sono ugualmente continue in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$. Fissato $\varepsilon < \frac{\varrho}{2p}$ si può allora prendere $\delta_1 > 0$, indipendente da $n$, in modo che, se $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ sono due punti di $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$ per cui si abbia

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta_1, \tag{7}$$

risulti

$$|z_n'''(x_1, y_1) - z_n'''(x_2, y_2)| < \frac{\varrho}{2p}. \tag{8}$$

Dalle (7) e (8) si ricava che se $(x_1, y_1)$ è un punto di $\overline{S}'_{n,\frac{\varrho}{p}}$, tutti i punti interni al cerchio con centro in $(x_1, y_1)$ e raggio $\delta_1$, e contenuti in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$, fanno parte di $\overline{S}'''_{n,\frac{\varrho}{p}}$.

Allo stesso modo, considerando le $z_n^{IV}(x, y)$, si può determinare $\delta_2 > 0$ indipendente da $n$, in modo che per

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta_2, \tag{9}$$

sia

$$| z_n^{IV}(x_1, y_1) - z_n^{IV}(x_2, y_2) | < \frac{\varrho}{2p} \tag{10}$$

da cui segue che se $(x_1, y_1)$ è un punto di $\overline{S}''_{n,\frac{\varrho}{p}}$, tutti i punti interni al cerchio di centro $(x_1, y_1)$ e raggio $\delta_2$, e contenuti in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p}}$, appartengono a $\overline{S}^{IV}_{n,\frac{\varrho}{p}}$.

Siccome i due insiemi $\overline{S}'''_{n,\frac{\varrho}{p}}$ e $\overline{S}^{IV}_{n,\frac{\varrho}{p}}$ non hanno punti comuni, se $d$ è la minima distanza tra $\overline{S}'_{n,\frac{\varrho}{p}}$ e $\overline{S}''_{n,\frac{\varrho}{p}}$, si ricava $d > \delta_1 + \delta_2$.

Ritornando ora alle $z_n(x, y)$, definite in $D$, indichiamo con ${}_p z_n(x, y)$ la superficie cui dà luogo la $z_n(x, y)$ quando se ne considerino solo i punti non interni al cubo $A_{\frac{\varrho}{p}}$.

Se osserviamo che le $z_n(x, y)$ sono egualmente continue nel campo $\overline{D}_{m,\frac{\varrho}{2p}}$, da quanto si è sopra dimostrato segue che le ${}_p z_n(x, y)$ sono egualmente continue in $\overline{D}_m$, intendendosi con ciò che, fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare $\delta > 0$ (che si può sempre supporre $< \delta_1 + \delta_2$ e $< \frac{\varrho}{2p}$), indipendente da $n$, in modo che se $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ sono due punti di $\overline{D}_m$ distanti fra loro meno di $\delta$, nei quali la ${}_p z_n(x, y)$ sia definita, risulti

$$| z_n(x_1, y_1) - z_n(x_2, y_2) | < \varepsilon. \tag{11}$$

Possiamo inoltre dimostrare ([18]) che, per un dato $p$, è possibile determinare $p_1 > p$ in modo che, per $(x, y)$ in $\overline{S}_{\frac{\varrho}{p_1}}$, le $z_n(x, y)$ non abbiano, per $n \geqslant p_1$, punti non interni ad $A_{\frac{\varrho}{p}}$.

Infatti, considerando un qualsiasi campo $\overline{D}_m$, le $z_n(x, y)$ sono ugualmente continue nei punti non interni al cubo $A_{\frac{\varrho}{p}}$; è quindi possibile determinare $\delta > 0$ in modo che per

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \tag{12}$$

---

([18]) L. TONELLI, op. cit. in ([2]), vol. II, n. 87, p. 291.

sia

(13) $$|z_n(x_1, y_1) - z_n(x_2, y_2)| < \frac{\varrho}{2p}$$

se i punti $(x_1, y_1, z_n(x_1, y_1))$ e $(x_2, y_2, z_n(x_2, y_2))$ non sono interni ad $A_{\frac{\varrho}{p}}$.

Sia ora $p_1 > 2p$ il più piccolo intero per cui è $\sqrt{2}\,\frac{2\varrho}{p_1} < \delta$; considerando il cubo $A_{\frac{\varrho}{p_1}}$, le $z_n(x, y)$ hanno tutte, per $n \geqslant p_1$, punti interni a $A_{\frac{\varrho}{p_1}}$ e, per la (13), non possono averne di esterni ad $A_{\frac{\varrho}{p}}$, quando $(x, y)$ appartenga a $\bar{S}_{\frac{\varrho}{p_1}}$.

Ciò premesso la dimostrazione del teorema si ottiene agevolmente.

Infatti le funzioni della successione (2) sono egualmente continue ed egualmente limitate in $\bar{D}_{1,\varrho}$; dalla (2) si può allora estrarre una successione

(14) $$z_{11},\quad z_{12},\dots,\quad z_{1n},\dots$$

convergente uniformemente in $\bar{D}_{1,\varrho}$ a una funzione $z^{(1)}(x, y)$ la quale, per la (5), sarà assolutamente continua in $D_{1,\varrho}$.

La successione (14) è poi egualmente continua ed egualmente limitata in $\bar{D}_{2,\frac{\varrho}{2}}$ e quindi da esse si può ricavare una successione

(15) $$z_{21},\quad z_{22},\dots,\quad z_{2n},\dots$$

convergente uniformemente in $\bar{D}_{2,\frac{\varrho}{2}}$ a una funzione $z^{(2)}(x, y)$, assolutamente continua in $\bar{D}_{2,\frac{\varrho}{2}}$ e coincidente in $\bar{D}_{1,\varrho}$ con la $z^{(1)}(x, y)$.

Così proseguendo, coi campi $D_{3,\frac{\varrho}{3}},\dots, D_{m,\frac{\varrho}{m}},\dots$, si ottiene, dalle (14), (15) e dalle analoghe che si potrebbero scrivere, una successione

(16) $$z_{11},\quad z_{22},\dots,\quad z_{nn},\dots$$

la quale converge uniformemente nel campo $\bar{D}_{m,\frac{\varrho}{m}}$ alla funzione $z^{(m)}(x, y)$.

Posto $z_\infty(x, y) = z^{(m)}(x, y)$ se il punto $(x, y)$ appartiene al campo $\bar{D}_{m,\frac{\varrho}{m}}$, e $z_\infty(x_0, y_0) = z_0$, la funzione $z_\infty(x, y)$ risulta definita in tutti i punti di $D$.

Proviamo ora che la successione (16) converge uniformemente in $\bar{D}_m$ alla $z_\infty(x, y)$.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, si prenda $p_0$ in modo che sia $\frac{\varrho}{p_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ e si determini il corrispondente $p_1$; per $n \geqslant p_1$ e $(x, y)$ in $\bar{S}_{\frac{\varrho}{p_1}}$ si ha allora

$$z_0 - \frac{\varrho}{p_0} < z_{nn}(x, y) < z_0 + \frac{\varrho}{p_0}$$

e quindi, ricordando la definizione di $z_\infty(x, y)$,

$$z_0 - \frac{\varrho}{p_0} \leqslant z_\infty(x, y) \leqslant z_0 + \frac{\varrho}{p_0}$$

da cui

$$| z_{nn}(x, y) - z_\infty(x, y) | < \varepsilon . \tag{17}$$

Siccome poi, nel campo $\bar{D}_{m, \frac{\varrho}{p_1}}$, le (16) convergono uniformemente alle $z_\infty(x, y)$, della (17) segue la convergenza uniforme in tutto $\bar{D}_m$.

Ciò posto si osservi che, se $k > 0$ è il più piccolo tra i numeri $\mu_\varrho$ e $\nu_\varrho$, dalle condizioni *a*) e *b*) risulta

$$F(x, y, z, p, q) > k \{ | p |^{1+\beta} + | q |^{1+\beta} \} + R \tag{18}$$

dove si è posto $R = K - 2k$ e $\beta$ in luogo di $\beta_\varrho$.

Ragionando allora come si è fatto nel teorema VI, si dimostra che la funzione $z_\infty(x, y)$ è assolutamente continua in $D$, che l'integrale $\mathfrak{I}_D(z_\infty)$ esiste finito e infine che si ha

$$\mathfrak{I}_D(z_\infty) = i .$$

OSSERVAZIONE. - Una ovvia estensione di questo teorema si ha nel caso in cui *la condizione b) valga in un numero finito di cubi* $A_\varrho^{(1)}, A_\varrho^{(2)}, \ldots, A_\varrho^{(r)}$ *coi centri nei punti* $P_1, P_2, \ldots, P_r$, *spigoli paralleli agli assi e i corrispondenti quadrati* $S_\varrho^{(1)}, S_\varrho^{(2)}, \ldots, S_\varrho^{(r)}$ *interni a* $D$, *mentre nei punti non interni a tali cubi valga la condizione a*).

12. - TEOREMA VIII. — *Sia* $\mathfrak{I}_D(z)$ *quasi-regolare positivo, soddisfacente alle seguenti condizioni*:

*a*) *esistono per ogni* $\varrho$, *con* $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$, *tre numeri* $\mu_\varrho > 0$, $\alpha_\varrho > 0$, $M_\varrho$ *tali che risulti*

$$F(x, y, z, p, q) > \mu_\varrho \{ |p|^{2+\alpha_\varrho} + | q |^{2+\alpha_\varrho} \} + M_\varrho$$

*per tutti i valori finiti di* $z, p, q$, *e per* $(x, y)$ *in* $D$, *esclusi i punti* $P(x, y, z)$ *interni al parallelepipedo*

$$A_\varrho(x_0 - \varrho \leqslant x \leqslant x_0 + \varrho\ ; \quad y_0 - \varrho \leqslant y \leqslant y_1 + \varrho\ ; \quad z_0 - \varrho \leqslant z \leqslant z_0 + \varrho)$$

*tale che il rettangolo* $S_\varrho(x_0 - \varrho \leqslant x \leqslant x_0 + \varrho\ ; y_0 - \varrho \leqslant y \leqslant y_1 + \varrho)$ *sia interno a* $D$;

*b*) *esistono, per lo stesso* $\varrho$, *tre numeri* $\nu_\varrho > 0$, $0 < \beta_\varrho \leqslant 1$, $N_\varrho$ *tali che risulti, nei punti interni ad* $A_\varrho$ *e per tutti i valori finiti di* $p$ *e* $q$,

$$F(x, y, z, p, q) > \nu_\varrho \{ |p|^{1+\beta_\varrho} + | q |^{1+\beta_\varrho} \} + N_\varrho .$$

*Allora, se le funzioni* $z(x, y)$ *di una classe* $C$, *completa nell'interno* *di $D$, rispetto a $\mathfrak{I}_D(z)$, sono tutte ugualmente limitate nell'interno di $D$, in $C$ esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{I}_D(z)$.*

DIMOSTRAZIONE - Come nel teorema precedente, si dimostra che l'estremo inferiore $i$ per $\mathfrak{I}_D(z)$, in $C$, è finito.

Considerata allora una successione minimizzante

$$z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_n(x, y), \dots, \tag{1}$$

se esiste un $\varrho_1$, con $0 < \varrho_1 \leqq \varrho_0$ tale che nella (1) vi siano infinite funzioni prive di punti interni ad $A_{\varrho_1}$ si ricava, per il teorema del n. 9, l'esistenza, in $C$, del minimo per $\mathfrak{I}_D(z)$.

Può darsi invece che, per quanto piccolo si prenda $\varrho$, esista sempre un $n_\varrho$ tale che per $n \geqq n_\varrho$ le $z_n(x, y)$ abbiamo tutte punti interni ad $A_\varrho$.

Fissato, in questo caso, $\varrho \leqq \varrho_0$, supporremo che il rettangolo $S_\varrho$ appartenga a $D_n$ per $n \geqq 1$ e che nella successione (1) $z_n(x, y)$ abbia punti interni ad $A_{\frac{\varrho}{n}}$.

Se ora, preso un intero positivo $p$, indichiamo con ${}_pz_n(x, y)$ quella funzione cui dà luogo la $z_n(x, y)$ quando se ne considerino solo i punti non interni ad $A_{\frac{\varrho}{p}}$, ragionando come nel teorema VII, si dimostra che le funzioni ${}_pz_n(x, y)$ sono egualmente continue in ogni campo $\overline{D}_m$, nel senso indicato nel teorema stesso.

Considerando il campo $\overline{D}_1$, è chiaro che le funzioni ${}_1z_n(x, y)$ si possono ottenere dalle ${}_2z_n(x, y)$, considerando in queste ultime solo quelle parti continue, il cui complesso indicheremo con ${}_1\bar{z}_n(x, y)$, ciascuna delle quali ha almeno un punto non interno ad $A_\varrho$.

Di queste parti ne esiste solo un numero finito ([19]), il cui massimo è indipendente da $n$. Infatti, per l'eguale continuità, si può determinare $\delta > 0$, indipendente da $n$, in modo che, se $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ sono due punti di $\overline{D}_1$ nei quali è definita la ${}_2z_n(x, y)$, distanti fra loro meno di $\delta$, si abbia

$$| z_n(x_1, y_1) - z_n(x_2, y_2) | < \frac{\varrho}{2}. \tag{2}$$

Diviso il rettangolo $S_{\frac{\varrho}{2}}$ in un numero $T^2$ di rettangoli uguali, di diagonale $< \delta$, se in corrispondenza di un punto di uno di questi rettangoli la $z_n(x, y)$ non è interna ad $A_\varrho$, per la (2) una parte continua della ${}_1\bar{z}(x, y)$ è certamente definita in tutto il rettangolo.

Siccome il campo $D_1$ è formato di un numero finito, $m_1$, di parti connesse, si ricava di qui che il numero di parti continue di cui consta ${}_1\bar{z}_n(x, y)$ non è maggiore di $m_1 + T^2$.

---

([19]) L. TONELLI, op. cit. in ([2]), vol. II, n. 88, p. 209.

Considerate in $\overline{D}_1$, le funzioni della successione

(3) $$_1\overline{z}_1, \quad _1\overline{z}_2, \ldots, \quad _1\overline{z}_n, \ldots$$

sono egualmente continue ed egualmente limitate; esse hanno perciò ([20]) almeno una funzione di accumulazione, in $\overline{D}_1$, $\overline{z}^{(1)}(x, y)$ definita sicuramente nei punti di $\overline{D}_1$ non interni al rettangolo $S_{\frac{\varrho}{2}}$, priva di punti interni al parallelepipedo $A_{\frac{\varrho}{2}}$ e inoltre formata al più di $m_1 + T^2$ parti continue.

Alla funzione $\overline{z}^{(1)}(x, y)$ convergerà uniformemente la successione

(4) $$_1\overline{z}_{11}, \quad _1\overline{z}_{12}, \ldots, \quad _1\overline{z}_{1n}, \ldots$$

ricavate dalla (3).

Sia ora

(5) $$z_{11}, \quad z_{12}, \ldots, \quad z_{1n}, \ldots$$

la successione formata dalle superficie della (1) di cui fanno parte rispettivamente $_1\overline{z}_{11}, {}_1\overline{z}_{12}, \ldots, {}_1\overline{z}_{1n}, \ldots$

Siccome nei punti in cui le $z_{1n}(x, y)$ non coincidono con le $_1\overline{z}_{1n}(x, y)$, sono interne ad $A_\varrho$ e inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, per $n > n_1$ le $_1\overline{z}_{1n}(x, y)$ appartengono all'intorno $(\varepsilon)$ della $\overline{z}^{(1)}(x, y)$, si può affermare che per $n > n_1$ i punti delle superfici $z_{1n}(x, y)$ o appartengono all'intorno $(\varepsilon)$ di $\overline{z}^{(1)}(x, y)$ o sono interni ad $A_\varrho$.

Considerando ora il campo $D_2$, indichiamo con $_2\overline{z}_{1n}$ le funzioni che si ottengono dalle $_3z_{1n}$ quando si considerino in esse solo quelle parti continue, che risultano in numero finito, ciascuna delle quali ha almeno un punto non interno a $A_{\frac{\varrho}{2}}$.

Siccome le funzioni della successione

(6) $$_2\overline{z}_{11}, \quad _2\overline{z}_{12}, \ldots, \quad _2\overline{z}_{1n}, \ldots$$

sono ugualmente continue ed ugualmente limitate in $\overline{D}_2$, dalla (6) potremo estrarre una successione

(7) $$_2\overline{z}_{21}, \quad _2\overline{z}_{22}, \ldots, \quad _2\overline{z}_{2n}, \ldots$$

convergente uniformemente in $\overline{D}_2$ a una funzione $\overline{z}^{(2)}(x, y)$, composta di un numero finito di parti continue, definita sicuramente nei punti di $\overline{D}_2$ non interni al rettangolo $S_{\frac{\varrho}{3}}$, priva di punti interni a $A_{\frac{\varrho}{3}}$ e coincidente con la $\overline{z}^{(1)}(x, y)$ nei punti $(x, y)$ in cui questa è definita.

Inoltre nei punti in cui non coincide con la $\overline{z}^{(1)}(x, y)$, la $\overline{z}^{(2)}(x, y)$ non è esterna ad $A_\varrho$.

Sia poi

(8) $$z_{21}, \quad z_{22}, \ldots, \quad z_{2n}, \ldots$$

la successione formata dalle superfici della (1) di cui fanno parte rispettivamente $_2\overline{z}_{21}, {}_2\overline{z}_{22}, \ldots, {}_2\overline{z}_{2n}, \ldots$

([20]) L. AMERIO: *Sulle famiglie di insiemi,* R. Acc. d'Italia, 1941-XIX.

Anche per le (8) possiamo osservare che, fissato $\varepsilon > 0$, per $n > n_2$ sufficientemente grande i punti delle $z_{2n}(x, y)$ o appartengono all'intorno ($\varepsilon$) di $\bar{z}^{(2)}(x, y)$ o sono interni ad $A_{\frac{\varrho}{2}}$.

Così proseguendo, si ricava, dalle successioni (5), (8) e dalle analoghe che potrebbero scriversi, una successione

$$z_{11}, \quad z_{22}, \ldots, \quad z_{nn}, \ldots \tag{9}$$

la quale sarà convergente alla funzione $\bar{z}^{(r)}(x, y)$ in tutti i punti $(x, y)$ del campo $\bar{D}_r$ nei quali la $\bar{z}^{(r)}(x, y)$ è definita.

Posto allora $z_\infty(x, y) = \bar{z}^{(r)}(x, y)$ in ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di $D$ pel quale esiste un $r$ tale che la $\bar{z}^{(r)}(x, y)$ sia definita in $(\bar{x}, \bar{y})$, la $z_\infty(x, y)$ risulta definita in tutti i punti di $D$ non appartenenti al segmento $(x = x_0;\ y_0 \leqslant y \leqslant y_1)$ e in un certo insieme di punti di questo segmento. Se poniamo, nei rimanenti punti di questo segmento, $z_\infty(x, y) = z_0$, la $z_\infty(x, y)$ verrà definita in tutto il campo $D$.

Inoltre, nei punti in cui non coincide con $\bar{z}^{(r)}(x, y)$ la $z_\infty(x, y)$ è interna al parallelepipedo $A_{\frac{\varrho}{r}}$.

Considerando ora, per un dato $m$, il campo $\bar{D}_m$, si constata facilmente che le (9) convergono uniformemente, in $\bar{D}_m$, alla $z_\infty(x, y)$.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, sia $p$ il più piccolo intero per cui è $\frac{\varrho}{p} < \frac{\varepsilon}{2}$ e per cui $\bar{D}_p$ contiene $\bar{D}_m$.

Considerando il parallelepipedo $A_{\frac{\varrho}{p}}$, si può determinare $\bar{n}$ in modo che, per $n > \bar{n}$, i punti delle superfici $z_{nn}(x, y)$ o appartengano all'intorno ($\varepsilon$) di $\bar{z}^{(p)}(x, y)$ oppure siano interni ad $A_{\frac{\varrho}{p}}$.

In quest'ultimo caso sarà

$$z_0 - \frac{\varrho}{p} < z_{nn}(x, y) < z_0 + \frac{\varrho}{p}$$

e inoltre

$$z_0 - \frac{\varrho}{p} \leqslant z_\infty(x, y) \leqslant z_0 + \frac{\varrho}{p}$$

da cui

$$| z_{nn}(x, y) - z_\infty(x, y) | < \varepsilon . \tag{10}$$

Ricordando che la $z_\infty(x, y)$ coincide con la $\bar{z}^{(p)}(x, y)$ nei punti in cui questa è definita, dalle (10) segue la tesi.

Ripetendo le considerazioni fatte nel teorema VIII, si dimostra infine che la funzione $z_\infty(x, y)$ dà il minimo per $\mathfrak{J}_D(z)$ in $C$.

Osservazione. - Una estensione di questo teorema si ha nel caso in cui *la condizione b) valga nell'intorno di una linea l spaziale, semplice, aperta,* *dotata di tangente variabile con continuità e mai parallela all'asse $z$; inoltre la proiezione $\lambda$ di $l$ sul piano $(x, y)$ sia una linea semplice, aperta, dotata di tangente e di curvature continue. Nei punti $(x, y, z)$ non appartenenti a tale intorno varrà la condizione $a$).*

Quanto ai campi $S_\varrho$ e $A_\varrho$, procederemo nel modo seguente.

Considerando la curva $\lambda$, se $Q_1$ e $Q_2$ sono i suoi punti terminali, la si prolunghi, oltre $Q_1$ e oltre $Q_2$, coll'aggiunta di un tratto $\varrho$ della tangente in $Q_1$ e di un tratto $\varrho$ della tangente in $Q_2$. Sia $\lambda_1$ la curva che così si ottiene; $l_1$ quella che si ottiene da $l$ prolungandola, mediante la tangente negli estremi, in modo che si proietti su tutta la curva $\lambda_1$. In corrispondenza di un generico punto $Q$ di $\lambda_1$, si prendano, sulla normale a $\lambda_1$, da parti opposte rispetto alla curva, due punti $Q'$ e $Q''$ in modo che sia $\overline{QQ'} = \overline{QQ''} = \varrho$. Se è $0 < \varrho \leq \varrho_0$ sufficientemente piccolo, i segmenti di lunghezza $2\varrho$ così ottenuti non hanno punti comuni: $S_\varrho$ è il luogo dei punti di tali segmenti. Quanto al campo $A_\varrho$, esso sarà il luogo dei punti dei quadrati $q$, col centro nel punto $P$ di $l$ che si proietta in $Q$, aventi per proiezione il segmento di lunghezza $2\varrho$ corrispondente a $Q$ e due lati paralleli a tale segmento.

13. - TEOREMA IX. — *Sia $\mathfrak{J}_D(z)$ quasi-regolare positivo, soddisfacente alle seguenti condizioni:*

*a) esistono per ogni $\varrho$, con $0 < \varrho \leq \varrho_0$, tre numeri $\mu_\varrho > 0$, $\alpha_\varrho > 0$, $M_\varrho$ per cui risulti*

$$F(x, y, z, p, q) > \mu_\varrho \{ |p|^{2+\alpha_\varrho} + |q|^{2+\alpha_\varrho} \} + M_\varrho$$

*per tutti i valori finiti di $z, p, q$ e per $(x, y)$ in $D$, esclusi i punti $P(x, y, z)$ interni al parallelepipedo*

$$A_\varrho(x_0 - \varrho \leq x \leq x_1 + \varrho\,;\ y_0 - \varrho \leq y \leq y_1 + \varrho\,;\ z_0 - \varrho \leq z \leq z_0 + \varrho)$$

*tale che il rettangolo $S_\varrho(x_0 - \varrho \leq x \leq x_1 + \varrho\,;\ y_0 - \varrho \leq y \leq y_1 + \varrho)$ sia interno a $D$;*

*b) esistono, per lo stesso $\varrho$, tre numeri $\gamma_\varrho > 0$, $0 \leq \beta_\varrho \leq 1$, $N_\varrho$ per cui si abbia nei punti di $A_\varrho$ e per tutti i valori finiti di $p$ e $q$*

$$F(x, y, z, p, q) > \mu_\varrho \{ |p|^{1+\beta_\varrho} + |q|^{1+\beta_\varrho} \} + N_\varrho .$$

*Allora, se le funzioni $z(x, y)$ di una classe $C$, completa nell'interno di $D$, sono tutte egualmente limitate nell'interno di $D$, in $C$ esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D(z)$.*

DIMOSTRAZIONE. - La dimostrazione è identica a quella del teorema VII. Anche in questo caso può darsi che vi siano infinite funzioni facenti parte della successione minimizzante

$$(1) \qquad z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_n(x, y), \dots$$

prive di punti interni al parallelepipedo $A_{\varrho_1}$, con $\varrho_1$ sufficientemente piccolo (e in tal caso la tesi è dimostrata per il teorema del n. 9), oppure che ciò non accada.

Definite poi, allo stesso modo del teorema VIII, le $\bar{z}^{(r)}(x, y)$, si può estrarre dalle (1) una successione

$$(2) \qquad z_{11}, \quad z_{22}, \dots \quad z_{nn}, \dots$$

convergente uniformemente alla $\bar{z}^{(r)}(x, y)$ in tutti i punti del campo $\bar{D}_r$ in cui questa è definita. Se poniamo $z_\infty(x, y) = \bar{z}^{(r)}(x, y)$ in tali punti, la $z_\infty(x, y)$ risulta definita in tutti i punti di $D$ esterni al rettangolo ($x_0 \leq x \leq x_1$; $y_0 \leq y \leq y_1$) e in un certo gruppo di punti di questo rettangolo. Posto $z_\infty(x, y) = z_0$ negli altri punti, la $z_\infty(x, y)$ è allora definita in tutti i punti di $D$ e si dimostra che la successione (2) converge uniformemente alla $z_\infty(x, y)$ in ogni campo $\bar{D}_m$ e che $z_\infty(x, y)$ dà il minimo assoluto per $\mathfrak{J}_D(z)$ in $C$.

OSSERVAZIONE. - Un'estensione del teorema ora dimostrato si ha nel caso in cui *la condizione b) valga nell'intorno di una superficie di equazione* $z_0 = \varphi(x, y)$, *definita e continua, con le sue derivate parziali* $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z_0}{\partial y}$, *in un campo* $\bar{D}_0$, *avente per contorno una linea* $l$ *continua, e tale che esista un punto* $Q_0(x_0, y_0)$, *interno a* $D_0$, *in modo che una qualsiasi semiretta uscente da* $Q_0$ *incontri* $l$ *in un sol punto*, $R_0$.

Il campo $S_\varrho$ si ottiene aggiungendo ai punti di $\bar{D}_0$, su tale semiretta, i punti di un segmento $\overline{R_0 T_0}$, di lunghezza $\varrho > 0$. Si definisce poi la $z_0(x, y)$ in ogni punto di tale segmento dandole il valore $z_0(R_0)$.

Il campo $A_\varrho$ è allora il luogo dei punti compresi tra le superfici di equazione $z_1 = z_0(x, y) + \varrho$, $z_2 = z_0(x, y) - \varrho$, per $(x, y)$ in $S_\varrho$.

## § 4. - L'estremo assoluto in piccolo.

14. - Dimostriamo ora un teorema relativo alle funzioni che rendono minimo l'integrale $\mathfrak{J}_\Delta(z)$, quando il campo $\Delta$, contenuto in $D$, è sufficientemente piccolo, teorema che è l'analogo per le funzioni di due variabili, di un teorema di TONELLI [21], relativo all'*estremo assoluto in piccolo.*

Precisamente si ha il

TEOREMA X. - *Sia* $\mathfrak{J}_D(z)$ *quasi-regolare positivo ed esistano tre numeri* $a > 0$, $\mu > 0$, $M$ *tali che risulti*

$$F(x, y, z, p, q) > \mu\{|p|^{2+a} + |q|^{2+a}\} + M$$

*per* $(x, y)$ *in* $D$ *e per tutti i valori finiti di* $z, p, q$.

---

[21] L. TONELLI, op. cit. in [2], vol. II, n. 91, pp. 312-314.

*Sia poi* $\overline{E}$ *un insieme chiuso interno al campo* $D$ *e* $\overline{\Delta}$ *un campo chiuso, tutto costituito di punti di* $D$*, al quale appartenga un punto* $Q_0(x_0, y_0)$ *di* $\overline{E}$.

*Fissati due numeri* $\varepsilon>0$, $Z>0$, *si può determinare* $\delta>0$ *(indipendente da* $Q_0$*) in modo che supposto* $\overline{\Delta}$ *interno alla circonferenza con centro in* $Q_0$ *e raggio* $\delta$*, e preso* $z_0$*, con* $|z_0|\leq Z$*, se* $C_\Delta$ *è la classe di tutte le funzioni* $z(x, y)$ *assolutamente continue in* $\Delta$*, continue in* $\overline{\Delta}$ *e coincidenti sul contorno* $L$ *di* $\overline{\Delta}$ *con una funzione assegnata* $\varphi(x, y)$*, continua in* $L$ *e tale che sia* $|\varphi(x, y)-z_0|<\delta$*, e inoltre tali che* $\mathfrak{J}_\Delta(z)$ *esista finito, tutte le funzioni* $z(x, y)$ *di* $C_\Delta$ *che rendono minimo* $\mathfrak{J}_\Delta(z)$ *siano interne alla sfera col centro in* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e raggio* $\varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE. - Tracciata la sfera $(P_0, \varepsilon)$ si cominci col supporre $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$ e $\delta<\frac{\tau}{2}$, dove $\tau>0$ è la minima distanza dei punti di $\overline{E}$ dal contorno $F$ di $D$.

In tal caso se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di $L$, il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$ è interno alla sfera $\left(P_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Osserviamo ora che, se $z(x, y)$ è una funzione di $C_\Delta$, si ha

$$\mathfrak{J}_\Delta(z)>M\Delta \tag{1}$$

e quindi l'estremo inferiore $i_\Delta$ per $\mathfrak{J}_\Delta(z)$, in $C_\Delta$, è finito.

Sia ora $z_0(x, y)$ una funzione di $C_\Delta$ per la quale risulti

$$\mathfrak{J}_\Delta(z_0)=i_\Delta \tag{2}$$

e supponiamo che esista un punto $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ della $z_0(x, y)$ esterno alla sfera $(P_0, \varepsilon)$; sarà certamente $\bar{z}>K$, dove $K$ è il massimo di $\varphi(x, y)$ in $L$, oppure $\bar{z}<k$, se $k$ è il minimo, in $L$, di $\varphi(x, y)$.

Supposto che sia $\bar{z}>K$, si tagli la superficie $z_0(x, y)$ col piano $z=K$; essendo $K-z_0<\delta$, i punti della $z_0(x, y)$ appartenenti al piano $z=K$ saranno interni alla sfera $\left(P_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Sia $\overline{S}$ l'insieme chiuso, contenuto in $\overline{\Delta}$, in cui è definita la $z_0(x, y)$ quando se ne considerino solo i punti tali che sia $z_0(x, y)\geq K$; il punto $\overline{Q}(\bar{x}, \bar{y})$, in cui è $z(\bar{x}, \bar{y})=\bar{z}>K$, è certamente un punto di $\overline{S}$ e così pure, per la continuità di $z_0(x, y)$, appartengono a $\overline{S}$ tutti i punti interni a una circonferenza col centro in $\overline{Q}$ e raggio abbastanza piccolo.

Ora si ha

$$\iint_{\overline{S}} F(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy - M\overline{S} > \mu \iint_{\overline{S}} \{|p_0|^{2+\alpha}+|q_0|^{2+\alpha}\}\, dx\, dy. \tag{3}$$

Passando alle coordinate polari $(\varrho, \vartheta)$, assumiamo come polo il punto $\overline{Q}$, come asse polare una qualsiasi semiretta uscente da $\overline{Q}$ e indichiamo con $G$ quell'insieme, sicuramente di misura non nulla, che si ottiene da $\overline{S}$ quando, per ogni valore $\vartheta_0$ di $\vartheta$, si considerino solo i punti del segmento $\overline{\overline{QR}}$ dove $\overline{R}$ è, tra i punti di $\overline{S}$ tali che sia $z_0(x, y)=K$ e appartenenti alla semiretta $\vartheta=\vartheta_0$, quello più vicino a $\overline{Q}$.

Si ricava per la (3)

$$\iint_{\overline{S}} F(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy - M\overline{S} > \mu \iint_G \{ |p_0|^{2+\alpha} + |q_0|^{2+\alpha} \}\, dx\, dy \tag{4}$$

$$> \frac{\mu}{2^{1+\frac{\alpha}{2}}} \iint_G (p_0^2 + q_0^2)^{1+\frac{\alpha}{2}} dx\, dy \tag{5}$$

quando si tenga conto della diseguaglianza di RIESZ.

Si ha poi

$$\iint_G (p_0^2+q_0^2)^{1+\frac{\alpha}{2}} dx\, dy = \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial z_0}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial z_0}{\partial \vartheta}\right)^2 \right\}^{1+\frac{\alpha}{2}} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \tag{6}$$

$$\geqslant \iint_G \left| \frac{\partial z_0}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Seguendo un artificio di TONELLI, poniamo

$$\varrho = r^{\nu}, \qquad \nu > 0$$

da cui

$$d\varrho = \nu r^{\nu-1}\, dr$$
$$\frac{\partial z_0}{\partial \varrho} = \frac{\partial z_0}{\partial r} \frac{1}{\nu r^{\nu-1}}$$

Ne segue

$$\iint_G \left| \frac{\partial z_0}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \frac{1}{\nu^{1+\alpha}} \iint_G \left| \frac{\partial z_0}{\partial r} \right|^{2+\alpha} r^{1-\alpha(\nu-1)}\, dr\, d\vartheta$$

da cui, posto $\nu = \dfrac{1+\alpha}{\alpha}$,

$$\iint_G \left| \frac{\partial z_0}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{1+\alpha} \iint_G \left| \frac{\partial z_0}{\partial r} \right|^{2+\alpha} dr\, d\vartheta. \tag{7}$$

Applicando la diseguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER si ottiene

$$(8)\qquad \left\{\iint_G \left|\frac{\partial z_0}{\partial r}\right| dr\,d\vartheta\right\}^{2+\alpha} \leqslant \left\{\iint_G \left|\frac{\partial z_0}{\partial r}\right|^{2+\alpha} dr\,d\vartheta\right\}\left\{\iint_G dr\,d\vartheta\right\}^{1+\alpha}$$

$$\leqslant (2\pi)^{1+\alpha}\,\delta^\alpha \iint_G \left|\frac{\partial z_0}{\partial r}\right|^{2+\alpha} dr\,d\vartheta.$$

Si ricava allora, osservando che è $\bar{z}-K>\frac{\varepsilon}{4}$,

$$(9)\qquad \iint_G \left|\frac{\partial z_0}{\partial r}\right|^{2+\alpha} dr\,d\vartheta \geqslant \frac{1}{(2\pi)^{1+\alpha}\,\delta^\alpha}\left\{\iint_G \left|\frac{\partial z_0}{\partial r}\right| dr\,d\vartheta\right\}^{2+\alpha}$$

$$\geqslant \frac{2\pi}{4^{2+\alpha}}\,\frac{\varepsilon^{2+\alpha}}{\delta^\alpha}$$

e quindi, per le (5), (6), (7), (8), (9),

$$(10)\qquad \iint_{\bar{S}} F(x, y, z_0, p_0, q_0)\,dx\,dy - M\bar{S} > \frac{\mu}{2^{1+\frac{\alpha}{2}}}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}\frac{2\pi}{4^{2+\alpha}}\,\frac{\varepsilon^{2+\alpha}}{\delta^\alpha} =$$

$$= \frac{\mu\pi}{2^{\frac{5\alpha}{2}}16}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}\frac{\varepsilon^{2+\alpha}}{\delta^\alpha}.$$

Consideriamo ora il campo $\bar{T}$ costituito dai punti non esterni a tutte le circonferenze col centro in un generico punto di $\bar{E}$ e raggio $\frac{\tau}{2}$ e indichiamo con $N\geqslant 0$ il massimo di $F(x, y, z, 0, 0)-M$ per $|z|\leqslant Z+\varepsilon$ e per $(x, y)$ in $\bar{T}$.

Il campo $\bar{\Delta}$, e quindi l'insieme $\bar{S}$, appartiene a $\bar{T}$ e, considerando in $\bar{S}$ la funzione $z_1(x, y)\equiv K$, si ricava

$$(11)\qquad \iint_{\bar{S}} F(x, y, K, 0, 0)\,dx\,dy - MS \leqslant N\pi\delta^2.$$

Ora si può prendere $\delta$ così piccolo che risulti

$$N\pi\delta^2 < \frac{\mu\pi}{2^{\frac{5\alpha}{2}}16}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}\frac{\varepsilon^{2+\alpha}}{\delta^\alpha}$$

cioè

$$(12)\qquad \delta < \varepsilon\left\{\frac{\mu}{2^{\frac{5\alpha}{2}}16N}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}\right\}^{\frac{1}{2+\alpha}}.$$

In tal caso risulta per le (10) e (11)

$$\iint_{\bar{S}} F(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy > \iint_{\bar{S}} F(x, y, K, 0, 0)\, dx\, dy. \tag{13}$$

Se ora definiamo in tutto $\bar{\varDelta}$ la funzione $z_1(x, y)$, dandole nei punti non appartenenti a $\bar{S}$ il valore $z_0(x, y)$, la $z_1(x, y)$ appartiene alla classe $C_{\varDelta}$ e si ha

$$\iint_{\bar{\varDelta}} F(x, y, z_1, p_1, q_1)\, dx\, dy < \iint_{\bar{\varDelta}} F(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy$$

ciò che è contro l'ipotesi che $z_0(x, y)$ renda minimo $\mathfrak{J}_{\varDelta}(z)$.

Siccome poi si ottiene la (12) quando si consideri l'insieme $\bar{S}'$ in cui è $z_0(x, y) \leq k$, se ne deduce che se $\delta$ soddisfa alla condizione (12), oltre che alle condizioni $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ e $\delta < \frac{\tau}{2}$, ogni superficie della classe $C_{\varDelta}$, che renda minimo $\mathfrak{J}_{\varDelta}(z)$, è interna alla sfera $(P_0, \varepsilon)$.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 18 aprile 1941-XIX.