Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Mauro Picone

Nuova analisi esistenziale e quantitativa delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 1 (1941), p. 13-36
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_1_13_0>

NUOVA ANALISI ESISTENZIALE E QUANTITATIVA DELLE SOLUZIONI DEI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (*)

di MAURO PICONE (Roma).

Per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_h}{dx}=f_h(x, y_1,\dots, y_p, \lambda_1,\dots, \lambda_q), \\ y_h(x_0)=a_h, \end{cases} \qquad (h=1,\dots, p)$$

nella variabile reale indipendente x e nelle p funzioni incognite $y_1,\dots, y_p$, con i q parametri $\lambda_1,\dots, \lambda_q$, è ben nota la teoria delle soluzioni *infinitamente vicine* ad una soluzione data $[y_1^{(0)}(x),\dots, y_p^{(0)}(x)]$, definita nell'interno di un intervallo (α_1, α_2) dell'asse x e corrispondente ad una certa q^{pla} $(\lambda_1^{(0)},\dots, \lambda_q^{(0)})$, di valori dei parametri e p^{pla} $(a_1^{(0)},\dots, a_p^{(0)})$, dei valori iniziali. Sotto talune ipotesi, detta teoria consente di asserire che, mantenendo $(\lambda_1,\dots, \lambda_q)$ e $(a_1,\dots, a_p)$ in certi intorni di $(\lambda_1^{(0)},\dots, \lambda_q^{(0)})$ e $(a_1^{(0)},\dots, a_p^{(0)})$, esiste, nell'interno dello *stesso* intervallo (α_1, α_2), una soluzione $[y_1(x),\dots, y_p(x)]$ del sistema, giacente, a sua volta, in un certo intorno della soluzione data $[y_1^{(0)}(x),\dots, y_p^{(0)}(x)]$.

Ora non è chi non veda quale importanza possa avere il possesso di criterii generali atti a consentire le medesime conclusioni, in un *prescritto* intervallo (α_1, α_2), *senza l'ipotesi che la* p^{pla} *di funzioni* $[y_1^{(0)}(x),\dots, y_p^{(0)}(x)]$ *sia una soluzione del sistema* (1) e nel presente scritto di tali criterii si conseguono, per i quali, in luogo di supporre, come si fa nella teoria classica, anche nelle sue trattazioni più recenti, che il valore dell'integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{h=1}^{p} \left| \frac{dy_h^{(0)}}{dx} - f_h[x, y_1^{(0)}(x),\dots, y_p^{(0)}(x), \lambda_1^{(0)},\dots, \lambda_q^{(0)}] \right| dx,$$

sia nullo, basta che tale valore verifichi una certa ben precisata limitazione.

Si perviene altresì qui a valutazioni delle ampiezze dei sopradetti intorni meno ristrette di quelle che possonsi immediatamente dedurre dai procedimenti consueti (e la cui applicazione a casi particolari, integrabili elementarmente, può valere, mi sembra, ad attribuir loro ragguardevole entità), in ipotesi, specificate al n.° 1, le quali, mentre impongono alle f_h una certa lipschitzianità uniforme

---

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

rispetto alle $y_1, \ldots, y_p$, del tipo già introdotto da CARATHEODORY nella teoria da lui data in proposito [1], non richiedono, necessariamente, la continuità delle f_h rispetto ai parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, nè la limitatezza dell'intervallo (a_1, a_2), e neppure la sommabilità, rispetto a x, delle f_h in *tutto* l'intervallo (a_1, a_2), ma soltanto in ogni intervallo finito a quello interno. E si può dunque dare ai teoremi del presente scritto anche significato di *teoremi di stabilità* delle soluzioni, all'infinito o in intorni di punti al finito, supposto un certo comportamento delle f_h [2].

1. - Il teorema generale. — Per brevità di scrittura adotteremo notazioni vettoriali. Se, con una lettera u indicheremo un vettore (reale o complesso), a r componenti, con la stessa lettera, munita degli indici 1, 2,...., r, cioè coi simboli $u_1, u_2, \ldots, u_r$, indicheremo le sue componenti (reali o complesse). Se u e v sono due vettori, entrambi a r componenti, come modulo della loro differenza $u-v$, che indicheremo con $|u-v|$, prenderemo

$$|u-v| = \sum_{h=1}^{r} |u_h - v_h|.$$

Ciò posto, se designamo con x una variabile reale, con y e λ due vettori (reali o complessi), rispettivamente a p e a q componenti, con $f(x, y, \lambda)$ un vettore (reale o complesso) a p componenti, assegnato in funzione di x, y e λ, le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \\ y(x_0) = a \end{array} \right. \tag{1}$$

rappresentano il sistema già scritto di p equazioni differenziali e di p condizioni iniziali, in p funzioni incognite $y_1, \ldots, y_p$, dipendente dai q parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$.

Siano: A un intervallo aperto (finito o infinito), di punti estremi inferiore a_1 e superiore a_2, $\lambda^{(0)}$ un fissato vettore λ, $u(x)$ un fissato noto vettore (reale o complesso) a p componenti, funzione di x assolutamente continua in ogni intervallo chiuso e finito di A [3], cioè, come diremo, *nell'interno di* A [4], N un

---

(1) C. CARATHEODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* [B. G. Teubner (1918 e 1927)], pp. 665-688.

(2) Ai risultati del n.° 1 del presente lavoro giova avvicinare quelli della nota, del Sig. HIROSI OKAMURA, dal titolo: *Sur l'approximation successive et l'unicité de la solution de* $dy/dx = f(x, y)$. [Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University, Series A, Vol. XIV, Kyoto (1931), pp. 85-96].

(3) Del quale, cioè, ogni componente è funzione assolutamente continua in ogni tale intervallo.

(4) Nel seguito, quando diremo che una certa circostanza ha luogo *nell'interno di un intervallo aperto* A, intenderemo dire che essa si presenta per ogni intervallo chiuso finito di A.

insieme di punti di A, di misura nulla, b e c due numeri positivi finiti, e la funzione $f(x, y, \lambda)$ sia definita per

$$x \text{ in } A-N, \qquad |y-u(x)| \leqq b, \qquad |\lambda-\lambda^{(0)}| \leqq c,$$

avendosi, anche per $|z-u(x)| \leqq b$,

$$|f(x, y, \lambda)-f[x, u(x), \lambda^{(0)}]| \leqq P(x, b, \lambda)\ |y-u(x)|+Q(x, b, \lambda), \tag{2}$$

$$|f(x, y, \lambda)-f(x, z, \lambda)| \leqq R(x, b, \lambda)\ |y-z|, \tag{3}$$

ove P, Q, R designano certe quantità scalari positive, note funzioni di x, b e λ, *sommabili* nell'interno di A, rispetto alla x, con

$$Q(x, b, \lambda^{(0)}) \equiv 0,$$

la misurabilità in A, fissati y e λ, della funzione di x

$$f(x, y, \lambda),$$

e la sommabilità, nell'interno di A, di

$$f[x, u(x), \lambda^{(0)}].$$

Ne segue, per $|y-u(x)| \leqq b$, $|\lambda-\lambda^{(0)}| \leqq c$, fissati y e λ, la sommabilità, rispetto alla x, nell'interno di A, della $f(x, y, \lambda)$, poichè la (2) fornisce:

$$|f(x, y, \lambda)| \leqq |f[x, u(x), \lambda^{(0)}]|+P(x, b, \lambda)\ |y-u(x)|+Q(x, b, \lambda).$$

In tali ipotesi, comunque si assumano un vettore $y(x)$, funzione di x finita e misurabile in A, e un vettore λ costante, verificanti le limitazioni $|y(x)-u(x)| \leqq b$, $|\lambda-\lambda^{(0)}| \leqq c$, il vettore

$$f[x, y(x), \lambda],$$

riesce (5) funzione di x sommabile nell'interno di A. Diremo che il vettore $y(x)$ è soluzione, in A, delle (1), se è funzione di x assolutamente continua nell'interno di A, coincide nel punto x_0 di A col vettore a, e si ha, quasi ovunque in A,

$$\frac{dy(x)}{dx}=f[x, y(x), \lambda].$$

Sussiste il seguente teorema generale.

I. - *Comunque si assumano un punto x_0 in A e due vettori a e λ soggetti alla limitazione*

$$|a-u(x_0)|<b, \qquad |\lambda-\lambda^{(0)}| \leqq c,$$

---

(5) Cfr. Caratheodory, loc. cit. (1), § 576 e § 592.

nell'intorno $I(x_0, a, \lambda)$ *di* x_0, *luogo dei punti* x *di* A *per i quali riesce*

$$\omega(x) \equiv \tag{4}$$

$$\left(|a-u(x_0)|+\int_{(x_0,\,x)}\left|\frac{du}{dt}-f[t,\,u(t),\,\lambda^{(0)}]\right|dt+\int_{(x_0,\,x)}Q(t,\,b,\,\lambda)\,dt\right)e^{\int_{(x_0,\,x)}P(t,\,b,\,\lambda)dt}<b \quad (^6),$$

esiste ed è unica una soluzione della (1), *verificante la limitazione*

$$|y(x)-u(x)|<b, \tag{5}$$

e si ha inoltre

$$|y(x)-u(x)|\leqq\omega(x). \tag{6}$$

Alla dimostrazione del teorema, che conseguiremo facilmente col metodo delle approssimazioni successive, premetteremo un'osservazione elementare. Siano J un intervallo, finito o infinito, dell'asse x, di punti estremi inferiore ξ_1 e superiore ξ_2 e $\varphi(x)$ una funzione scalare non negativa e sommabile in J. Fissato un qualsivoglia numero ϱ positivo e supposto che sia

$$\int_J \varphi(x)dx>\varrho,$$

diciamo x_1 quel ben determinato punto di J per cui riesce

$$\int_{\xi_1}^{x_1}\varphi(x)dx=\varrho\,;$$

supposto che sia

$$\int_{x_1}^{\xi_2}\varphi(x)dx>\varrho,$$

diciamo x_2 quel punto di J per cui

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx=\varrho, \quad \text{ecc.}$$

---

(6) Se a e b sono i punti estremi ($a \gtrless b$) di un intervallo dell'asse x, col simbolo

$$\int_{(a,\,b)} f(x)dx,$$

indicheremo l'integrale di una funzione $f(x)$, esteso all'intervallo, *privo di verso*. Si ha quindi

$$\int_{(a,\,b)} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx, \quad \text{se } b>a, \qquad \int_{(a,\,b)} f(x)dx=\int_b^a f(x)dx, \quad \text{se } b<a.$$

Si perviene così, mediante certi punti $x_1(\varrho)$, $x_2(\varrho)$,...., $x_{m-1}(\varrho)$, alla decomposizione dell'intervallo J, in un certo numero $m(\varrho)$ di intervalli parziali J_1, J_2,...., J_m, di punti estremi ξ_1 e x_1, x_1 e x_2,...., x_{m-1} e ξ_2, per i quali riesce

$$\int_{J_1} \varphi dx = \int_{J_2} \varphi dx = \dots = \int_{J_{m-1}} \varphi dx = \varrho, \qquad \int_{J_m} \varphi dx \leqq \varrho, \tag{7}$$

ebbene, si ha che:

$$\lim_{\varrho \to 0} [(1-\varrho)^{m(\varrho)}] = e^{-\int_J \varphi(x) dx}$$

Ed invero

$$\int_{\xi_1}^{x_{m-1}} \varphi dx = (m-1)\varrho, \qquad m = 1 + \frac{1}{\varrho} \int_{\xi_1}^{x_{m-1}} \varphi dx,$$

$$\lim_{\varrho \to 0} [(1-\varrho)^m] = \lim_{\varrho \to 0} \left[(1-\varrho)^{1+\frac{1}{\varrho}\int_{\xi_1}^{x_{m-1}} \varphi dx} \right] = e^{-\int_J \varphi dx} .$$

Ciò posto, osserviamo anche che la prima parte del teorema sarà dimostrata se, detto J un qualsivoglia intervallo, chiuso e finito, contenuto in I e avente un estremo in x_0, dimostriamo l'esistenza in J di una soluzione delle (1) verificante la (5). Supporremo, per fissare le idee, che x_0 sia l'estremo sinistro di J e, per brevità di scrittura, porremo

$$\frac{du}{dx} - f[x, u(x), \lambda^{(0)}] = v(x).$$

Avendosi, per ipotesi,

$$\left(|a - u(x_0)| + \int_J |v| \, dx + \int_J Q dx \right) e^{\int_J P dx} < b,$$

potremo fissare un numero positivo ε, in modo che si abbia ancora

$$\left(|a - u(x_0)| + \int_J |v| \, dx + \int_J Q dx \right) \left(e^{\int_J P dx} + \varepsilon \right) < b,$$

e, dopo ciò, un numero positivo ϱ, *minore di uno*, tale che, verificandosi, nella decomposizione dell'intervallo J negli intervalli J_1, J_2,...., J_m, mediante i punti x_1, x_2,...., x_{m-1} $(x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1})$, le (7) per $\varphi = P$, si abbia pure

$$\frac{1}{(1-\varrho)^m} < e^{\int_J P dx} + \varepsilon,$$

$$\int_{J_k} R dx < 1, \qquad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{8}$$

Mantenendo x nel primo intervallo J_1 della detta decomposizione, poniamo

$$\int_{x_0}^{x} P(t, b, \lambda)dt = P_1(x, b, \lambda),$$

$$\int_{x_0}^{x} P(t, b, \lambda)P_1(t, b, \lambda)dt = P_2(x, b, \lambda),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x_0}^{x} P(t, b, \lambda)P_n(t, b, \lambda)dt = P_{n+1}(x, b, \lambda),$$

si ha

$$0 \leqq P_n(x, b, \lambda) \leqq \varrho^n, \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Posto

$$y^{(1)}(x) = a + \int_{x_0}^{x} f[t, u(t), \lambda]dt,$$

poichè

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} v(t)dt + \int_{x_0}^{x} f[t, u(t), \lambda^{(0)}]dt,$$

si ha, in base alla (2),

$$(9) \qquad |y^{(1)}(x) - u(x)| \leqq |a - u(x_0)| + \int_{J_1} |v| dx + \int_{J_1} Q dx \leqq$$

$$\left(|a - u(x_0)| + \int_{J_1} |v| dx + \int_{J_1} Q dx\right) \frac{1}{1-\varrho} \leqq$$

$$\left(|a - u(x_0)| + \int_{J} |v| dx + \int_{J} Q dx\right) \frac{1}{(1-\varrho)^m} < b.$$

Posto, successivamente,

$$y^{(2)}(x) = a + \int_{x_0}^{x} f[t, y^{(1)}(t), \lambda]dt,$$

si ha, in base alla (2),

$$|y^{(2)}(x) - u(x)| \leqq |a - u(x_0)| + \int_{J_1} |v| dx + \int_{J_1} Q dx + \int_{x_0}^{x} P |y^{(1)} - u| dx,$$

donde, tenendo conto della prima delle (9),

$$(10)\qquad |y^{(2)}(x)-u(x)| \leqq \Big(|a-u(x_0)| + \int_{J_1} |v|\,dx + \int_{J_1} Q\,dx\Big)(1+P_1) \leqq$$

$$\Big(|a-u(x_0)| + \int_{J_1} |v|\,dx + \int_{J_1} Q\,dx\Big)(1+\varrho) \leqq$$

$$\Big(|a-u(x_0)| + \int_{J_1} |v|\,dx + \int_{J_1} Q\,dx\Big)\frac{1}{1-\varrho} \leqq$$

$$\Big(|a-u(x_0)| + \int_{J} |v|\,dx + \int_{J} Q\,dx\Big)\frac{1}{(1-\varrho)^m} < b.$$

Posto

$$y^{(3)}(x) = a + \int_{x_0}^{x} f[t, y^{(3)}(t), \lambda]\,dt,$$

si trova similmente, in virtù della prima delle (10),

$$|y^{(3)}(x)-u(x)| \leqq \Big(|a-u(x_0)| + \int_{J_1} |v|\,dx + \int_{J_1} Q\,dx\Big)(1+P_1+P_2) \leqq$$

$$\Big(|a-u(x_0)| + \int_{J_1} |v|\,dx + \int_{J_1} Q\,dx\Big)\frac{1}{1-\varrho} < b, \quad \text{ecc..}$$

Con le posizioni

$$(11)\qquad y^{(n+1)}(x) = a + \int_{x_0}^{x} f[t, y^{(n)}(t), \lambda]\,dt, \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

si definiscono, per ricorrenza, i vettori

$$(12)\qquad y^{(1)}(x),\quad y^{(2)}(x), \ldots,\quad y^{(n)}(x), \ldots,$$

funzioni della x, assolutamente continue in J_1, verificanti la limitazione

$$(13)\qquad |y^{(n)}(x)-u(x)| \leqq \Big(|a-u(x_0)| + \int_{J_1} |v|\,dx + \int_{J_1} Q\,dx\Big)\frac{1}{1-\varrho} < b.$$

Ne segue, in base alla (3),

$$|y^{(n+1)}(x)-y^{(n)}(x)| \leqq \int_{x_0}^{x} R(t, b, \lambda)\,|y^{(n)}(t)-y^{(n-1)}(t)|\,dt,$$

e quindi, posto

$$\int_{J_1} R(x, b, \lambda)\,dx = \delta,$$

detto M il massimo di $|y^{(1)}(x)-u(x)|$ in J_1, si ha ivi

$$|y^{(n+1)}(x)-y^{(n)}|\leqq M\delta^n,$$

onde, per essere, per le (8), $\delta<1$, la convergenza uniforme della successione (12) verso un vettore $y(x)$ funzione continua di x in J_1. Passando al limite, per $n\to\infty$, nella (13), si trova per $y(x)$ la limitazione in J_1

$$|y(x)-u(x)|\leqq\left(|a-u(x_0)|+\int_{J_1}|v|\,dx+\int_{J_1}Q\,dx\right)\frac{1}{1-\varrho}<b. \tag{14}$$

Dalle (13) e (2) si deduce poi

$$|f[x,y^{(n)}(x),\lambda]|\leqq|f[x,u(x),\lambda^{(0)}]|+bP+Q,$$

e pertanto, dalla (11), col passaggio al limite per $n\to\infty$,

$$y(x)=a+\int_{x_0}^{x}f[t,y(t),\lambda]\,dt,$$

cioè che $y(x)$ è soluzione delle equazioni (1). Dimostrata così l'esistenza, nell'intervallo J_1, di una soluzione delle (1) verificante la limitazione (5), passiamo a considerare il successivo intervallo J_2. Posto

$$y(x_1)=a^{(1)},$$

si trae, dalla prima delle (14),

$$|a^{(1)}-u(x_1)|\leqq\left(|a-u(x_0)|+\int_{J_1}|v|\,dx+\int_{J_1}Q\,dx\right)\frac{1}{1-\varrho}, \tag{15}$$

e se dimostriamo che nell'intervallo J_2 esiste una soluzione delle equazioni

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),\\&y(x_1)=a^{(1)},\end{aligned}\right. \tag{1_1}$$

verificante la (5), avremo dimostrato l'esistenza, nell'intervallo J_1+J_2, di una tale soluzione per le equazioni (1). Effettivamente, col procedimento già seguito, si perviene alla costruzione, nell'intervallo J_2, di una soluzione delle (1_1) verificante la limitazione

$$|y(x)-u(x)|\leqq\left(|a^{(1)}-u(x_1)|+\int_{J_2}|v|\,dx+\int_{J_2}Q\,dx\right)\frac{1}{1-\varrho},$$

e quindi anche, in base alla (15), la seguente

$$|y(x)-u(x)|\leqq\left(|a-u(x_0)|+\int_{J_1+J_2}|v|\,dx+\int_{J_1+J_2}Q\,dx\right)\frac{1}{(1-\varrho)^2}\leqq$$
$$\left(|a-u(x_0)|+\int_{J}|v|\,dx+\int_{J}Q\,dx\right)\frac{1}{(1-\varrho)^m}<b.$$

Posto

$$y(x_2) = a^{(2)},$$

se ne trae

(16) $$|a^{(2)} - u(x_2)| \leqq \left(|a - u(x_0)| + \int_{J_1+J_2} |v|\, dx + \int_{J_1+J_2} Q dx \right) \frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

e col procedimento seguito si perviene alla costruzione, nell'intervallo J_3, di una soluzione delle equazioni

(1_2) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \\ y(x_2) = a^{(2)}, \end{cases}$$

verificante la limitazione

$$|y(x) - u(x)| \leqq \left(|a^{(2)} - u(x_2)| + \int_{J_3} |v|\, dx + \int_{J_3} Q dx \right) \frac{1}{1-\varrho},$$

e quindi anche, in base alla (16), la seguente

$$|y(x) - u(x)| \leqq \left(|a - u(x_0)| + \int_{J_1+J_2+J_3} |v|\, dx + \int_{J_1+J_2+J_3} Q dx \right) \frac{1}{(1-\varrho)^3} < b.$$

E così via. La prima parte del teorema è dunque [7] dimostrata. Nell'estremo destro ξ dell'intervallo J, si ha, per la soluzione trovata $y(x)$,

$$|y(\xi) - u(\xi)| \leqq \left(|a - u(x_0)| + \int_J |v|\, dx + \int_J Q dx \right) \frac{1}{(1-\varrho)^m} \leqq$$

$$\left(|a - u(x_0)| + \int_J |v|\, dx + \int_J Q dx \right) \left(e^{\int_J P dx} + \varepsilon \right),$$

donde, data l'arbitraria piccolezza di ε,

$$|y(\xi) - u(\xi)| \leqq \left(|a - u(x_0)| + \int_J |v|\, dx + \int_J Q dx \right) e^{\int_J P dx} = \omega(\xi),$$

ciò che dimostra la seconda parte del teorema.

---

[7] Quanto all'unicità della soluzione essa è ben nota [cfr. CARATHÉODORY, loc. cit. [1], § 583), ma, in virtù della (8) del testo, discende anche immediatamente, in ciascun intervallo J_k, dalla relazione,

$$|y - z| \leqq \int_{J_k} R(x, b, \lambda)\, |y - z|\, dx,$$

verificata da due soluzioni $y(x)$ e $z(x)$ dell'equazione $dy/dx = f(x, y, \lambda)$ che, in un estremo dell'intervallo assumano lo stesso valore.

Osserviamo che, per $f(x, y, \lambda)=|\lambda|\,f(x, y)$, $|\lambda|=1$, $\lambda^{(0)}=0$. $P\equiv 0$, $Q\equiv M$, costante, e assunto il vettore $u(x)$ costante, la (4) diviene

$$\omega(x)\equiv|a-u|+M|x-x_0|<b,$$

e definisce il consueto intorno della teoria classica.

Se, nelle ammesse ipotesi, in luogo della (2) sussiste la seguente

$$(2') \qquad |f(x, y, \lambda)-f[x, u(x), \lambda^{(0)}]|\leqq L(x, b, \lambda)\,[|y-u(x)|+T(b, \lambda)],$$

ove $T(b, \lambda)$ e $L(x, b, \lambda)$ designano certe quantità scalari positive, la prima indipendente da x e nulla per $\lambda=\lambda^{(0)}$ e la seconda funzione di x sommabile nell'interno di A, insieme al teorema dimostrato vale il seguente, di dimostrazione analoga.

II. - *Comunque si assumano un punto x_0 in A i due vettori a e λ soggetti alle limitazioni*

$$|a-u(x_0)|<b, \qquad |\lambda-\lambda^{(0)}|\leqq c,$$

nell'intorno $I'(x_0, a, \lambda)$ di x_0, luogo dei punti x di A per i quali riesce

$$(4') \qquad \omega'(x)\equiv$$

$$\left(|a-u(x_0)|+\int_{(x_0, x)}\left|\frac{du}{dt}-f[t, u(t), \lambda^{(0)}]\right|dt\right)e^{\int_{(x_0, x)} L(t, b, \lambda)dt}+$$

$$T(b, \lambda)\left(e^{\int_{(x_0, x)} L(t, b, \lambda)dt}-1\right)<b,$$

esiste ed è unica una soluzione delle (1) *verificante la limitazione* (5), *e si ha inoltre*

$$(6') \qquad |y(x)-u(x)|\leqq\omega'(x).$$

Ovviamente, vi è anche un intorno I di esistenza di una tale soluzione $y(x)$ delle (1), luogo dei punti x per i quali riesce verificata la (4) quando vi si ponga

$$P=L, \qquad Q=TL,$$

ma, per essere, per ogni τ positivo, $\tau e^{\tau}>e^{\tau}-1$, tale intorno riesce più ristretto, in generale, dell'intorno I' definito dalla (4').

Un problema di grande importanza è quello di *determinarc campi di variabilità per i vettori a e λ in maniera che, per a e λ in tali campi, la soluzione delle* (1) *esista in tutto il prescritto intervallo A, comunque vi si assuma il punto x_0*. In proposito i teoremi I e II consentono di enunciare i seguenti criterii sufficienti.

III. - *Nelle ipotesi del teorema I e della sommabilità in A delle funzioni P, Q e v, per ogni coppia di vettori α e λ soggetti alle limitazioni*

$$|\lambda-\lambda^{(0)}|\leqq c,$$

$$(17)\qquad \left(|a-u(x_0)|+\int_A\left|\frac{du}{dx}-f[x,u(x),\lambda^{(0)}]\right|dx+\int_A Q(x,b,\lambda)\,dx\right)e^{\int_A P(x,b,\lambda)\,dx}<b,$$

esiste ed è unica una soluzione in A delle (1) *verificante la limitazione*

$$|y(x)-u(x)|\leqq\omega(x)<b,$$

la quale soluzione dunque riuscirà limitata in A, se lo è la $u(x)$.

IV. - *Nelle ipotesi del teorema II e della sommabilità in A delle funzioni L e v, per ogni coppia di vettori α e λ soggetti alle limitazioni*

$$|\lambda-\lambda^{(0)}|\leqq c,$$

$$(18)\qquad \left(|a-u(x_0)|+\int_A\left|\frac{du}{dx}-f[x,u(x),\lambda^{(0)}]\right|dx\right)e^{\int_A L(x,b,\lambda)\,dx}+T(b,\lambda)\left(e^{\int_A L(x,b,\lambda)\,dx}-1\right)<b,$$

esiste ed è unica una soluzione in A delle (1) *verificante la limitazione*

$$|y(x)-u(x)|\leqq\omega'(x)<b.$$

Per $\lambda=\lambda^{(0)}$, indicando, semplicemente, con $f(x, y)$, $P(x, b)$ e $R(x, b)$ le funzioni $f(x, y, \lambda^{(0)})$, $P(x, b, \lambda^{(0)})$ e $R(x, b, \lambda^{(0)})$, si ha dunque, in particolare, il seguente teorema, che vogliamo enunciare, menzionandone tutte le ipotesi che lo reggono.

V. - *Il vettore $u(x)$ sia funzione di x assolutamente continua nell'interno dell'intervallo A e, per*

$$x \text{ in } A-N,\qquad |y-u(x)|\leqq b,\qquad |z-u(x)|\leqq b,$$

si abbia

$$(19)\qquad \begin{cases} |f(x,y)-f[x,u(x)]|\leqq P(x,b)\,|y-u(x)|,\\ |f(x,y)-f(x,z)|\leqq R(x,b)\,|y-z|,\end{cases}$$

con $P(x, b)$ sommabile in A, e $R(x, b)$ nell'interno di A, la misurabilità in A di $f(x, y)$, per ogni fissato y e la sommabilità nell'interno di A di $f[x, u(x)]$. Se la differenza

$$\frac{du}{dx}-f[x,u(x)]$$

riesce sommabile in A e se

$$e^{\int_A P(x,\,b)\,dx} \cdot \int_A \left| \frac{du}{dx} - f[x,\,u(x)] \right| dx = l < b, \tag{20}$$

allora, comunque si assuma il vettore a, soggetto alla limitazione

$$|a - u(x_0)|\, e^{\int_A P(x,\,b)\,dx} < b - l, \tag{21}$$

esiste ed è unica una soluzione in A delle equazioni

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\,y), \qquad y(x_0) = a, \tag{22}$$

e verifica la limitazione

$$|y(x) - u(x)| \leqq \left(|a - u(x_0)| + \int_{(x_0,\,x)} \left| \frac{du}{dt} - f[t,\,u(t)] \right| dt \right) e^{\int_{(x_0,\,x)} P(b,\,t)\,dt} < b.$$

Ovviamente, secondo la (21), sarà tanto più ampio il campo di possibile variabilità del vettore a quanto più piccolo risulta il valore l del prodotto (20) e si avrà la massima ampiezza di tale campo se il vettore $u(x)$ è, esso stesso, una soluzione, in A, dell'equazione differenziale $dy/dx = f(x,\,y)$. Si cade così nelle condizioni di cose d'ordinario considerate.

Se, variando il vettore $u(x)$ in un certo ben definito aggregato $\{u\}$, esiste una funzione $P(x,\,b)$, verificante le ipotesi del teorema, *indipendente da tale vettore*, si potrà, al problema di integrare le (22) in tutto l'intervallo A, premettere, con evidente vantaggio, la ricerca di un'opportuna successione, di vettori di $\{u\}$, minimante l'integrale

$$\int_A \left| \frac{du}{dx} - f[x,\,u(x)] \right| dx,$$

oppure, se, essendo $\theta(x)$ una funzione non negativa in A, con $1/\theta(x)$ ivi sommabile, riesce, per ogni u di $\{u\}$, sommabile in A

$$\theta(x) \left| \frac{du}{dx} - f[x,\,u(x)] \right|^2,$$

minimante l'integrale

$$\int_A \theta(x) \left| \frac{du}{dx} - f[x,\,u(x)] \right|^2 dx.$$

Così, per esempio, se quanto sopra è stato detto avviene per vettori u, indipendenti da x, variabili in un certo campo U, si potrà scegliere, come vettore $u(x)$, quel vettore u del campo U per cui è minimo l'integrale

$$\int_A |f(x, u)| dx = \sum_{k=1}^{p} \int_A |f_k(x, u_1, u_2, \ldots, u_p)| dx,$$

premettendo così la risoluzione di un problema elementare di minimo.

Se, per $|\lambda - \lambda^{(0)}| \leqq c$, la funzione $P(x, b, \lambda)$ o $L(x, b, \lambda)$ è superiormente limitata da una funzione $P^*(x, b, c)$ o $L^*(x, b, c)$, indipendente da λ, pur essa sommabile in A, la limitazione (17) o la (18) riesce soddisfatta se lo è quella che si ottiene, dalla (17) o dalla (18), sostituendo $P(x, b, \lambda)$ con $P^*(x, b, c)$, o $L(x, b, \lambda)$ con $L^*(x, b, c)$. Se, limitandoci a considerare la (17), la $Q(x, b, \lambda)$ è, pur essa, superiormente limitata da una funzione indipendente da λ, sommabile in A, ed è

$$\lim_{\lambda \to \lambda^{(0)}} Q(x, b, \lambda) = 0, \quad \text{per } x \text{ in } A - N,$$

$$e^{\int_A P^*(x, b, c) dx} \cdot \int_A \left| \frac{du}{dx} - f[x, u(x), \lambda^{(0)}] \right| dx = l < b,$$

la (17) sarà verificata se lo è la seguente

$$\left(|a - u(x_0)| + \int_A Q(x, b, \lambda) dx \right) e^{\int_A P^*(x, b, c) dx} < b - l,$$

la quale, per essere

$$\lim_{\lambda \to \lambda^{(0)}} \int_A Q(x, b, \lambda) dx = 0,$$

consente di assicurare l'esistenza in A di soluzioni delle (1), anche per vettori λ non coincidenti con $\lambda^{(0)}$, verificanti una ben precisabile limitazione per $|\lambda - \lambda^{(0)}|$. In particolare, ciò si potrà ottenere se si può porre

$$Q(x, b, \lambda) = |\lambda - \lambda^{(0)}|^{\sigma} S(x, b, c),$$

con σ costante positiva.

Notiamo, infine, che il vettore a potrebbe, esso stesso, essere assegnato in funzione di λ, ed allora le limitazioni (17) e (18) si traducono in quelle in λ, che da esse si ottengono sostituendo ad a la funzione $a(\lambda)$.

2. - Lipschitzianità illimitata rispetto al vettore incognito. — Può avvenire, come effettivamente spesso avviene nelle applicazioni, che le ipotesi ammesse per il teorema III, che solo ci limiteremo a considerare da ora in poi, sussistano per qualsivoglia valore di b; si deducono allora da quel teorema i seguenti corollari.

VI. - *Posto* $\lambda=\lambda^{(0)}$, *se* B *fornisce, supposto esistente, il massimo valore* M, *al variare di* b *da* 0 *a* ∞, *per la funzione*

$$\frac{b}{e^{\int_A P(x,\, b)\, dx}},$$

si ha che, comunque si assuma il vettore a *soggetto alla limitazione*

$$|a-u(x_0)|+\int_A\left|\frac{du}{dx}-f[x,\, u(x)]\right|dx<M,$$

esiste, ed è unico, un vettore $y(x)$, *soluzione in* A *delle* (22), *e verifica la limitazione*

$$|y(x)-u(x)|\leqq\left(|a-u(x_0)|+\int_{(x_0,\, x)}\left|\frac{du}{dt}-f[t,\, u(t)]\right|dt\right)e^{\int_{(x_0,\, x)} P(t,\, B)dt}<B.$$

VII. - *Sia, con* σ *costante positiva,*

$$Q(x,\, b,\, \lambda)=|\lambda-\lambda^{(0)}|^{\sigma}\, S(x,\, b,\, \lambda),$$

e $u(x)$ *una soluzione dell'equazione*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\, y,\, \lambda^{(0)}).$$

Se $B(\lambda)$ *fornisce, supposto esistente, il massimo valore* $M(\lambda)$, *al variare di* b *da* 0 *a* ∞, *per la funzione*

$$\frac{b}{e^{\int_A P(x,\, b,\, \lambda)dx}\cdot\int_A S(x,\, b,\, \lambda)dx},$$

si ha che, comunque si assuma il vettore λ *soggetto alle limitazioni*

$$|\lambda-\lambda^{(0)}|\leqq c, \qquad |\lambda-\lambda^{(0)}|^{\sigma}<M(\lambda),$$

esiste, ed è unico, un vettore $y(x)$, *soluzione in* A *delle equazioni*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\, y,\, \lambda), \qquad y(x_0)=u(x_0),$$

e verifica la limitazione

$$|y(x)-u(x)|\leqq|\lambda-\lambda^{(0)}|^{\sigma}\int_{(x_0,\, x)} S[t,\, B(\lambda),\, \lambda]\, dt\cdot e^{\int_{(x_0,\, x)} P[t,\, B(\lambda),\, \lambda]\, dt}<B(\lambda).$$

Se, per $|\lambda-\lambda^{(0)}|\leqq c$, le funzioni $P(x, b, \lambda)$ e $S(x, b, \lambda)$ sono superiormente limitate dalle $P^*(x, b, c)$ e $S^*(x, b, c)$, indipendenti da λ, alle funzioni $B(\lambda)$ e $M(\lambda)$ si possono sostituire le costanti B e M, posto che B fornisca il massimo M per la funzione

$$\frac{b}{e^{\int_A P^*(x,\, b,\, c)dx} \cdot \int_A S^*(x,\, b,\, c)\,dx}.$$

In applicazione del teorema VI, si consideri, per esempio, il sistema

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_h}{dx} = \varphi_h(x) + \displaystyle\sum_{1\leqq k_1+\ldots+k_p\leqq\nu} \varphi_{hk_1\ldots k_p}(x)\, y_1^{k_1}\ldots.\, y_p^{k_p}, & (h=1,\ldots., p), \\ y_h(x_0) = a_h, \end{cases}$$

con le assegnate funzioni $\varphi_h(x)$ e $\varphi_{hk_1\ldots k_p}(x)$ sommabili nell'intervallo A. Assumeremo $u\equiv 0$, con che

$$\left|\frac{du}{dx} - f[x, u(x)]\right| = \sum_{h=1}^{p} |\varphi_h(x)|.$$

Per $|y|\leqq b$, sussiste la (19), qualunque sia b, quando si ponga

$$P(x, b) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \Phi_\mu(x) b^{\mu-1},$$

con

$$\Phi_\mu(x) = \sum_{h=1}^{p} \sum_{k_1+\ldots+k_p=\mu} |\varphi_{hk_1\ldots. k_p}(x)|\, \frac{k_1^{k_1}\ldots k_p^{k_p}}{\mu^\mu} \quad [8].$$

Posto

$$\int_A \Phi_\mu(x)\,dx = c_\mu, \qquad (\mu=1, 2,\ldots., \nu),$$

si ha

$$\int_A P(x, b)\,dx = c_1 + c_2 b + \ldots. + c_\nu b^{\nu-1}$$

---

[8] Qui si pone $0^0=1$. Posto $\mu=k_1+\ldots.+k_p$, si ha

$$|y_1^{k_1}\ldots. y_p^{k_p}| \leqq \frac{k_1^{k_1}\ldots. k_p^{k_p}}{\mu^\mu} |y|^\mu \leqq \frac{k_1^{k_1}\ldots. k_p^{k_p}}{\mu^\mu} b^{\mu-1} |y|.$$

sarà quindi B il valore di b che rende massimo

$$be^{-c_1-c_2b-\ldots-c_\nu b^{\nu-1}}$$

cioè la radice positiva dell'equazione

$$1-c_2b-2c_3b^2-\ldots-(\nu-1)c_\nu b^{\nu-1},$$

e

$$M=Be^{-c_1-c_2B-\ldots-c_\nu B^{\nu-1}}.$$

Pertanto, se

$$\sum_{h=1}^{p}\int_A|\varphi_h(x)|\,dx<M,$$

comunque si assuma il vettore a soggetto alla limitazione

$$|a|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_p|<M-\sum_{h=1}^{p}\int_A|\varphi_h(x)|\,dx,$$

esiste ed è unico un vettore $y(x)$, soluzione in A delle (23), e verifica la limitazione

$$|y(x)|\leqq\left(|a|+\sum_{h=1}^{p}\int_{(x_0,x)}|\varphi_h(t)|\,dt\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}B^{\mu-1}\int\limits_{(x_0,x)}\Phi_\mu(t)\,dt}<B.$$

In particolare, per il sistema di RICCATI

$$\begin{cases}\dfrac{dy_h}{dx}=\varphi_h(x)+\sum\limits_{k=1}^{p}\varphi_{hk}(x)\,y_k+\sum\limits_{k,\,l}^{1,\,p}\varphi_{hkl}(x)y_k\,y_l, & (\varphi_{hkl}\equiv\varphi_{hlk}),\\ y_h(x_0)=a_h,\end{cases}$$

si può porre

$$P(x,\,b)=\Phi_1(x)+b\,\Phi_2(x),$$

con

$$\Phi_1(x)=\sum_{h,\,k}^{1,\,p}|\varphi_{hk}(x)|,\qquad \Phi_2(x)=\sum_{h,\,k,\,l}^{1,\,p}|\varphi_{hkl}(x)|,$$

e si ha

$$B=\frac{1}{c_2},\qquad M=\frac{1}{c_2e^{c_1+1}}\quad(^9).$$

---

(9) Le limitazioni trovate non sono banalmente ristrette, come può convincere l'esempio delle equazioni (scalari)

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)y^2,\qquad y(0)=a,$$

Si noti che, se $\varphi_{hk} \equiv 0$ $(h, k=1,\ldots, p)$, e, per ogni h e quasi ovunque in A, le forme quadratiche $\sum_{kl} \varphi_{hkl}(x) y_k y_l$ sono definite o semidefinite positive, il prescelto vettore $u \equiv 0$, dà all'integrale

$$\int_A \left| \frac{du}{dx} - f[x, u(x)] \right| dx,$$

il minimo valore nel campo dei vettori costanti.

---

considerate nell'intervallo $(0, a)$ $(a \leqq +\infty)$, ove $\varphi(x)$ è supposta positiva e sommabile. La soluzione di esse,

$$y = \frac{\alpha}{1 - \alpha \int_0^x \varphi(t)\, dt},$$

esiste nell'intervallo $(0, a)$, se

$$\alpha \leqq \frac{1}{\int_0^a \varphi(x)\, dx},$$

laddove la teoria generale fornisce la limitazione

$$|\alpha| < \frac{1}{e \int_0^a \varphi(x)\, dx},$$

e per tale limitazione di α la teoria generale dà per $y(x)$ la limitazione

$$|y(x)| < \frac{1}{\int_0^a \varphi(x)\, dx},$$

mentre è

$$|y(x)| < \frac{1}{(e-1) \int_0^a \varphi(x)\, dx} < \frac{1}{\int_0^a \varphi(x)\, dx}.$$

Così, per le equazioni

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) y^3, \qquad y(0) = \alpha,$$

la teoria generale, imponendo a α la limitazione

$$|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{2 \int_0^a \varphi(x)\, dx}},$$

3. - Lipschitzianità illimitata e uniforme rispetto al vettore incognito. — È di notevole interesse il seguente immediato corollario del teorema I.

VIII. - *Il vettore $u(x)$ sia funzione di x assolutamente continua nell'interno dell'intervallo A, e, per x in $A-N$ e quali si siano i vettori y e z si abbia*

$$|f(x, y)-f[x, u(x)]| \leqq P(x)\, |y-u(x)|,$$
$$|f(x, y)-f(x, z)| \leqq R(x)\, |y-z|,$$

con $P(x)$ e $R(x)$ sommabili nell'interno di A, la misurabilità in A di $f(x,y)$ e la sommabilità nell'interno di A di $f[x, u(x)]$. Comunque si assumano il punto x_0 in A ed il vettore a, esiste ed è unica una soluzione in A delle (22) *e verifica la limitazione*

$$|y(x)-u(x)| \leqq \left(|a-u(x_0)|+\int_{(x_0, x)} \left|\frac{du}{dt}-f[t, u(t)]\right| dt\right) e^{\int_{(x_0, x)} P(t)dt} .$$

Pertanto, se la funzione $P(x)$ è sommabile in A, tale soluzione, comunque si assuma il vettore a, sarà limitata in A, se esiste un vettore $u(x)$, esso pure limitato in A, per il quale la differenza

$$\frac{du}{dx}-f[x, u(x)]$$

---

fornisce per $y(x)$ la seguente

$$|y(x)| < \frac{1}{\sqrt{2\int_0^a \varphi(x)\, dx}},$$

laddove, poichè $y = \dfrac{a}{\sqrt{1-2a^2\int_0^x \varphi(t)\, dt}}$, è necessario e sufficiente che sia

$$|a| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\int_0^a \varphi(x)\, dx}},$$

e con la sopraindicata limitazione di a si ha

$$|y(x)| < \frac{1}{\sqrt{e-1}}\; \frac{1}{\sqrt{2\int_0^a \varphi(x)\, dx}}.$$

riesca sommabile in A. In particolare: 1) *per* $u(x)\equiv 0$, *si avrà*

$$|y(x)|\leqq\Big(|a|+\int_{(x_0,\,x)}|f(t,0)|\,dt\Big)e^{\int_{(x_0,\,x)}P(t)\,dt},$$

e la limitatezza di $y(x)$ *in* A, *se* $P(x)$ *e* $f(x,0)$ *sono sommabili in* A; 2) *se il vettore* $u(x)$ *è, esso stesso, soluzione dell'equazione* $dy/dx=f(x,y)$, *si avrà*

$$|y(x)-u(x)|\leqq|a-u(x_0)|\,e^{\int_{(x_0,\,x)}P(t)\,dt},$$

e la limitatezza di $y(x)$ *in* A, *se* $P(x)$ *è sommabile in* A *e* $u(x)$ *vi è limitata.*

Per il sistema lineare

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_h}{dx}=\varphi_h(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\varphi_{hk}(x)y_k, \\ y_h(x_0)=a_h, \end{cases}\qquad (h=1,\dots,p),$$

sussistono le ipotesi del teorema enunciato quando le funzioni $\varphi_h(x)$ e $\varphi_{hk}(x)$ $(h,k=1,\dots,p)$, sono sommabili nell'interno di A. Si può porre

$$P(x)=\sum_{h,\,k}^{1,\,p}|\varphi_{hk}(x)|,$$

e si ha dunque che, comunque si scelga il vettore $u(x)$ assolutamente continuo nell'interno di A, ogni soluzione delle (24) verifica la limitazione

$$|y(x)-u(x)|\leqq\Big(|a-u(x_0)|+\int_{(x_0,\,x)}\sum_{h=1}^{p}\Big|\frac{du_h}{dt}-\varphi_h(t)-\sum_{k=1}^{p}\varphi_{hk}(t)u_k\Big|\,dt\Big)e^{\int_{(x_0,\,x)}\sum_{h,\,k}^{1,\,p}|\varphi_{hk}(t)|\,dt},$$

onde segue, per esempio, posto $u\equiv 0$, che $y(x)$ è limitato in A se ivi sono sommabili le funzioni $\varphi_h(x)$, $\varphi_{hk}(x)$ $(h,k=1,\dots,p)$.

L'equazione differenziale lineare d'ordine p, nella quantità scalare $\eta(x)$:

$$(25)\qquad \frac{d^p\eta}{dx^p}=\varphi(x)+\varphi_0(x)\,\eta+\varphi_1(x)\,\frac{d\eta}{dx}+\dots+\varphi_{p-1}(x)\,\frac{d^{p-1}\eta}{dx^{p-1}},$$

equivale al sistema

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2,\quad \frac{dy_2}{dx}=y_3,\dots,\quad \frac{dy_{p-1}}{dx}=y_p,$$
$$\frac{dy_p}{dx}=\varphi+\varphi_0\,y_1+\varphi_1\,y_2+\dots+\varphi_{p-1}\,y_p,$$

nel vettore y, di componenti $y_1, y_2,\dots, y_p$, per il quale sistema sono soddisfatte le ipotesi del teorema VIII se le funzioni φ, $\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1}$ sono sommabili nell'interno di A, e si può porre, com'è subito visto,

$$P(x) = 1 + \sum_{k=0}^{p-1} |\varphi_k(x)|.$$

Si ha dunque che, comunque si scelga il vettore $(u_1, \dots, u_p)$ assolutamente continuo nell'interno di A, per ogni soluzione $\eta(x)$ della (25) (funzione di x con derivata $(p-1)^{\mathrm{ma}}$ assolutamente continua nell'interno di A), sussiste la limitazione

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} - u_{1+k} \right| \leqq \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} - u_{1+k} \right|_{x=x_0} + \int_{(x_0, x)} \left(\left| \frac{du_1}{dt} - u_2 \right| + \dots + \left| \frac{du_{p-1}}{dt} - u_p \right| + \left| \frac{du_p}{dt} - \varphi - \varphi_0 u_1 - \dots - \varphi_{p-1} u_p \right| \right) dt \right\} e^{|x-x_0| + \sum_{k=0}^{p-1} \int_{(x_0, x)} |\varphi_k| dt},$$

e quindi, se $\zeta(x)$ designa una quantità scalare, funzione di x con derivata $(p-1)^{\mathrm{ma}}$ assolutamente continua nell'interno di A, posto $u_{1+k} = d^k\zeta/dx^k$, anche la seguente

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} - \frac{d^k\zeta}{dx^k} \right| \leqq \left(\sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} - \frac{d^k\zeta}{dx^k} \right|_{x=x_0} + \int_{(x_0, x)} \left| \frac{d^p\zeta}{dt^p} - \varphi - \varphi_0 \zeta - \dots - \varphi_{p-1} \frac{d^{p-1}\zeta}{dt^{p-1}} \right| dt \right) e^{|x-x_0| + \sum_{k=0}^{p-1} \int_{(x_0, x)} |\varphi_k| dt},$$

e, per $\zeta \equiv 0$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} \right| \leqq \left(\sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} \right|_{x=x_0} + \int_{(x_0, x)} |\varphi| dt \right) e^{|x-x_0| + \sum_{k=0}^{p-1} \int_{(x_0, x)} |\varphi_k| d},$$

per ζ soluzione della (25),

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} - \frac{d^k\zeta}{dx^k} \right| \leqq \sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{d^k\eta}{dx^k} - \frac{d^k\zeta}{dx^k} \right|_{x=x_0} \cdot e^{|x-x_0| + \sum_{k=0}^{p-1} \int_{(x_0, x)} |\varphi_k| dt}.$$

4. - Linearità e omogeneità dei secondi membri rispetto ai parametri. — Si abbia ora

$$f_h(x, y, \lambda) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \varphi_{hk}(x, y), \qquad (h = 1, \dots, p),$$

cioè il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy_h}{dx}=\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\,\varphi_{hk}(x,\,y_1,\dots,\,y_p),\qquad (h=1,\dots,\,p),$$

e, per ogni vettore y verificante la limitazione

$$|y|\leqq b,$$

la sommabilità in A delle funzioni $\varphi_{hk}(x,\,y)$, essendo

$$\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}|\varphi_{hk}(x,\,y)|\leqq S(x,\,b),$$

con $S(x,\,b)$ funzione di x pur essa sommabile in A, e inoltre, per $|y|\leqq b$ e $|z|\leqq b$,

$$\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}|\varphi_{hk}(x,\,y)-\varphi_{hk}(x,\,z)|\leqq \Phi(x,\,b)\;|y-z|,$$

con $\Phi(x,\,b)$ funzione di x sommabile nell'interno di A. Per il sistema di equazioni

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_h}{dx}=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,\varphi_{hk}(x,\,y), \\ y_h(x_0)=a_h, \end{cases}\qquad (h=1,\dots,\,p),$$

sono allora verificate tutte le ipotesi del teorema III, quando si ponga, con c qualsivoglia,

$$u(x)\equiv 0,\qquad \lambda^{(0)}=0,$$

$$P\equiv 0,\qquad Q(x,\,b,\,\lambda)=|\lambda|\;S(x,\,b),\qquad R(x,\,b,\,\lambda)=|\lambda|\;\Phi(x,\,b),$$

e si ha dunque:

IX. - *Comunque si assumano i vettori a e λ soggetti alla limitazione*

$$|a|+|\lambda|\int_A S(x,\,b)dx<b,$$

esiste ed è unica una soluzione in A delle (26), *verificante la limitazione*:

$$|y(x)|\leqq|a|+|\lambda|\int_{(x_0,\,x)}S(t,\,b)dt<b.$$

Se le ipotesi ammesse valgono per qualunque valore di b, può esservi vantaggio (cfr. n.° 2) a considerare il valore B di b, supposto esistente, che dà il massimo valore M, al variare di b da 0 a ∞, alla funzione

$$\frac{b}{\int_A S(x,\,b)dx}.$$

Per esempio, per il sistema

$$(27)\qquad \frac{dy_h}{dx}=\sum_{k=1}^{q}\lambda_k \sum_{l_1+\ldots+l_p\leqq\nu}\varphi_{hkl_1\ldots l_p}(x)\,y_1^{l_1}\ldots y_p^{l_p},\qquad y_h(x_0)=a_h,$$

si può porre

$$S(x,\,b)=\sum_{\mu=0}^{\nu} b^{\mu}\,\Phi_{\mu}(x),$$

con

$$\Phi_{\mu}(x)=\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l_1+\ldots+l_p=\mu}\frac{l_1^{l_1}\ldots l_p^{l_p}}{\mu^{\mu}}\,|\varphi_{hkl_1\ldots l_p}(x)|,$$

e quindi

$$\int_A S(x,\,b)\,dx=c_0+c_1b+c_2b^2+\ldots+c_\nu b^\nu,$$

con

$$c_\mu=\int_A \Phi_\mu(x)\,dx,$$

e pertanto, detto B la radice positiva dell'equazione

$$c_0-c_2\,b^2-2c_3\,b^3-\ldots-(\nu-1)c_\nu\,b^\nu=0,$$

si ha che la limitazione

$$|a|+(c_0+c_1B+\ldots+c_\nu B^\nu)\;|\lambda|<B,$$

ha di conseguenza l'esistenza in A della soluzione $y(x)$ delle (27), nonchè la limitazione

$$|y(x)|\leqq|a|+|\lambda|\sum_{\mu=0}^{\nu}B^{\mu}\int_{(x_0,\,x)}\Phi_\mu(t)\,dt<B.$$

In particolare, per il sistema di RICCATI

$$(28)\qquad \frac{dy_h}{dx}=\sum_{k=1}^{q}\lambda_k(\varphi_{hk}(x)+\sum_{l=1}^{p}\varphi_{hkl}(x)\,y_l+\sum_{l_1,\,l_2}^{1,\,p}\varphi_{hkl_1l_2}y_{l_1}y_{l_2}),\qquad y_h(x_0)=a_h,$$

$$(\varphi_{hkl_1l_2}\equiv\varphi_{hkl_0l_1}),$$

si può porre

$$S(x,\,b)=\Phi_0(x)+b\,\Phi_1(x)+b^2\,\Phi_2(x),$$

con

$$\Phi_0=\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}|\varphi_{hk}|,\quad \Phi_1=\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p}|\varphi_{hkl}|,\quad \Phi_2=\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\sum_{\substack{l_1,\,l_2\\ l_1\leqq l_2}}^{1,p}|\varphi_{hkl_1l_2}|,$$

e si ha

$$B=\sqrt{\frac{c_0}{c_2}},$$

e pertanto la limitazione

$$\sqrt{\frac{c_2}{c_0}}\,|a|+(2\sqrt{c_0\,c_2}+c_1)\,|\lambda|<1,$$

ha di conseguenza l'esistenza in A della soluzione delle (28), nonchè la limitazione per essa

$$|y(x)|\leqq|a|+|\lambda|\left(\int_{(x_0,\,x)}\Phi_0dt+\sqrt{\frac{c_0}{c_2}}\int_{(x_0,\,x)}\Phi_1dt+\frac{c_0}{c_2}\int_{(x_0,\,x)}\Phi_2dt\right)<\sqrt{\frac{c_0}{c_2}}\quad (9).$$

Si osservi infine che il sistema

$$\frac{dy_h}{dx}=\varphi_h(x)\,y_h+\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\,\varphi_{hk}(x,\,y_1,\dots,\,y_p),$$

con la sostituzione

$$y_h=z_h\,e^{\int_{x_0}^{x}\varphi_h(t)\,dt},$$

(9) Designando y una funzione scalare, per le equazioni

$$\frac{dy}{dx}=\lambda\,[\varphi(x)+y^2\psi(x)],\qquad y(0)=0,$$

considerate nell'intervallo $(0,\,a)$, $0\leqq a\leqq+\infty$, con $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ ivi sommabili, si ha dunque che, per

$$|\lambda|<\frac{1}{2\sqrt{\int_0^a|\varphi|\,dx}\sqrt{\int_0^a|\psi|\,dx}},$$

esiste una soluzione di esse nel detto intervallo e verifica la limitazione

$$|y(x)|\leqq|\lambda|\left(\int_0^x|\varphi|\,dt+\frac{\int_0^a|\varphi|\,dx}{\int_0^a|\psi|\,dx}\int_0^x|\psi|\,dt\right)<\frac{\sqrt{\int_0^a|\varphi|\,dx}}{\sqrt{\int_0^a|\psi|\,dx}}.$$

assume la forma

$$\frac{dz_h}{dx} = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \varphi_{hk}\left(x,\ z_1 e^{\int_{x_0}^{x} \varphi_1 dt}, \dots, z_p e^{\int_{x_0}^{x} \varphi_p dt}\right) e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi_h dt},$$

nella quale si applica il teorema IX.

Nel caso particolare

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(1 + y^2), \qquad y(0) = 0,$$

$a < +\infty$, si trova che per

$$|\lambda| < \frac{1}{2a},$$

esiste nell'intervallo $(0, a)$ la soluzione e risulta

$$|y(x)| \leqq 2\,|\lambda|\,x < 1.$$

Ma la soluzione è $\operatorname{tang} \lambda x$ e dunque esiste nell'intervallo $(0, a)$ per

$$|\lambda| < \frac{\pi}{2a}.$$

Per $|\lambda| < \dfrac{1}{2a}$, si ha poi

$$|y(x)| < \operatorname{tang} \frac{1}{2} < 1.$$

La teoria generale non fornisce dunque valutazioni molto grossolane.