ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

L'analisi funzionale nel calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 289-302

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_289_0>

L'ANALISI FUNZIONALE NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Oggetto di questa relazione.

La presente relazione si propone di indicare e di illustrare:

— le ragioni che hanno condotto ad introdurre l'Analisi funzionale nel Calcolo delle Variazioni, foggiando per quest'ultimo un nuovo potente metodo di ricerca: il *metodo diretto*;

— la forma nella quale l'Analisi funzionale è stata così utilizzata;

— i risultati raggiunti mediante l'introduzione indicata;

— i problemi più importanti del Calcolo delle Variazioni che, nel nuovo indirizzo, si stanno studiando presentemente;

— i nuovi orizzonti che, a traverso l'Analisi funzionale, si sono venuti aprendo al Calcolo delle Variazioni.

Saranno così messi in luce i motivi essenziali del sorgere, dell'affermarsi e del continuo progredire della cosidetta « Scuola Italiana di Calcolo delle Variazioni ».

Origine e scopo del Calcolo delle Variazioni.

Questioni di dominio del Calcolo delle Variazioni furono considerate anche nell'antichità, dai Greci. Si tratta dei due problemi relativi alle proprietà di massimo del cerchio e della sfera:

— fra tutte le figure piane aventi un contorno di dato perimetro il cerchio ha l'area massima;

— fra tutte le figure solide racchiuse da una superficie di data area, la sfera ha il massimo volume.

I Greci, però, studiarono questi problemi con metodi puramente geometrici, mantenendosi quindi lontani dai procedimenti propri del Calcolo delle Variazioni; le origini del quale vengono universalmente riconosciute in alcune questioni trattate sul finire del secolo XVII, ed in modo particolare:

(*) Relazione preparata nel Giugno 1939-XVII per il IX Convegno Volta.

— nel problema del solido di rivoluzione di minima resistenza (NEWTON, 1686);
— in quello della *brachistocrona* (GIOVANNI BERNOULLI, 1696);
— in quello delle *geodetiche* (GIOVANNI BERNOULLI, 1697);
— nel problema degli *isoperimetri* (GIACOMO BERNOULLI, 1697).

E al sorgere della nuova teoria contribuirono in maniera essenziale le dispute vivacissime che si accesero su questi problemi tra i fratelli BERNOULLI; dispute nelle quali intervennero anche molti altri matematici di quel tempo, tra cui vanno specialmente rammentati NEWTON, LEIBNIZ e l'HOSPITAL. Va notato che le origini del Calcolo delle Variazioni si confondono con quelle della stessa Analisi infinitesimale, che, per quel Calcolo, è il presupposto necessario.

Le questioni cui abbiamo più sopra accennato hanno tutte un'aspetto fondamentale comune. Esse, infatti, si traducono nella ricerca di quelle particolari funzioni o curve, di una data classe, le quali danno, rispetto a tutti gli enti di tale classe, il valore massimo o minimo ad un certo integrale, la cui funzione integranda dipende dall'ente generico della classe considerata e da uno o più elementi differenziali dell'ente stesso. Qui dunque entrano in gioco tanto il Calcolo integrale quanto quello differenziale, e si ha da risolvere un problema di massimo o di minimo, che però non rientra tra i problemi di questo tipo che vengono ordinariamente considerati nel calcolo differenziale, nei quali si tratta di rendere massima o minima una funzione di una o più variabili numeriche (sempre in numero finito). Nel Calcolo delle Variazioni, ciò che si deve rendere massimo o minimo dipende da una o più altre funzioni o, geometricamente parlando, da una o più curve o superficie. E questa è una differenza essenziale.

Il problema del Calcolo delle Variazioni si allarga poi a quello della ricerca dei valori massimi e minimi che l'integrale di una equazione differenziale può assumere in un dato punto del campo di integrazione dell'equazione medesima; e pure si estende ad altre questioni di tipo analogo a quelle ora indicate. In tutti i casi, però, il Calcolo delle Variazioni deve assolvere principalmente a due compiti:

1) stabilire l'esistenza dei massimi o minimi di cui si tratta;

2) determinare le proprietà analitiche degli enti (funzioni, curve, superficie, ecc.) che danno questi massimi e minimi, e, in particolare, trovare le equazioni differenziali a cui tali enti soddisfano.

Non è necessario insistere molto sull'importanza del Calcolo delle Variazioni. Le questioni di massimo e minimo hanno sempre avuto un grande valore anche nell'interpretazione dei fenomeni naturali, perchè su questi fenomeni domina un principio generale di *economia*. La natura, nelle sue manifestazioni, tende a risparmiare il più possibile ciò che essa deve impiegare; e quindi le soluzioni che essa trova sono sempre soluzioni di problemi di minimo o di massimo. EULER diceva che, essendo la costruzione del mondo la più perfetta possibile, come quella dovuta ad un Creatore infinitamente saggio, in natura nulla avviene che non presenti proprietà di massimo o di minimo. E, per non citare che un solo esempio, è ben noto come ERONE, FERMAT e HUYGHENS abbiano dedotto da un principio di minimo le leggi della riflessione, della rifrazione, e della propagazione generale della luce.

Procedimenti e punti essenziali del Calcolo delle Variazioni nell'indirizzo classico.

Ai primi procedimenti di natura essenzialmente geometrica, escogitati da GIACOMO BERNOULLI e largamente generalizzati da L. EULER, ma non del tutto rispondenti alle esigenze del rigore logico, seguì, nella seconda metà del secolo XVIII, un metodo generale creato da G. L. LAGRANGIA. Questo metodo, che elimina ogni considerazione geometrica e che costituisce una grande costruzione logica del Calcolo delle Variazioni, è fondato sull'uso sistematico del concetto di *variazione*, concetto che consente di estendere (per quanto *soltanto in parte*, come ora si riconosce) ai problemi della nuova teoria, i procedimenti coi quali il calcolo differenziale giunge alla determinazione dei massimi e minimi delle funzioni di variabili numeriche. Ed è precisamente alle *variazioni* introdotte da LAGRANGIA (1755) che il *Calcolo delle Variazioni* deve il suo nome.

Il Calcolo delle Variazioni nella sua forma, che dirò *classica*, vale a dire considerato nel quadro della teoria creata dal LAGRANGIA, si sviluppa secondo il seguente schema fondamentale, che riferirò al più semplice problema, quello cioè di rendere minimo l'integrale esteso ad un intervallo (a, b) di una funzione $f(x, y(x), y'(x))$, dipendente, oltre che dalla variabile di integrazione x, dalla funzione incognita $y(x)$ e dalla sua derivata prima $y'(x)$. Intenderò anche di considerare il problema nelle condizioni più semplici.

I punti essenziali si riducono dunque:

1) a stabilire la condizione di EULER per la soluzione cercata, vale a dire l'equazione differenziale di EULER a cui questa soluzione deve soddisfare, e a determinare l'integrale di tale equazione corrispondente alle prefissate condizioni ai limiti;

2) a verificare che la curva integrale trovata soddisfa alla condizione di LEGENDRE;

3) a verificare che la medesima curva rende soddisfatta la condizione di JACOBI;

4) a provare, infine, che la curva detta verifica la condizione di WEIERSTRASS.

Considerazioni critiche.

La semplice enunciazione dei quattro punti or ora indicati mostra che la teoria classica del Calcolo delle Variazioni fa intervenire immediatamente le equazioni differenziali. Se poi si esamina come questi quattro punti si presentano nello sviluppo della teoria, ci si accorge che la considerazione delle equazioni differenziali costituisce l'elemento essenziale della teoria medesima. Orbene, quanto è noto sulle equazioni differenziali e soprattutto sull'esistenza degli integrali di un'equazione differenziale che soddisfino a determinate condizioni ai limiti non offre, all'infuori di casi estremamente rari, ciò di cui il classico Calcolo delle Variazioni ha assoluto bisogno. Si ha così la ragione di un fatto, che potrebbe apparire assai strano, del fatto cioè che i più noti ed importanti problemi di minimo — citiamo fra tutti quelli di DIRICHLET e di PLATEAU — non hanno potuto trovare la loro risoluzione a traverso le vie del metodo classico del Calcolo delle Variazioni.

Deve aggiungersi che, facendo dipendere strettamente il Calcolo delle Variazioni dalla teoria delle equazioni differenziali, si toglie a tale calcolo la possibilità di assolvere ad uno dei suoi compiti più importanti, quello di dare la prova dell'esistenza, per certe notevoli equazioni differenziali, di integrali soddisfacenti a particolari condizioni ai limiti. Nella meccanica e nella fisica matematica, ad esempio, si è naturalmente condotti a presentare talune questioni relative alle equazioni differenziali come problemi di Calcolo delle Variazioni; e specialmente dopo LAGRANGIA, si è accentuata la tendenza a porre i principi della meccanica sotto forma di teoremi di massimo o di minimo di particolari integrali. È dunque, in un certo senso, contro l'ordine naturale delle cose il ricondurre il Calcolo delle Variazioni alla teoria delle equazioni differenziali, impedendo così a questa di giovarsi dei risultati di quel Calcolo.

Necessità di un metodo nuovo.

Quanto siamo venuti dicendo mostra la necessità di svincolare il Calcolo delle Variazioni, almeno in un primo tempo, ed in modo speciale per quanto riguarda la questione esistenziale, dalla teoria delle equazioni differenziali. E ciò è tanto più giovevole in quanto che in taluni casi la soluzione di un problema di Calcolo delle Variazioni può trovarsi al confine del campo in cui essa va cercata e non soddisfare perciò ad alcuna equazione differenziale.

È necessario anche di avere un nuovo metodo particolarmente adatto allo studio dei massimi e minimi *assoluti*, perchè, mentre da un lato i più celebri ed interessanti problemi di Calcolo delle Variazioni riguardano proprio gli *estremi assoluti*, dall'altro la teoria classica che discende da LAGRANGIA è impostata sullo studio degli *estremi relativi*, e soltanto in casi del tutto speciali consente di passare da questi estremi a quelli assoluti.

Vi sono poi ragioni teoriche e insieme con esse anche problemi di alto interesse pure dal punto di vista delle applicazioni, che richiedono di prendere in considerazione classi di curve e di superficie assai più generali di quelle alle quali si rivolge il metodo classico.

Questo metodo, essendo troppo legato alla considerazione delle equazioni differenziali, è obbligato a limitare notevolmente la generalità delle funzioni (in linguaggio geometrico, curve o superficie) per le quali si cerca il massimo o minimo di cui si tratta. Orbene, gli studi moderni hanno messo in evidenza che queste limitazioni impediscono talvolta di giungere alla soluzione desiderata. Così, per esempio, si hanno degli integrali curvilinei in forma ordinaria, con funzioni integrande razionali intere, per i quali le funzioni minimanti, pur essendo algebriche, non hanno derivata sempre finita e, quello che è ancor peggio, danno all' integrale un valore più piccolo del limite inferiore dello stesso integrale calcolato in corrispondenza di tutte le funzioni lipschitziane che soddisfano alle stesse condizioni ai limiti.

D' altro lato, il metodo classico, per la sua stessa natura, impone di non uscire da certe classi di curve o superficie e non consente di allargare la ricerca a quelle classi generali che io ho chiamate *complete,* la cui considerazione è imposta da taluni problemi, fra i quali mi limito a citare quello di NEWTON, relativo al corpo di rivoluzione di minima resistenza, e quello delle orbite periodiche, che interessa anche la meccanica e l'astronomia.

Dal Calcolo delle Variazioni al Calcolo Funzionale.

Nel 1884, V. VOLTERRA fu condotto da questioni di fisica - matematica ad alcuni problemi di massimo e minimo che, pur non rientrando fra i tipi comunemente studiati nel Calcolo delle Variazioni, appartengono effettivamente a tale calcolo. Questi problemi portano a risolvere non già delle equazioni differenziali, ma delle equazioni che oggi son chiamate *integrali* e *integro - differenziali.* Così si presentavano nuove difficoltà e con esse la necessità di adeguare meglio i procedimenti del Calcolo delle Variazioni ai compiti più larghi che ad esso venivano assegnati. Da questi studi e da altri, che qui non è il caso di indicare, il VOLTERRA fu indotto (1887) a porre i fondamenti del *Calcolo Funzionale,* al quale doveva essere riservato un largo successo per la sua importanza teorica e per le sue innumerevoli applicazioni in tutti i rami delle matematiche pure e applicate.

Come abbiamo già osservato, gli enti (numeri), dei quali nel Calcolo delle Variazioni si cerca il massimo od il minimo, sono funzioni di una o più curve o superficie o ipersuperficie, od anche di una o più altre funzioni, vale a dire, come diciamo ora, sono dei *funzionali*; ed il concetto di *funzionale* rientra in quello di *funzione* considerato nella forma più larga a cui si adatta la nota definizione di DIRICHLET. Si comprende perciò immediatamente come una teoria generale dei funzionali possa riuscire di grande utilità per il Calcolo delle Variazioni, che in quella teoria viene a trovare la sua sede naturale, costituendone un capitolo importante, il capitolo cioè dei massimi e minimi dei funzionali.

Così il Calcolo delle Variazioni ha condotto all'*Analisi funzionale,* della quale si è poi servito per rinnovarsi completamente.

La prima previsione della possibilità di utilizzare le nozioni del Calcolo Funzionale per risolvere i problemi di Calcolo delle Variazioni con un metodo diretto risale al 1889, ed il merito di essa spetta a C. ARZELÀ, il quale, in un secondo tempo, e precisamente nel 1897, attaccò per questa via il *problema di* DIRICHLET. Frattanto, i concetti dell'Analisi Funzionale venivano diffondendosi e suscitando sempre maggiore interesse, e nel 1910, J. HADAMARD, nella prefazione delle sue « Leçons sur le Calcul des Variations », poteva scrivere: « Le Calcul des Variations n'est autre chose qu'un premier chapitre de la doctrine qu'on nomme aujourd'hui le Calcul fonctionnel et dont le développement sera sans doute l'une des tâches qui s'imposeront les premiers à l'Analyse de l'avenir ». Seguendo questa idea, l'HADAMARD consacrò nel suo libro uno speciale capitolo al Calcolo funzionale, per esporne il concetto informatore e alcune nozioni dal punto di vista del VOLTERRA.

Ma era ormai tempo di costruire una teoria organica e generale del Calcolo delle Variazioni perfettamente inquadrata nell'Analisi funzionale.

L'Analisi funzionale introdotta nel Calcolo delle Variazioni.

In quale forma ed in quale misura l'Analisi funzionale ha effettivamente giovato al Calcolo delle Variazioni?

Nei suoi primi e fondamentali lavori sul Calcolo Funzionale, il VOLTERRA, sopra tutto nell'intento di estendere le operazioni e le formule più importanti dell'Analisi ordinaria, ricondusse sostanzialmente lo studio dei funzionali a quello delle ordinarie funzioni di una variabile numerica, colla considerazione delle famiglie di curve o superficie ad un parametro. Ma poco dopo (1889) l'ARZELÀ iniziò lo studio dei funzionali da un altro punto di vista, considerando le linee o superficie o funzioni, su cui essi vengono calcolati, come delle *variabili assolutamente indipendenti*, e quindi senza ricorrere all'uso di parametri ausiliari. A questo modo di concepire i funzionali ha poi portato un notevole contributo M. FRÉCHET, con l'analisi dei cosidetti *spazi astratti*, analisi che costituisce una premessa indispensabile allo sviluppo del Calcolo funzionale, nello stesso modo che la teoria degli insiemi di punti costituisce oggi il fondamento della teoria delle funzioni di variabili numeriche.

Ponendomi dal punto di vista dell'ARZELÀ, io ho, negli ultimi trent'anni, ricostruito il Calcolo delle Variazioni impostandolo sui principi dell'Analisi funzionale, e trattando gli enti, da cui dipendono gli integrali da rendere massimi o minimi, come delle variabili del tutto indipendenti e non legate ad alcun parametro numerico. Questo modo di considerare le cose mi sembra il più consono alla natura delle questioni che si trattano nel Calcolo delle Variazioni; ed a questo proposito, mi piace riportare quanto scrisse M. FRÉCHET nell'introduzione del suo bel libro « Les espaces abstraits » (1928), dopo di avere accennato all'antico metodo del VOLTERRA: « Nous croyons qu'on atteindra mieux le fond des choses et qu'on évitera des difficultés en abandonnant l'intermédiaire du paramètre et en traitant directement la ligne comme une variable absolument indépendant. Hâtons-nous d'ajouter qu'il n'en résultera aucune différence au point de vue formel et que les équations à résoudre seront les mêmes. Mais les théorèmes d'existence et la discussion en seront à notre avis facilités et éclairés. De plus, la théorie elle même se trouvera rattachée à un ordre d'idées plus générale. C'est, d'ailleurs, le point de vue que vient d'adopter récemment M. TONELLI dans son intéressant ouvrage *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* » ..... « En résumé, la méthode la plus feconde en Analyse fonctionnelle nous paraît être celle qui consiste à traiter l'élément dont dépend la fonctionnelle, directement comme une variable et sous la forme même où il se présente naturellement. Cela permettra d'utiliser immédiatement un grand nombre de propositions actuellement établies en Analyse générale. Et cela évitera d'introduire des éléments parasites (paramètres, coefficients) susceptibles d'amener des complications inutiles et étrangères au fond du problème ».

Voglio anche aggiungere che il punto di vista qui sostenuto è stato in seguito ampiamente accolto dallo stesso VOLTERRA, come risulta per esempio dal grande trattato: *Théorie générale des fonctionnelles* da lui recentemente pubblicato con la collaborazione di J. Pérès.

Stabilita l'origine delle idee da seguire, si trattava di fissare i concetti fondamentali sui quali impostare l'applicazione dell'Analisi funzionale al Calcolo delle Variazioni. Per le ordinarie funzioni di variabili numeriche, la teoria si costruisce partendo da una proprietà di carattere generalissimo: la *continuità.* Ma questo concetto, che pure interviene utilmente in capitoli notevoli del Calcolo funzionale, non può essere messo alla base di una teoria del Calcolo delle Variazioni. Una minuta analisi della questione, mi condusse, oltre venticinque anni fà, a mettere in evidenza che gli integrali del Calcolo delle Variazioni sono nella loro quasi totalità dei funzionali *non continui,* e poi mi portò anche a determinare esattamente la forma di quelli che risultano *continui.* Nello stesso tempo, potei assicurarmi che per i funzionali del Calcolo delle Variazioni ha importanza essenziale una proprietà meno restrittiva della continuità: la *semi-continuità*; quella semi-continuità che R. BAIRE aveva introdotto per le funzioni di variabili numeriche, ma per le quali ha valore soltanto negli studi critici. Determinata esattamente la condizione necessaria e sufficiente per questa semi-continuità, vale a dire caratterizzati con precisione gli integrali del Calcolo delle Variazioni che sono dei funzionali semi-continui *superiormente* o *inferiormente,* fui condotto a porre la *semi-continuità* alla base della teoria a cui volevo giungere. E qui è opportuno osservare che la teoria costruita sul concetto di *semi-continuità* si piega agevolmente anche alla ricerca dei massimi e minimi di integrali che non sono dei funzionali semi-continui; e ciò a traverso due particolari procedimenti. Il primo di essi consiste nel sostituire, all'integrale che si deve studiare, un altro integrale che risulti un funzionale semi-continuo superiormente od inferiormente e che abbia, corrispondentemente, gli stessi massimi o gli stessi minimi. Il secondo procedimento consiste invece nel sostituire alla classe generale delle curve o superficie da cui dipende l'integrale in esame, una classe particolare sulla quale l'integrale stesso risulti semi-continuo superiormente od inferiormente ed abbia, corrispondentemente, gli stessi massimi o gli stessi minimi. Questo secondo procedimento, nel quale ha valore essenziale la considerazione di quelle classi generali di curve, superficie, funzioni, che io ho chiamate *complete*, si presta ad importanti e svariate applicazioni e dà il mezzo di trasformare in problemi di massimo o minimo questioni che non sono tali quando ci si riferisca alle solite classi di enti considerate nel vecchio Calcolo delle Variazioni.

Nella costruzione della nuova teoria del Calcolo delle Variazioni, inquadrata fra i capitoli dell'Analisi funzionale, io ho pensato di utilizzare, di questa Analisi, il meno possibile le formule, facendo invece giocare largamente i concetti. Soltanto per questa via, secondo me, si possono ottenere dei risultati importanti conservando ad essi la maggiore semplicità possibile, semplicità che è indispensabile se si vuole che tali risultati riescano effettivamente utili.

I risultati raggiunti dal nuovo metodo.

In una comunicazione fatta al Congresso Internazionale dei Matematici tenutosi nel 1924 a Toronto nel Canadà, io esposi i principali risultati ottenuti col nuovo metodo e contenuti nel mio trattato « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ». Più tardi, in una conferenza del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, che ebbe luogo a Firenze nel 1937, indicati con una certa larghezza i risultati conseguiti, dal 1924 in poi, da quella che è chiamata la « Scuola Italiana di Calcolo delle Variazioni ». Qui ora non voglio ripetermi. Mi è però necessario riassumere, sia pur rapidamente, quanto il nuovo metodo ha dato sino ad oggi, affinchè si possa valutarne l'intrinseco valore.

In primo luogo, voglio dire dell'apporto del nuovo metodo alla stessa teoria classica del Calcolo delle Variazioni.

Ho già rammentato che il concetto di *variazione* è dovuto al LAGRANGIA, il quale fondò il suo metodo precisamente sull'uso sistematico delle *variazioni*. Orbene, il LAGRANGIA non considerò queste *variazioni* sempre nello stesso modo, ma in due forme distinte: una più particolare ed una del tutto generale. Nella prima forma (vedere, per esempio, la terza edizione delle sue *Leçons sur le Calcul des fonctions*, 1806) la *variazione* non è in sostanza che un differenziale relativo ad un parametro ausiliare, e nasce dal considerare la curva, superficie o funzione, che deve dare il massimo o minimo cercato, come un ente appartenente ad una famiglia ad un parametro, e dal ridurre poi la questione studiata a quella di un problema di estremo, relativo ad una funzione di questo parametro, problema al quale si applicano naturalmente i procedimenti dell'ordinario calcolo differenziale. Sotto questo aspetto, la *variazione* fu utilizzata largamente da EULER, e, successivamente, nella maggior parte dei trattati di Calcolo delle Variazioni.

Nella seconda forma (più generale), nella quale il LAGRANGIA considerò la *variazione* (vedi, per esempio, la seconda edizione della sua « *Théorie des fonctions analytiques* », 1813), tale variazione è intesa come un *incremento arbitrario* δy dato alla funzione $y(x)$ che deve fornire il massimo o il minimo in questione; ed è *soltanto* sotto questo aspetto generale che la variazione può essere utilizzata per la ricerca delle condizioni *sufficienti* per l'estremo. Ma in questa forma più larga la variazione non è stata da tutti completamente compresa ed ha presentato delle difficoltà nelle mani stesse del LAGRANGIA. Quale è l'intima ragione di tutto ciò? Ecco: la *variazione*, nel suo aspetto generale, non può essere intesa pienamente che alla luce dell'Analisi funzionale; essa non può essere sfruttata nel suo senso più profondo se non impostando la questione dal punto di vista del Calcolo funzionale. Mi sia pertanto permesso di affermare che *il Lagrangia, col suo concetto generale di variazione, è venuto egli stesso a porsi senz'altro sul piano dell'Analisi funzionale.*

Ho già richiamate le tappe fondamentali attraverso le quali il metodo classico procede nello studio dei suoi problemi. Queste tappe si identificano con le quattro condizioni: di EULER, di LEGENDRE, di JACOBI e di WEIERSTRASS. Delle condizioni di EULER e di JACOBI, il metodo classico mette in luce l'intimo significato, mostrando che la prima traduce il fatto che su un ente estremante deve essere nulla la variazione prima dell'integrale considerato, e la seconda, l'altro che sullo stesso ente la variazione seconda dell'integrale deve essere positiva o nulla nel caso di un minimo, negativa o nulla nel caso di un massimo. Ciò corrisponde a quanto stabilisce l'ordinario calcolo differenziale per l'estremo (interno al campo di variabilità della x) di una funzione $f(x)$, di una variabile numerica x, vale a dire che (supposta la differenziabilità del primo e del secondo ordine della $f(x)$) per un tale estremo deve essere nullo il differenziale primo della $f(x)$, mentre il differenziale secondo deve essere positivo o nullo nel caso di un minimo, negativo o nullo nel caso di un massimo.

Ma il metodo classico non chiarisce in nessun modo il valore delle condizioni di LEGENDRE e di WEIERSTRASS, e più precisamente non sa indicare a quali, condizioni della teoria dell'estremo di una funzione $f(x)$ esse corrispondano. Ebbene, ciò che esprimono effettivamente le condizioni di LEGENDRE e di WEIERSTRASS è stato messo in piena evidenza dalla teoria della semicontinuità, che è la base del nuovo metodo. È risultato, infatti, che le indicate condizioni equivalgono puramente e semplicemente alla *semi-continuità* sull'ente estremante del funzionale rappresentato dall'integrale che si vuole rendere massimo o minimo intendendosi *semi-continuità superiore* nel caso del massimo, *semi-continuità inferiore* in quello del minimo. Così si rientra completamente nello schema delle ordinarie condizioni date per gli estremi di una funzione $f(x)$, in quanto per queste funzioni la *semi-continuità* è contenuta nella *continuità*, implicitamente ammessa con la *differenziabilità* della $f(x)$. E nel caso del Calcolo delle Variazioni l'enunciazione a sè della semicontinuità è conseguenza del fatto che l'esistenza della *variazione* del funzionale considerato *non implica* la sua continuità e neppure la sua semi-continuità.

È poi a traverso l'indicata *interpretazione funzionale* delle condizioni di LEGENDRE e di WEIERSTRASS che si perviene a comprendere compiutamente lo spirito delle condizioni sufficienti per l' *estremo relativo* date dal metodo classico, spirito che resta generalmente mascherato dai procedimenti indiretti coi quali quelle condizioni vengono stabilite.

Infine, e pur tacendo di altri contributi, voglio rammentare che lo studio della semi-continuità ha permesso di raggiungere, nell'ordine di idee della teoria classica, nuovi risultati nei problemi isoperimetrici per integrali in forma ordinaria.

Abbandonando ora quanto riguarda la teoria classica del Calcolo delle Variazioni, accenniamo sommariamente ai risultati che appartengono più strettamente alla nuova costruzione. In questa assumono grande importanza le questioni di esistenza, e ciò sia dal punto di vista logico — il che s' intende immediatamente — sia dal punto di vista di uno degli scopi che essa vuol raggiungere — di rendere cioè la teoria indipendente da quella delle equazioni differenziali e di portare a quest' ultima il suo aiuto — sia, infine, da un punto di vista pratico, al quale accenneremo più oltre.

Notevoli e molteplici teoremi di esistenza dell' *estremo libero* furono ottenuti, sotto condizioni larghissime, per gli integrali curvilinei semplici del Calcolo delle Variazioni, quelli cioè che dipendono soltanto dalle coordinate del punto corrente sulla curva che funge da variabile indipendente e dagli elementi differenziali del primo ordine di tale curva. In queste proposizioni, assumono importanza fondamentale i concetti di integrale *regolare*, *quasi regolare* e *quasi regolare normale*; e, nel caso delle curve considerate in forma parametrica, anche quelli di integrale *definito* e *semi-definito.* Si sono considerate le condizioni più svariate, comprendenti anche integrali non semicontinui, in modo da esaurire tutti i casi praticamente utili; cosicchè soltanto lievi perfezionamenti potranno ancora portarsi in questo campo. Ed i teoremi, dati in un primo tempo per integrali dipendenti dalle curve di un piano, furono poi estesi al caso delle curve di uno spazio ad un numero qualsiasi (finito) di dimensioni. Un' ulteriore importante estensione fu in seguito ottenuta considerando integrali curvilinei dipendenti, oltre che dalle coordinate del punto corrente sulla curva base, anche dagli elementi differenziali di questa curva dei primi n ordini, con n intero positivo qualsiasi.

Nel caso degli integrali relativi a curve considerate nella forma ordinaria ($y=y(x)$), si è presentato un fatto singolare (che io chiamo fenomeno di LAVRENTIEFF, in omaggio a chi lo ha scoperto) secondo il quale il minimo di un integrale relativamente alla classe di tutte le curve assolutamente continue che congiungono due punti dati *non* è sempre uguale al limite inferiore dello stesso integrale calcolato su tutte le corrispondenti curve lipschitziane, ma può effettivamente risultare *più piccolo* di tale limite inferiore. Questo fatto, al quale ho accennato anche precedentemente, può presentarsi pure per integrali di forma molto semplice; e mentre viene ad accrescere le difficoltà della questione trattata e quindi a renderla anche maggiormente interessante, mostra che essa *non può* risolversi nell'ambito del metodo classico.

Stabiliti i teoremi di esistenza dell'estremo, si presenta una seconda questione essenziale: quella delle proprietà analitiche dell'ente estremante, vale a dire delle condizioni di differenziabilità cui questo ente soddisfa e soprattutto delle equazioni che esso verifica; le quali, nel caso dei problemi ordinariamente considerati nel Calcolo delle Variazioni, sono delle equazioni differenziali, mentre, per altri problemi, possono essere delle equazioni integrali oppure integro-differenziali e, più generalmente, delle *equazioni funzionali.* Questo secondo studio è di grande importanza. Per certe questioni, come per esempio per i problemi di DIRICHLET e di PLATEAU (nel caso degli integrali superficiali), lo stabilire l'esistenza dell'estremo ha valore solo in quanto è poi possibile di giungere a provare che l'estremante soddisfa ad una particolare equazione; ma in tali questioni a nulla gioverebbe il sapere che l'estremo esiste se non si potesse poi provare che esso fornisce la soluzione di quell'equazione che è proprio ciò che interessa.

Nello studio delle proprietà analitiche degli enti estremanti hanno assunto grande valore le cosidette *estremaloidi* e le *pseudoestremaloidi.* Con la loro considerazione si è potuto giungere a notevolissime conclusioni, stabilendo in particolare degli importanti teoremi di esistenza per gli integrali di determinate equazioni differenziali, soddisfacenti a prefissate condizioni ai limiti. Un'applicazione, di alto interesse, in quest'ordine di idee, si è avuta nella risoluzione, in una forma estremamente generale, di un problema fondamentale relativo alle orbite periodiche.

Una terza questione di molto valore è quella dei teoremi di *unicità*: *unicità degli enti estremanti*, e *unicità delle soluzioni delle equazioni* alle quali conducono i problemi di Calcolo delle Variazioni. Anche in questo campo si sono ottenuti risultati soddisfacenti.

Dallo studio dei problemi dell'estremo libero, si è passato a quello dei problemi isoperimetrici, sempre relativamente a integrali curvilinei, trattati sia nella forma parametrica che in quella ordinaria. Qui vogliamo notare che i problemi dell'estremo libero considerati, come effettivamente si fa nella nuova teoria, per le più generali classi *complete* di curve, comprendono già alcune categorie importanti di problemi isoperimetrici.

I teoremi ottenuti espressamente per questi ultimi hanno una estensione minore di quella raggiunta per i problemi dell'estremo libero; ma ciò è nell'ordine naturale delle cose, perchè i problemi isoperimetrici, per potere avere soluzione, richiedono condizioni molto particolari. Va anche notato che, nel caso attuale, la determinazione delle proprietà analitiche degli enti estremanti presenta difficoltà assai superiori a quelle che s'incontrano nei problemi dell'estremo libero; e qui risulta in modo anche più evidente la necessità di abbandonare i procedimenti del metodo classico e l'importanza del metodo diretto.

Aggiungerò che, mediante una opportuna estensione di un procedimento detto di arrotondamento, si è potuto ricondurre un certo gruppo di problemi isoperimetrici per integrali doppi a questioni isoperimetriche relative ad integrali semplici, facilmente risolvibili. Uno dei problemi trattati per questa via appartiene alla teoria del suono e porta il nome di *problema di Lord Rayleigh.*

Sempre nel campo delle funzioni di linee, sono stati poi studiati i problemi di LAGRANGIA e di MAYER, di un tipo particolarmente importante, e per essi si è potuto costruire una teoria generale del tutto parallela a quella già svolta per gli integrali semplici. Al tipo al quale qui ci riferiamo appartengono dei classici problemi, come quello della curva di massima velocità finale e quello della brachistocrona in un mezzo resistente; e pure allo stesso tipo appartiene il noto problema di navigazione di ZERMELO.

Più arretrata è l'applicazione della nuova teoria agli integrali doppi. Tuttavia anche in questo campo si sono potute precisare e discutere completamente le condizioni per la semicontinuità degli integrali doppi in forma ordinaria e si sono ottenuti dei teoremi di esistenza dell'estremo molto larghi; e pure risultati cospicui si sono avuti in merito all'esistenza dell'estremo degli integrali doppi in forma parametrica. Circa le proprietà analitiche delle superficie estremanti i risultati ai quali si è sino ad ora pervenuti non hanno ancora raggiunto tutta quella generalità che è desiderabile; per altro quanto si è stabilito permette di risolvere completamente problemi classici di grande importanza, come quelli ben noti di DIRICHLET e di PLATEAU.

Riassunto così molto sommariamente quanto la nuova teoria ha già dato al Calcolo delle Variazioni, è mio dovere di ricordare i nomi di coloro che maggiormente contribuirono, insieme con me, a formare un complesso tanto ricco di risultati. Questi nomi, i quali rivelano una significativa collaborazione internazionale, che è una prova dell'interesse vivo delle questioni trattate e della bontà del metodo seguito, vanno dall'eminente matematico francese É. GOURSAT — purtroppo già scomparso — che mi fece l'onore di occuparsi del mio metodo sin dai miei primi lavori, agli italiani CINQUINI, MANIÀ, DEL CHIARO, ai tedeschi HAHN e DAMKÖHLER, agli ungheresi HAAR e RADÒ, agli americani GRAVES, Mc SHANE, DOUGLAS, MORREY, ai russi LAVRENTIEFF e BOGOLIOUBOFF, al giapponese NAGUMO.

Ho già detto che i teoremi di esistenza dell'estremo hanno un valore non soltanto teorico, ma anche pratico. Ora voglio chiarire che questo valore pratico si manifesta nel fornire svariati procedimenti di approssimazione per il calcolo effettivo degli enti estremanti, e quindi anche per il calcolo delle soluzioni di certe equazioni differenziali, integrali, integro-differenziali, ecc. ecc. a cui conducono i problemi di massimo e minimo. Ed i procedimenti di approssimazione che per questa via si ottengono, riescono anche più utili quando ai teoremi di esistenza si possono associare dei corrispondenti teoremi di unicità.

Problemi attuali e nuovi orizzonti del Calcolo delle Variazioni.

Tralasciando le molte questioni di dettaglio che richiedono ancora un accurato esame, indicherò ora i principali problemi che formano presentemente oggetto di studio nel nuovo indirizzo.

Nel campo dei funzionali di linea, è necessario di estendere la teoria dei problemi di LAGRANGIA e di MAYER, dal caso già studiato (che potrebbe dirsi dell'*estremo libero*) a quello della loro formulazione più larga (comprendente in particolare i problemi isoperimetrici), ed anche al problema di BOLZA, che li generalizza entrambi. In questo ordine di idee, si posseggono già alcuni risultati, ma occorre dare ad essi un'estensione assai più ampia.

Ancora relativamente ai funzionali di linea, un altro studio che s'impone, e che è appena iniziato, è quello degli integrali doppi di una funzione $F(x_1, x_2, y(x_1), y(x_2), y'(x_1), y'(x_2))$ che dipende dalle due variabili di integrazione x_1 e x_2 e da una funzione variabile $y(t)$ e dalla sua derivata prima $y'(t)$, le quali, funzione e derivata, intervengono sia in dipendenza della x_1, sia in dipendenza della x_2. Questi integrali, che si generalizzano passando da due ad n variabili di integrazione $x_1, x_2, \dots x_n$, e da una funzione indipendente $y(t)$ ad n funzioni $y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t)$, trovano già interessanti applicazioni nella teoria delle equazioni integrali e in quella delle serie di FOURIER.

Per quanto riguarda gli integrali doppi in forma ordinaria, considerati come funzionali di una funzione di due variabili, sono di grande importanza le ricerche, che si stanno proseguendo attivamente, sulle proprietà analitiche delle funzioni estremanti, ed in particolare sulle corrispondenti equazioni a derivate parziali; e pure va studiata la dipendenza delle estremanti dai valori al contorno. Per gli integrali doppi dello stesso tipo, ma in forma parametrica, oltre alle soluzioni delle questioni ora indicate devono anche essere ricercati dei teoremi di esistenza dell'estremo aventi un carattere più generale di quelli presentemente conosciuti. Qui però va osservato che un decisivo progresso in tale questione si avrà soltanto quando si sarà giunti ad una teoria del tutto generale e pienamente soddisfacente dell'area di una superficie continua gobba qualsiasi, non necessariamente data nella forma $z=f(x, y)$.

Volgendo ora lo sguardo ai nuovi problemi che l'Analisi funzionale impone al Calcolo delle Variazioni e che il nuovo metodo basato sulla semicontinuità è in grado di affrontare con sicure speranze di esito felice, indicherò due ordini distinti di ricerche.

Il primo di essi, al quale conducono necessariamente molte questioni che, sotto varia forma, si sono presentate anche in tempi non recenti, si riferisce allo studio dei massimi e minimi di funzionali di carattere molto generale, che comprendono come casi particolarissimi quelli presi in considerazione dalla teoria classica del Calcolo delle Variazioni. Queste ricerche assumeranno presto grande importanza perchè i loro risultati avranno una immediata applicazione pratica; ed a quel poco che su tale argomento si è fatto sino ad ora, io spero di poter prossimamente aggiungere un contributo decisivo in varie direzioni, cominciando da quella che s'inquadra in ciò che io chiamo *Analisi funzionale ereditaria*, di cui tratterò in altra occasione.

Il secondo ordine di ricerche, al quale ho alluso più sopra, si riferisce alla estensione del Calcolo delle Variazioni ai cosidetti *spazi astratti*, vale a dire al trasporto della teoria dei massimi e minimi nel campo più largo dell'*Analisi generale*. Di questo argomento ha già cominciato ad occuparsi con successo K. MENGER (seguito anche da alcuni suoi allievi, tra cui N. ARONSZAJN e C. PAUC), riferendosi a spazi per cui possa porsi il concetto di *distanza* fra due loro elementi qualsiasi, e trattando della semicontinuità e dell'esistenza dell'estremo.

Poichè per gli spazi astratti generali non si ha ancora una soddisfacente definizione di integrale, nel senso classico di MENGOLI - CAUCHY e tanto meno nel senso più largo di LEBESGUE, il MENGER è ricorso all'*integrale di Weierstrass*, che era stato ritrovato recentemente anche da G. BOULIGAND. Dell'integrale di WEIERSTRASS negli *spazi euclidei*, che fu studiato dall'OSGOOD e poi anche da me e di cui circa trent'anni fa precisai le condizioni di esistenza, io mi servii, nella mia prima Memoria sul Calcolo delle Variazioni (1911) per stabilire la *semicontinuità* negli integrali curvilinei in forma parametrica ed ottenerne quindi l'esistenza dell'estremo. Nel caso degli spazi euclidei, l'uso dell'integrale di WEIERSTRASS presenta vari e seri inconvenienti, senza offrire in compenso alcun vero vantaggio, ed io dovetti abbandonarlo completamente; ma per gli spazi astratti generali esso è, per ora, il solo strumento che permetta di costruire una teoria soddisfacente per il Calcolo delle Variazioni.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile*. Finito di stampare il 28 novembre 1940-XIX.