ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. RIDDER

Harmonische, subharmonische und analytische Funktionen

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 277-287

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_277_0>

HARMONISCHE, SUBHARMONISCHE UND ANALYTISCHE FUNKTIONEN

von J. RIDDER (Groningen).

I. - Über den Cauchyschen Integralsatz.

§ 1. - SATZ. — *Es sei C eine geschlossene, rektifizierbare Kurve der xy-Ebene. Wenn die Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ in dem von C begrenzten, abgeschlossenen Bereich $\overline{B}$ reell und stetig sind, und das Linienintegral $\int_R pdx+qdy$ über den Rand R eines jeden abgeschlossenen, im offenen Bereich B liegenden Intervalls (achsenparallelen Rechtecks) kleiner als oder gleich Null ist, so ist auch*

$$\int_C pdx+qdy \leqq 0.$$

BEWEIS [1]. - Zu willkürlich positivem ε gibt es eine positive Zahl δ, so daß für beliebige, zu $\overline{B}$ gehörende Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), welche der Ungleichung $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<2\delta$ genügen,

$$(1) \qquad |p(x_1, y_1)-p(x_2, y_2)|<\varepsilon \quad \text{und} \quad |q(x_1, y_1)-q(x_2, y_2)|<\varepsilon$$

ist.

Es lassen sich zwei Zahlen α und β derart wählen, daß auf keiner der Geraden $x=\alpha+m\cdot\delta$ und auf keiner der Geraden $y=\beta+m\cdot\delta$ $(m=0, \pm 1, \pm 2,....)$ unendlich viele Punkte von C liegen [2]. Die Geraden $x=\alpha+m\cdot\delta$ und $y=\beta+m\cdot\delta$ teilen das Innere von C in endlich viele Bereiche. Bezeichnen wir diejenigen dieser Bereiche, welche samt ihrem Rande in B liegende Intervalle sind, mit R_1, R_2,...., R_m, so ist

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{m} \int_{R_j} pdx+qdy \leqq 0,$$

---

(1) Der Beweis ist einem von Th. ESTERMANN, Math. Ztschr. **37** (1933), S. 558-560, herrührenden, direkten Beweise des hier folgenden, zweiten Korollars nachgebildet.

(2) Siehe ESTERMANN, loc. cit. (1), S. 558 (Hilfssatz 2).

wobei alle Kurven in positivem Sinne durchlaufen werden. Die übrigen Teilbereiche haben Ränder C_1, $C_2, \ldots, C_n$, deren jeder Punkte mit C gemeinsam hat.

Bezeichnen wir die Längen von C und C_k mit l und l_k, so ist $\sum_{k=1}^{n} l_k - l$ höchstens gleich der Summe der Umfänge derjenigen Intervalle (Quadrate) des durch die Geraden $x = \alpha + m \cdot \delta$ und $y = \beta + m \cdot \delta$ gebildeten Netzes, deren Seiten Punkte von C enthalten. Die Anzahl dieser Quadrate ist ([3]) höchstens $4\left(\frac{l}{\delta} + 1\right)$. Also ist

$$\sum_{k=1}^{n} l_k \leqq l + 16\delta\left(\frac{l}{\delta} + 1\right) = 17l + 16\delta. \tag{3}$$

Da der Durchmesser eines jeden C_k höchstens $\delta\sqrt{2}$ ist, folgt aus (1) bei willkürlich auf C_k gewähltem Punkte $(x_0^{(k)}, y_0^{(k)})$:

$$\int_{C_k} p\,dx + q\,dy \leqq \int_{C_k} p(x_0^{(k)}, y_0^{(k)})\,dx + q(x_0^{(k)}, y_0^{(k)})\,dy + 2\varepsilon \cdot l_k = 2\varepsilon \cdot l_k. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt weiter

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} p\,dx + q\,dy \leqq 2\varepsilon \sum_{k=1}^{n} l_k \leqq 2\varepsilon(17l + 16\delta),$$

und dies liefert, da ε und δ gleichzeitig nach Null gehen können, mit (2) die Behauptung des Satzes.

ERSTES KOROLLAR. - *Wenn $u(x, y)$ harmonisch ist in dem von einer geschlossenen, rektifizierbaren Kurve C begrenzten Bereiche B und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung im abgeschlossenen Bereiche $\bar{B}$ stetig* ([4]) *sind, so ist*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \quad \text{oder} \quad \int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0.$$

Denn bei harmonischen Funktionen ist dieses Integral Null über den Rand eines jeden samt seinem Rande in B liegenden Intervalls. Das Korollar folgt dadurch aus dem Satze.

([3]) Vergleiche E. LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, II (1927), S. 186, Formel (674).

([4]) Damit meinen wir, daß die im Innern des Bereiches existierenden und stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ in den Randpunkten (endliche) Grenzwerte haben; $\frac{\partial u}{\partial n}$ ist die Komponente des zugehörigen Vektors in der Richtung der inneren Normale in allen denjenigen Punkten von C, in welchen es eine Normale gibt; in den übrigen Punkten von C setze man $\frac{\partial u}{\partial n}$ gleich Null.

ZWEITES KOROLLAR [5]. - *Wenn $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ analytisch ist in dem von einer rektifizierbaren Kurve C begrenzten Bereiche B und stetig im abgeschlossenen Bereiche $\overline{B}$, so ist*

$$\int_C f(z)dz=0.$$

Das Integral läßt sich schreiben

$$\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy\,;$$

das Korollar folgt somit durch Anwendung des Satzes auf reellen und imaginären Teil.

DRITTES KOROLLAR. - *Wenn $u(x, y)$ in dem von einer geschlossenen, rektifizierbaren Kurve C begrenzten Bereiche B subharmonisch ist und wenn daneben die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung im abgeschlossenen Bereiche $\overline{B}$ stetig sind* [6], *so ist*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds\leqq 0.$$

BEWEIS. - Für jeden in B liegenden, abgeschlossenen Bereich $\overline{G}$ hat der Abstand ihrer Punkte zu C ein positives Minimum $\delta(\overline{G})$. Für jedes positive $r<\delta(\overline{G})$ ist die (in G stetige) Funktion $A_r(x, y\,;\ u)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<r^2} u(x+\xi, y+\eta)d\xi d\eta$ subharmonisch in G [7]. Aus der Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$ folgt, daß in $\overline{G}$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial A_r(x, y\,;\ u)}{\partial x}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<r^2}\frac{\partial u(x+\xi, y+\eta)}{\partial x}\,d\xi d\eta=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$

ist und daß die Konvergenz von $\frac{\partial A_r(x, y\,;\ u)}{\partial x}$ gegen $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ in $\overline{G}$ sogar gleichmäßig ist. Da ebenso $\frac{\partial A_r(x, y\,;\ u)}{\partial y}$ in $\overline{G}$ gleichmäßig gegen $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ konvergiert, ist für jedes Intervall J, das samt seinem Rande R zu G gehört,

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial n}\,ds=\lim_{r\to 0}\int_R \frac{\partial A_r(x, y\,;\ u)}{\partial n}\,ds. \tag{5}$$

---

(5) Der erste vollständige Beweis rührt von S. POLLARD her. Siehe Proc. London Math Soc. (2), **21** (1923), S. 456-482.

(6) Cfr. (4).

(7) Siehe T. RADÓ: *Subharmonic functions*, Ergebn. d. Math., 1937, S. 10, 11.

$A_r(x, y; u)$ hat in G sogar stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung ([8]). Daraus und aus ihrer Subharmonizität in G folgt ([9]), daß in den Punkten von G

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial y^2} \geqq 0,$$

somit das in (5) betrachtete Integral

$$\int\limits_R \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \lim_{r \to 0} \int\limits_R \frac{\partial A_r}{\partial n}\, ds = \lim_{r \to 0} - \int\limits_J \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial y^2} \right) dx dy$$

kleiner als oder gleich Null ist.

Da $\frac{\partial u}{\partial n}$ nicht von r abhängt, gilt für jedes samt seinem Rande R in B liegende Intervall

$$\int\limits_R \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \leqq 0,$$

womit auch das dritte Korollar aus obigem Satze folgt.

II. - Determinierende Eigenschaften für harmonische, subharmonische und analytische Funktionen.

ERSTE GRUPPE.

§ 2. - DEFINITION 1. — Wenn die (endlichwertige) Intervallfunktion $\Phi(J)$ definiert ist für jedes Intervall J, das samt seinem Rande zu einem Bereiche B gehört, so heiße $\Phi(J)$ *stetig in* B, falls $\Phi(J_n)$ mit zunehmendem n gegen Null konvergiert für jede Folge von Intervallen $\{J_n\}$, deren Maße gleichzeitig gegen Null gehen.

DEFINITION 2. — *Die obere und untere Derivierte von* $\Phi(J)$ *in einem Punkte* (x, y) *von* B, $D^+_{(x,y)}\Phi(J)$ bzw. $D^-_{(x,y)}\Phi(J)$, seien definiert als $\limsup_{m(J) \to 0} \frac{\Phi(J)}{m(J)}$ bzw. $\liminf_{m(J) \to 0} \frac{\Phi(J)}{m(J)}$, wobei J ein achsenparalleles *Quadrat* darstellt, das (x, y) im Innern oder auf dem Rande enthält. Sind sie einander gleich, so definiere ihr gemeinsamer Wert *die Ableitung*, $D_{(x,y)}\Phi(J)$, *von* $\Phi(J)$ *in* (x, y).

Jeder Grenzwert von $\frac{\Phi(J)}{m(J)}$, der mittels einer Folge von achsenparallelen Quadraten $\{J_n\}$, welche (x, y) im Innern oder auf dem Rande enthalten und die sich in (x, y) zusammenziehen, erhalten wird und von oberer und unterer Derivierten verschieden ist, heiße *eine mittlere Derivierte von* $\Phi(J)$ *in* (x, y).

([8]) Vergleiche etwa RADÓ, loc. cit. ([7]), S. 11 (Nr. 2.20).

([9]) Siehe RADÓ, loc. cit. ([7]), S. 13.

HILFSSATZ 1. - Es seien $p(x,y)$ und $q(x,y)$ in einem (beschränkten) Bereiche B der xy-Ebene nach x bzw. y linear summierbar. Dann ist für jedes Intervall J, das samt seinem Rande R zu B gehört, die Intervallfunktion

$$\Phi(J)=\int_{\dot{R}} p\,dx+q\,dy$$

kleiner als oder gleich Null, falls in B 1. $\Phi(J)$ stetig ist, 2. $D^+\Phi$ nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge $+\infty$ sein kann, 3. fast überall $D^-\Phi \leqq 0$ ist.

Dies folgt unmittelbar aus dem ersten Satze von § 8 unserer Arbeit im Nieuw Archief, Amsterdam (2), 16, 1 (1929), S. 59 ([10]).

Anwendung des Hilfssatzes 1 auf Φ und $-\Phi$ liefert den

HILFSSATZ 2. - Für die in Hilfssatz 1 betrachteten Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ ist im Bereiche B die zugehörige Intervallfunktion $\Phi(J)\equiv 0$, falls in B 1. $\Phi(J)$ stetig ist, 2. $D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge unendlich werden können, 3. in fast allen Punkten eine mittlere oder extreme Derivierte von Φ gleich Null ist ([10]).

SATZ 1. - *$u(x, y)$ ist eine im (beschränkten) Bereiche B harmonische Funktion, wenn sie in B stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ hat und daneben die Intervallfunktion $\Phi(J)=\int_{\dot{R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$ (wobei R der Rand des Intervalles J ist) in B den Bedingungen genügt: 1. $D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ können nur in abzählbar vielen Punkten unendlich sein, 2. fast überall gibt es eine mittlere oder extreme Derivierte $=0$.*

BEWEIS. - Aus Hilfssatz 2 und dem Satze von § 1 folgt für jeden Kreis C, welcher samt seinem Innern zu B gehört, daß

$$\int_{\dot{C}} \frac{\partial u}{\partial y}\,dx-\frac{\partial u}{\partial x}\,dy \quad \text{oder} \quad \int_{\dot{C}} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0$$

ist. Dadurch wird, nach einem Satze von KOEBE und BÔCHER ([11]), $u(x, y)$ in B harmonisch sein.

Der Satz 1 ist zu betrachten als Analogon eines LOOMAN-WOLFFschen Satzes über Analytizität von komplexen Funktionen ([12]).

([10]) Vgl. auch RIDDER, Math. Ann., **102** (1929), S. 135 u. 137.

([11]) Der Satz lautet: Wenn $u(x, y)$ im Bereiche B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ hat und für jeden samt seinem Innern zu B gehörenden Kreis C $\int_{\dot{C}} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0$ ist, ist $u(x, y)$ harmonisch in B. Siehe z. B. O. D. KELLOGG: *Foundations of potential theory*, 1929, S. 227.

([12]) Siehe z. B. loc. cit. ([10]), S. 145 (Fußn. 22).

SATZ 2. - *$u(x, y)$ ist harmonisch im Bereiche B, wenn ihre Ableitungen* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ *existieren und stetig sind, und wenn daneben die Intervallfunktion*

$$\Phi(J) = \int_R \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) ds,$$

wobei $v(x, y)$ in B harmonisch und $\neq 0$ ist, den Bedingungen genügt: 1. *$D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ können nur in abzählbar vielen Punkten unendlich sein,* 2. *in fast allen Punkten gibt es eine mittlere oder extreme Derivierte von $\Phi(J)$ gleich Null* (13).

Der Beweis verläuft wie der des Satzes 1 unter Anwendung einer von GERGEN herrührenden Erweiterung (14) des KOEBE-BÔCHERschen Satzes.

Mit $v \equiv 1$ folgt Satz 1 aus dem zweiten Satze.

§ 3. - SATZ 3. — *$u(x, y)$ ist subharmonisch im (beschränkten) Bereiche B, wenn sie daselbst stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und daneben die Intervallfunktion $\Phi(J) = \int_R \frac{\partial u}{\partial n} ds$ in B den Bedingungen genügt:*

1. *$D^+\Phi$ kann nur in abzählbar vielen Punkten den Wert $+\infty$ haben,*
2. *fast überall ist $D^-\Phi \leqq 0$* (15).

BEWEIS. - Aus Hilfssatz 1 und dem Satze von § 1 folgt, daß für jeden Kreis C, der samt seinem Innern zu B gehört,

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds \leqq 0$$

ist. Nach SAKS (16) ist dadurch $u(x)$ subharmonisch in B.

(13) Die Bedingungen sind auch notwendig; dies folgt unmittelbar aus W. F. OSGOOD: *Lehrbuch der Funktionentheorie*, I, Fünfte Auflage, 1928, S. 658 (Hilfssatz).

(14) Diese lautet: $u(x, y)$ ist harmonisch in B, wenn ihre partiellen Ableitungen in B stetig sind, und wenn daneben für jeden Kreis C, welcher samt seinem Innern zu B gehört, das Integral $\int_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) ds$, wobei $v(x, y)$ in B harmonisch und $\neq 0$ ist, den Wert Null hat. Siehe J. J. GERGEN, Bull. Am. Math. Soc. **37** (1931), S. 591-596; auch S. SAKS, id. **38** (1932), S. 380, 381. - *Falls bekannt ist, daß $u(x, y)$ und $v(x, y)$ beide harmonisch sind in B und die Randpunkte von B eine geschlossene, rektifizierbare Kurve L bilden, in deren Punkten u, v und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung (endliche) Grenzwerte haben, läßt sich*, mit Hilfe des Satzes von § 1 und von loc. cit. (13), S. 658 (Hilfssatz), *beweisen, daß* $\int_L \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) ds = 0$ *ist.*

(15) Bei Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung sind die Bedingungen 1 und 2 auch notwendig, wie sich aus dem dritten Korollar von § 1 ergibt.

(16) Siehe SAKS, loc. cit. (14), S. 382 (in den vom Autor loc. cit. Nr. 4 angegebenen Theoremen lese man auch «lim inf» statt «lim»).

In gleicher Weise erhält man den (allgemeineren)

SATZ 4. - *$v(x, y)$ sei in B harmonisch und >0; die Funktion $u(x, y)$ besitze dort stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Dann ist $u(x, y)$ subharmonisch in B, falls die Intervallfunktion $\Psi(J)=\int\limits_R\left(v\,\frac{\partial u}{\partial n}-u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$ in B den Bedingungen genügt*: 1. *$D^+\Psi$ kann nur in abzählbar vielen Punkten den Wert $+\infty$ haben*, 2. *fast überall ist $D^-\Psi\leqq 0$* (17).

ZWEITE GRUPPE.

§ 4. - HILFSSATZ 3. — Es seien $p(x, y)$ und $q(x, y)$ in einem (beschränkten) Bereiche B der xy-Ebene nach x bzw. y linear summierbar. Dann ist für jedes Intervall J, das samt seinem Rande R zu B gehört, die Intervallfunktion

$$\Phi(J)=\int\limits_R p\,dx+q\,dy$$

kleiner als oder gleich Null, falls in B 1. $\Phi(J)$ stetig und in jedem Punkte (x, y) $\lim\limits_{J\to(x,y)}\frac{\Phi(J)}{\delta(J)}=0$ ist, wobei $\delta(J)$ der Diameter eines Intervalles J ist, welches (x, y) im Innern oder auf dem Rande enthält und das sich in (x, y) zusammenzieht, 2. $D^+\Phi$ nur $+\infty$ sein kann in den Punkten einer Menge $E=\sum\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, wobei jede Menge E_j endliches **lineares** Maß hat, 3. fast überall $D^+\Phi\leqq 0$ ist.

Dieser Hilfssatz ist ein Spezialfall eines Theorems von SAKS und ZYGMUND (18).

Ebenso wie der Hilfssatz 1 zu den Sätzen 1-4 führte, lassen sich die hier folgenden Sätze 5-8 in analoger Weise mit Hilfssatz 3 ableiten.

---

(17) Das Verfahren, das zum Beweise des Korollars 3 von § 1 führte, kann auch dienen zum Beweise des Satzes: *In einem von einer geschlossenen, rektifizierbaren Kurve L begrenzten Bereiche B sei $v(x, y)$ harmonisch und positiv*; *$v(x, y)$ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung seien im abgeschlossenen Bereiche $\overline{B}$ stetig* (vgl. Fußn. 4). *Wenn dann $u(x, y)$ in B subharmonisch, und in $\overline{B}$ ebenso wie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig ist, wird*

$$\int\limits_L\left(v\,\frac{\partial u}{\partial n}-u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds\leqq 0$$

sein. Insbesondere folgt hieraus, daß die in Satz 4 enthaltenen Bedingungen auch notwendig sind für die Subharmonizität von Funktionen $u(x, y)$, welche stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ haben.

(18) Siehe S. SAKS: *Theory of the integral*, Sec. Ed., 1937, S. 193; S. SAKS und A. ZYGMUND, Ann. Scuola norm. super. Pisa (2), **3** (1934), S. 30, 31 (Th. 5.1).

SATZ 5. - *$u(x, y)$ ist eine im (beschränkten) Bereiche B harmonische Funktion, wenn sie in B stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ hat und daneben die Intervallfunktion $\Phi(J)=\int_R \frac{\partial u}{\partial n} ds$ (wobei R der Rand von J ist) in B den Bedingungen genügt*: 1. *$D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ können nur in den Punkten einer Menge $E=\sum_{j=1}^{\infty} E_j$, wobei jede Menge E_j endliches* lineares *Maß hat, unendlich werden*, 2. *fast überall existiert $D\Phi$ und hat den Wert Null.*

KOROLLAR. - *$u(x, y)$ ist harmonisch in B, falls in B* 1. *$p(x, y)=\frac{\partial u}{\partial x}$ und $q(x, y)=\frac{\partial u}{\partial y}$ existieren und stetig sind*, 2. $\limsup\limits_{h\to 0;\, k\to 0} \frac{|p(x+h, y+k)-p(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ *und* $\limsup\limits_{h\to 0;\, k\to 0} \frac{|q(x+h, y+k)-q(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ *nur unendlich sein können in den Punkten einer Menge $E=\sum_{j=1}^{\infty} E_j$, wobei jede Menge E_j endliches* lineares *Maß hat*, 3. *in fast allen Punkten, in welchen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ beide existieren*, ([19])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ist.

BEWEIS. - Aus den Bedingungen 1 und 2 folgt ([20]), daß $p(x,y)$ und $q(x,y)$ in B fast überall total differenzierbar sind. Damit läßt sich aus der Bedingung 3 ableiten ([21]), daß $\Phi(J)=\int_R \frac{\partial u}{\partial n} ds$ in fast allen Punkten von B eine Ableitung $D\Phi$ gleich Null hat. Aus den Bedingungen 1 und 2 folgt schließlich ([22]), daß $D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ in den Punkten von $B-E$ endlich sind. Die Bedingungen des Satzes 5 sind damit erfüllt.

Der SATZ 6, dessen Formulierung wir hier unterdrücken, geht in analoger Weise aus Satz 2 hervor wie der vorige Satz aus Satz 1.

SATZ 7. - *$u(x, y)$ ist subharmonisch im (beschränkten) Bereiche B, wenn sie daselbst stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und daneben $\Phi(J)=\int_R \frac{\partial u}{\partial n} ds$ in B den Bedingungen genügt*: 1. *$D^+\Phi$ kann nur in den*

([19]) Aus der Bedingung 2 folgt die Existenz von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in einem maßgleichen Kerne von B.

([20]) Nach loc. cit. ([10]), S. 150 (Hilfssatz 1).

([21]) Nach loc. cit. ([10]), S. 151 (Hilfssatz 2).

([22]) Mit loc. cit. ([10]), S. 152 (Hilfssatz 3).

Punkten einer Menge $E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$, *wobei jede Menge* E_j *enliches* **lineares** *Maß hat, den Wert* $+\infty$ *haben*, 2. *fast überall ist* $D^+\Phi \leqq 0$.

KOROLLAR. - $u(x, y)$ *ist subharmonisch in* B, *falls in* B 1. $p(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ *und* $q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ *existieren und stetig sind*, 2. $\limsup_{h \to 0;\, k \to 0} \frac{|p(x+h, y+k) - p(x, y)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ *und* $\limsup_{h \to 0;\, k \to 0} \frac{|q(x+h, y+k) - q(x, y)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ *nur unendlich sein können in den Punkten einer Menge* $E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$, *wobei jede Menge* E_j *endliches* **lineares** *Maß hat*, 3. *in fast allen Punkten, in welchen* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *und* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *existieren*, (23)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geqq 0$$

ist.

Der Beweis verläuft wie beim vorigen Korollar. Nur folgt hier aus Bedingung 3 (24), daß in fast allen Punkten von B $\Phi(J) = \int_R \frac{\partial u}{\partial n} ds$ eine Ableitung $D\Phi$ kleiner als oder gleich Null hat.

Der (allgemeinere) SATZ 8 folgt wieder in analoger Weise aus Satz 4 wie der vorige Satz aus Satz 3.

§ 5. - Mit Hilfssatz 3 läßt sich auch beweisen der

SATZ 9 (25). - *Die komplexwertige Funktion* $f(z)$, *wobei* $z = x + iy$, *sei definiert und stetig im (beschränkten) Bereiche* B *der* z*-Ebene. Sie ist analytisch in* B, *falls die zugehörige Intervallfunktion* $\Phi(J) = \int_R f(z) dz$ *in* B *den Bedingungen genügt*: 1. $D^+|\Phi|$ *kann nur in den Punkten einer Menge* $E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$, *wobei jede Menge* E_j *endliches* **lineares** *Maß hat, unendlich werden*, 2. *fast überall gibt es eine Ableitung* $D\Phi$ *gleich Null.*

Zu Satz 9 gehört als Korollar eine Verallgemeinerung eines Satzes von BESICOVITCH (26):

KOROLLAR. - *Die in* B *stetige, komplexwertige Funktion* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *wird daselbst analytisch in* z *sein, falls in* B: 1. $\limsup_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|$

---

(23) Cfr. (19).

(24) Cfr. (21).

(25) Siehe S. SAKS: *Théorie de l'intégrale*, 1e Éd., 1933, S. 241.

(26) Siehe SAKS, loc. cit. (18), S. 197; A. S. BESICOVITCH, Proc. London Math. Soc. (2), **32** (1931), S. 3 (Th. 2).

nur in den Punkten einer Menge $E=\sum_{j=1}^{\infty} E_j$, *wobei jede Menge* E_j *endliches* **lineares** *Maß hat, unendlich werden kann,* 2. *in fast allen Punkten, in welchen* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ *alle existieren* (27),

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad und \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ist.

BEWEIS. - Aus der Bedingung 1 folgt (28), daß $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in B fast überall total differenzierbar sind, und damit aus der Bedingung 2 (29), daß $\Phi(J)=\int_R f(z)dz$ fast überall in B eine Ableitung $D\Phi$ gleich Null hat. Aus der Bedingung 1 folgt weiter (30), daß in den Punkten von $B-E$ $D^+|\Phi| \neq +\infty$ ist. Somit läßt sich Satz 9 anwenden (31).

---

(27) Aus der Bedingung 1 folgt, daß dies in einer maßgleichen Teilmenge von B der Fall ist.

(28) Cfr. (20).

(29) Cfr. (21).

(30) Cfr. (22).

(31) Die benutzten Hilfssätze aus Math. Ann., **102**, wobei jedoch der erste durch einen weiter führenden Satz von HASLAM JONES (siehe SAKS, loc. cit. (18), S. 311 (Th. iii)) ersetzt werden soll, und ein Satz von MORERA-RADEMACHER (siehe loc. cit. (10), S. 144) lassen aus einer bei SAKS u. ZYGMUND, loc. cit. (18), S. 32 (Nr. 7) angegebenen Abänderung unseres Hilfssatzes 3 ableiten das Theorem: *Die komplexe Funktion* $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ *fällt in fast allen Punkten ihres Definitionsbereiches* B *mit einer in* B *analytischen Funktion zusammen, falls*: 1. $f(z)$ *in jedem in* B *liegenden, abgeschlossenen Bereiche beschränkt ist,* 2. $\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$ *nur in den Punkten einer Menge* E, *deren* **lineares** *Maß Null ist, unendlich werden kann,* 3. *fast überall in* B *die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Ist* $f(z)$ *außerdem in jedem Punkte von* B *linear stetig nach* x *oder nach* y, *so ist* $f(z)$ *analytisch in* B. Dieser Satz verallgemeinert Satz D aus Math. Ann. **102**, S. 154 und einen zweiten Satz von BESICOVITCH (siehe BESICOVITCH, loc. cit. (26), S. 2 (Th. 1); SAKS u. ZYGMUND, loc. cit. (18), S. 32 (Nr. 7)). Ebenso folgt aus dem abgeänderten Hilfssatze 3 von § 4 die folgende Verallgemeinerung des Satzes C aus Math. Ann. **102**, S. 153: $\Phi(J)=\int_R pdx+qdy$ *ist im Bereiche* $B\equiv 0$ *unter den Bedingungen*: 1. $p(x, y)$ *und* $q(x, y)$ *sind beschränkt in jedem in* B *liegenden, abgeschlossenen Bereiche,* 2. $\limsup_{h\to 0;\, k\to 0}\frac{|p(x+h, y+k)-p(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ *und* $\limsup_{h\to 0;\, k\to 0}\frac{|q(x+h, y+k)-q(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ *können nur in den Punkten einer Menge* E *von* **linearem** *Maße Null unendlich werden,* 3. *fast überall in* B *ist* $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$.

DRITTE GRUPPE.

§ 6. - HILFSSATZ 4 (Satz von LOOMAN-MENCHOFF) ([32]). — Die im Bereiche B definierten, stetigen, reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ sollen in den Punkten von $B-E$, wobei E eine abzählbare Teilmenge von B ist, endliche extreme Derivierte nach x und nach y haben. Wenn dann in fast allen Punkten, in welchen $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ beide existieren,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

ist, wird

$$\int_R u dx + v dy = 0$$

sein für jedes samt seinem Rande R in B liegende Intervall.

SATZ 10. - *$u(x, y)$ ist harmonisch im Bereiche B, wenn sie in B stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ hat und wenn daneben:* 1. *$\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in den Punkten von B, vielleicht abzählbar viele ausgenommen, endliche extreme Derivierte nach x und nach y haben,* 2. *in fast allen Punkten von B, in welchen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ beide existieren,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ist.

BEWEIS. - Aus den Bedingungen folgt, mit Hilfssatz 4, daß die Intervallfunktion $\Phi(J)=\int_R \frac{\partial u}{\partial n} ds$ in B identisch Null ist. Damit ergibt sich Satz 10 unmittelbar aus Satz 1 oder Satz 5 ([33]).

([32]) Siehe SAKS, loc. cit. ([25]), S. 243 und W. WILKOSZ, Ann. Soc. Polon. math. **11** (1933), S. 20 u. 57.

([33]) Mit Hilfe des Korollars zu Satz 5 (oder auch mit Satz 5 selbst) läßt sich, nach einer bekannten, von BAIRE und DENJOY oft benutzten Schlußweise, zeigen, *daß die in Satz 10, Bed. 1 vorkommende Ausnahmemenge allgemeiner eine Summe von abzählbar vielen Mengen $\{E_j\}$ sein darf, deren jedes endliches* lineares *Maß hat und in bezug auf B abgeschlossen ist.* Man vergleiche P. T. MAKER, Trans. Amer. Math. Soc., **45** (1939), S. 266 u. 267, wo die Möglichkeit der gleichen Erweiterung für die im bekannten LOOMAN-MENCHOFFschen Satze (über Analytizität komplexer Funktionen) auftretenden Ausnahmemenge bewiesen wird. *Auch die in den Sätzen 1-4 auftretenden Ausnahmemengen können in derselben Weise erweitert werden,* wie sich zeigen läßt bzw. mit Hilfe der Sätze 5-8.