ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ERVIN FELDHEIM

Équations intégrales pour les polynomes d'Hermite à une et plusieurs variables, pour les polynomes de Laguerre, et pour les fonctions hypergéométriques les plus générales

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 225-252

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_225_0>

ÉQUATIONS INTÉGRALES POUR LES POLYNOMES D'HERMITE À UNE ET PLUSIEURS VARIABLES, POUR LES POLYNOMES DE LAGUERRE, ET POUR LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES LES PLUS GÉNÉRALES

Dédié à M. le Prof. L. Fejér à son soixantième anniversaire

par ERVIN FELDHEIM (Budapest).

Introduction.

Le point de départ du présent travail est l'équation intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m\left(\frac{t+y}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{t+z}{\mu}\right) dt =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \left(\frac{2}{\sqrt{(\lambda^2-1)(\mu^2-1)}}\right)^r r!\binom{m}{r}\binom{n}{r} H_{m-r}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right) H_{n-r}\left(\frac{z}{\sqrt{\mu^2-1}}\right)$$

démontrée dans un travail récent ([1]), et fournissant la généralisation de la relation bien connue ([2]) de la théorie des « transformations de GAUSS » :

$$(1') \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-t)^2} H_m\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt = \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{m}{2}} H_m\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right).$$

Nous avons déduit de cette équation (1) une série de formules remarquables pour les *polynomes d' Hermite* $H_m(x)$, parmi lesquelles des représentations-intégrales pour produits de ces polynomes, et des développements en série.

Tout récemment nous avons remarqué *la ressemblence de forme entre le second membre de* (1), *et le développement connu* (voir formule (9)) *du polynome d' Hermite à deux variables en une série contenant le produit de deux polynomes d' Hermite à une variable.* Cette observation nous à

([1]) E. FELDHEIM : *Développements en série de polynomes d' Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Hankel.* Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Amsterdam. 43, 224-239, 240-248, 379-386 (1940). Nous renvoyons, pour la plupart des résultats cités dans ce travail, à la Bibliographie jointe à l'article précédent, que nous désignerons dans la suite par I.

([2]) P. APPELL - J. KAMPÉ DE FÉRIET : *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d' Hermite.* Paris, 1926. Cet ouvrage important sera cité au cours du présent travail comme: Appell, loc. cit.

amené à généraliser l'équation intégrale (1) pour le *produit d'un nombre quelconque de polynomes d'Hermite*, et à trouver la source commune de certains résultats précédemment établis, et exposés dans notre travail cité sous ([1]). Nous donnerons aussi *une équation pouvant être considérée comme l'inversion de* (1).

Le fait connu que les polynomes d'HERMITE sont des limites des polynomes ultrasphériques, nous a conduit à faire quelques considérations analogues sur ces derniers polynomes.

Dans la seconde partie du travail, nous chercherons à généraliser, dans le même ordre d'idées, certains résultats relatifs aux polynomes de LAGUERRE $L_m^{(\alpha)}(x)$, et à trouver l'origine commune de ces formules, établies indépendamment l'une de l'autre ([3]). Nous donnerons ici, comme résultats les plus généraux, des *équations intégrales particulièrement remarquables pour les fonctions hypergéométriques de Lauricella*, et nous allons indiquer les cas particuliers les plus importants de ces équations, entre autres ceux qui concernent les polynomes hypergéométriques (de JACOBI), et leur cas limite, le polynome de LAGUERRE.

Nous commençons par rappeler brièvement ([4]) la définition et les principales propriétés des polynomes d'HERMITE à plusieurs variables.

I. - Relations fonctionnelles entre les polynomes d'Hermite à une et plusieurs variables.

§ 1. - Les polynomes d'Hermite à plusieurs variables.

Soit

$$\varphi(x) \equiv \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{2}$$

une forme quadratique à n variables, de déterminant non nul: $\Delta = |a_{ik}| \neq 0$. On définit encore par

$$\psi(x) \equiv \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k}^{1,n} \frac{A_{ik}}{\Delta} x_i x_k, \tag{3}$$

la forme quadratique *adjointe* à φ, où A_{ik} est le mineur de Δ correspondant à l'élément a_{ik}. (Nous désignerons quelquefois, s'il y a lieu de mettre en évidence le nombre des dimensions, ces formes quadratiques par φ_n et ψ_n).

([3]) Les résultats de ce genre sont résumés dans le § 1 de I.

([4]) Pour ces notions, et les notations que nous adoptons dans tout ce travail, nous renvoyons à APPELL, loc. cit.

Il faut encore mentionner les substitutions linéaires

$$\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \tag{4}$$

$$x_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ik}}{\Delta}\xi_k, \qquad (i=1, 2,...., n) \tag{4'}$$

et la relation

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i = \varphi(x_1, x_2,...., x_n) = \psi(\xi_1, \xi_2,...., \xi_n).$$

Le polynome d'HERMITE à n variables (du 1er genre) $H_{m_1, m_2,..., m_n}(x_1, x_2,..., x_n)$ est défini au moyen de la fonction génératrice ([5])

$$e^{2(h_1\xi_1+h_2\xi_2+...+h_n\xi_n)-\varphi(h_1, h_2,..., h_n)} = \sum_{m_1, m_2,..., m_n}^{0,\infty} \frac{h_1^{m_1} h_2^{m_2} .... h_n^{m_n}}{m_1!\, m_2! .... m_n!} H_{m_1, m_2,..., m_n}(x_1, x_2,...., x_n) \tag{5}$$

φ étant *la forme quadratique définie positive* (2) $(\Delta > 0)$. Dans le cas d'une seule variable, on pose habituellement $\varphi(x) = x^2$, et l'on aura

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} H_m(x). \tag{5'}$$

Nous avons adopté cette définition dans nos recherches: la définition employée par plusieurs auteurs correspond à $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$.

Le polynome d'HERMITE adjoint (ou de second genre) à n variables $G_{m_1, m_2,...., m_n}(x_1, x_2,...., x_n)$ sera défini également par la formule:

$$e^{2(h_1 x_1+h_2 x_2+...+h_n x_n)-\psi(h_1, h_2,..., h_n)} = \sum_{m_1, m_2,..., m_n}^{0,\infty} \frac{h_1^{m_1} h_2^{m_2} .... h_n^{m_n}}{m_1!\, m_2! ... m_n!} G_{m_1, m_2,..., m_n}(x_1, x_2,..., x_n). \tag{6}$$

Si la forme φ est identique à son adjointe ψ, les deux systèmes de polynomes H et G se confondent, et se dégénèrent en un produit de n polynomes d'HERMITE à une variable. Insérons ici encore la remarque très utile que l'on passe de la fonction génératrice de G à celle de H en remplaçant, d'une part, les x_i par les ξ_i, et d'autre part, la forme ψ par son adjointe φ (c'est-à-dire, les a_{ik} par les $\left.\frac{A_{ik}}{\Delta}\right)$.

([5]) Il y a ici une différence entre la définition (5), et celle d'APPELL, qui considère au lieu de φ, la forme quadratique $\frac{1}{2}\varphi$, et les polynomes d'HERMITE qui leur correspondent

Nous aurons besoin aussi de la définition par des dérivées partielles

$$(7)\quad H_{m_1,\, m_2,\dots,\, m_n}(x_1, x_2,\dots, x_n) = \\ = (-1)^{m_1+m_2+\dots+m_n}\, e^{\varphi(x_1, x_2,\dots, x_n)}\, \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n}[e^{-\varphi(x_1, x_2,\dots, x_n)}]}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}$$

$$(8)\quad G_{m_1,\, m_2,\dots,\, m_n}(x_1, x_2,\dots, x_n) = \\ = (-1)^{m_1+m_2+\dots+m_n}\, e^{\psi(\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_n)}\, \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n}[e^{-\psi(\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_n)}]}{\partial \xi_1^{m_1} \partial \xi_2^{m_2} \dots \partial \xi_n^{m_n}}.$$

Nous choisirons, dans les problèmes qui vont être traités, des systèmes a_{ik} appropriés, mais nous n'introduirons pas de nouvelles notations pour le polynomes d'HERMITE qui leur correspondent. Nous croyons qu'il ne faut pas craindre d'une confusion, et, dans la plupart des cas, nous récrivons encore explicitement les formes quadratiques relatives aux polynomes d'HERMITE qui interviennent dans les formules.

Par exemple, si $n=2$, nous prenons, selon l'usage,

$$\underset{(\xi=ax+by,\ \eta=bx+cy)}{\varphi_2 \equiv \varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2} \qquad (a>0,\ c>0,\ \Delta_2 = ac-b^2>0),$$

et les polynomes d'HERMITE correspondants seront $H_{m,n}(x, y)$ et $G_{m,n}(x, y)$. On connaît les formules (auxquelles nous avons fait allusion dans l'introduction):

$$(9)\qquad H_{m,n}(x, y) = a^{\frac{m}{2}} c^{\frac{n}{2}} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \left(-\frac{2b}{\sqrt{ac}}\right)^r r! \binom{m}{r}\binom{n}{r} H_{m-r}\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) H_{n-r}\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right)$$

$$(10)\quad G_{m,n}(x, y) = c^{\frac{m}{2}} a^{\frac{n}{2}} \Delta^{-\frac{m+n}{2}} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \left(\frac{2b}{\sqrt{ac}}\right)^r r! \binom{m}{r}\binom{n}{r} H_{n-r}\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right) H_{n-r}\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right).$$

On aura encore

$$(11)\quad \lim_{\lambda_1\to 0,\dots,\lambda_n\to 0} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_n^{m_n} H_{m_1,\, m_2,\dots,\, m_n}\left(\frac{x_1}{\lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda_2},\dots, \frac{x_n}{\lambda_n}\right) = (2\xi_1)^{m_1}(2\xi_2)^{m_2}\dots(2\xi_n)^{m_n}$$

et

$$(11')\quad \lim_{\lambda_1\to 0,\dots,\lambda_n\to 0} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_n^{m_n} G_{m_1,\, m_2,\dots,\, m_n}\left(\frac{x_1}{\lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda_2},\dots, \frac{x_n}{\lambda_n}\right) = (2x_1)^{m_1}(2x_2)^{m_2}\dots(2x_n)^{m_n}.$$

Pour ce qui est d'autres résultats concernant ces polynomes d'HERMITE à n variables, nous renvoyons à l'ouvrage d'APPELL cité à plusieurs reprises, et à un de nos travaux actuellement sous presse ([6]).

([6]) E. FELDHEIM: *La transformation de Gauss à plusieurs variables: Application aux polynomes d'Hermite et à la généralisation de la formule de Mehler.* Rendic. della R. Accad. d'Italia (sous presse).

§ 2. - Nouvelles formes de l'équation intégrale (1).

En confrontant les seconds membres de (1) et (9), nous voyons qu'en prenant

$$a=\lambda^2-1, \qquad b=-1, \qquad c=\mu^2-1\,; \qquad y=\xi,\ z=\eta,$$

avec les hypothèses: 1.° $|\lambda|>1$, $|\mu|>1$; 2.° $\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}<1$, la formule (1) devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m\left(\frac{t+\xi}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{t+\eta}{\mu}\right) dt=\lambda^{-m}\mu^{-n} H_{m,\,n}(x,y) \tag{12}$$

où $H_{m,n}(x, y)$ correspond à

$\varphi(x, y)=(\lambda^2-1)\,x^2-2xy+(\mu^2-1)\,y^2$, et $\xi=(\lambda^2-1)\,x-y$, $\eta=-x+(\mu^2-1)\,y$.

Sous les mêmes hypothèses, faites pour λ et μ, (1) et (9) donnent

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m\left(\frac{t+x}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{t+y}{\mu}\right) dt=\lambda^{-m}\mu^{-n} G_{m,n}(x, y), \tag{12'}$$

où le polynome $G_{m,n}(x, y)$ correspond à la forme quadratique $\psi(x, y)=$ $=(\lambda^2-1)\,x^2-2xy+(\mu^2-1)y^2$. (La remarque du § 1 montre comment on peut déduire des formules sur $H_{m,n}(x, y)$ celles concernant les $G_{m,n}(x, y)$, de sorte que nous ne chercherons dans la suite que les premières).

Nous avons ainsi obtenu l'équation intégrale (1) sous une forme très simple (12), mais dont la validité est limitée aux valeurs des paramètres λ et μ soumises aux conditions précédentes, nécessaires pour que, d'après la définition du § 1, les polynomes d'HERMITE à deux variables aient un sens, tandis que nous n'avons pas fait de telles restrictions au sujet de la formule (1). Les résultats particuliers importants que nous avons déduits de (1) étant précisément ceux qui correspondent à des valeurs de λ et μ pour lesquelles la définition usuelle des polynomes d'HERMITE précédents, et par cela, la validité de (12) cesse, nous examinerons un à un ces cas, que nous appelons *cas limites*. Ici, nous introduirons les notations $H^{(0)}_{m,n}(x, y)$, et $H^{(-)}_{m,n}(x, y)$ pour désigner ce que deviennent les polynomes d'HERMITE à deux variables $H_{m,n}(x, y)$ dans les cas limites où le déterminant $\Delta_2=ac-b^2$ est nul ou négatif respectivement.

Cas limites. - 1.° $\Delta_2=0$. Dans le cas présent,

$$\Delta_2=\lambda^2\mu^2-\lambda^2-\mu^2,$$

de sorte que Δ_2 sera nul si l'on prend $\lambda^2=1+k^2$, $\mu^2=1+\frac{1}{k^2}$, k étant quelconque. Alors

$$\varphi(x, y)=\left(kx-\frac{y}{k}\right)^2,$$

et la définition (7) montre immédiatement que le polynome d' HERMITE à deux variables se réduit à

$$H^{(0)}_{m,n}(x, y) = (-1)^n k^{m-n} H_{m+n}\left(kx - \frac{y}{k}\right), \tag{13}$$

c'est-à-dire, *le polynome d' Hermite à 2 variables correspondant à une forme quadratique de déterminant nul se réduit au polynome d' Hermite à une variable de degré égal au degré total du polynome à deux variables, et d'argument égal à une combinaison linéaire des deux variables.*

Comme ici

$$\xi = k^2 x - y = kz, \qquad \eta = \frac{y}{k^2} - x = -\frac{z}{k},$$

la relation (12) devient, après quelques changements:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m\left(\frac{kz+t}{\sqrt{1+k^2}}\right) H_n\left(\frac{z-kt}{\sqrt{1+k^2}}\right) dt = k^m (1+k^2)^{-\frac{m+n}{2}} H_{m+n}(z). \tag{14}$$

Nous retrouvons, sous une forme légèrement différente, une équation intégrale établie dans notre travail cité sous ([1]).

Si nous prenons $k = i$, la relation précédente se réduit à la formule bien connue

$$\frac{2^{m+n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (z+it)^{m+n} dt = H_{m+n}(z). \tag{15}$$

Si nous posons $k = \operatorname{tg} a$, la formule (14) redonne notre résultat cité:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(z \sin a + t \cos a)\, H_n(z \cos a - t \sin a)\, dt &= \\ &= \sin^m a \cos^n a \cdot H_{m+n}(z). \end{aligned} \tag{14'}$$

valable pour toute valeur de a.

2.° $\Delta_2 < 0$. Le déterminant Δ_2 sera égal à -1, si l'on fait $\lambda = \mu = 1$. Alors,

$$\varphi_2(x, y) = -2xy, \qquad (\xi = -y, \ \eta = -x),$$

et l'on démontre très facilement, par une simple transformation de (7), que

$$\begin{aligned} H^{(-)}_{m,n}(x, y) &= (-1)^{m+n} e^{-2xy} \frac{\partial^{m+n} (e^{2xy})}{\partial x^m \partial y^n} = \\ &= (-1)^{m+n} \cdot 2^n \cdot x^{n-m} e^{-2xy} \frac{d^n [(2xy)^m e^{2xy}]}{d(2xy)^n}. \end{aligned} \tag{16}$$

En se rappelant la définition des polynomes de LAGUERRE

$$L_n^{(a)}(x) = \frac{e^x x^{-a}}{n!} \frac{d^n(x^{a+n} e^{-x})}{dx^n}, \tag{17}$$

on verra que *le polynome d'Hermite à deux variables, relatif à la forme quadratique* $\varphi_2(x, y) = -2xy$, *se réduit à*

$$H_{m,n}^{(-)}(x, y) = 2^m n! \, (-y)^{m-n} L_n^{(m-n)}(-2xy) \qquad (m \geqq n). \tag{18}$$

L'équation (12) prend, dans ce cas, la forme intéressante ([7])

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t+y) H_n(t-x) dt = 2^m n! \, y^{m-n} L_n^{(m-n)}(2xy) \qquad (m \geqq n). \tag{19}$$

Le déterminant $\varDelta_2$ est encore égal à -1, si l'on prend p. ex. $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Ce cas sera indiqué dans le n.° suivant.

3.° Si nous admettons, dans ces cas limites, les interprétations (13) et (18) pour les polynomes d'HERMITE à deux variables, nous pouvons déduire de (9) des formules équivalentes à (15) et (19).

Dans le cas où $\lambda = \mu = 0$, c'est-à-dire si $a = b = c = -1$, et $\varDelta_2 = 0$, nous tirons de (9) et de 1.°, le développement :

$$H_{m+n}(z) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-2)^r \, r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} H_{m-r}(z) \, H_{n-r}(z), \tag{20}$$

retrouvant ainsi une formule établie préalablement ([8]). (Il faut encore remarquer que cette déduction de (20) n'en constitue pas une nouvelle démonstration, parce que nous avons employé, dans notre travail cité sous ([1]) le même raisonnement pour prouver (20) que celui qui conduit à (9). Nous y avons d'ailleurs donné une autre démonstration aussi). La relation (20) complète donc (9) pour le cas où le déterminant $\varDelta_2$ de la forme quadratique $\varphi_2(x, y)$ est nul. Nous avons ainsi trouvé l'origine de notre formule (20) dont la ressemblence de forme avec (9), comme nous l'avons déjà dit dans l'Introduction, nous a conduit aux problèmes généraux qui sont traités dans le présent travail.

Dans le cas où $\lambda = \mu = 1$, c'est-à-dire si $a = c = 0$, $b = -1$, et $\varDelta_2 = -1$, la formule (9) se réduit, en vertu de (18), à l'expression explicite des polynomes de LAGUERRE $L_n^{(a)}(x)$.

([7]) Voir I, ou encore E. FELDHEIM: *Expansions and Integral-Transforms for Products of Laguerre and Hermite Polynomials.* Quarterly Journal of Math. 11, 18-29 (1940).

([8]) M. L. TOSCANO indique dans une Note récente (Rendic. R. Accad. d'Italia, I, 405-411 (1940)) que cette formule, ainsi que (32′), ont été déjà trouvées par N. NIELSEN. (Ajouté à la correction des épreuves).

Si $\lambda=1$, $\mu=0$, c'est-à-dire $a=0$, $b=c=-1$ (et $\xi=-y$, $\eta=-x-y$), les formules (9) et (12) donnent lieu à

$$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t+\xi)\,(\eta-it)^n dt = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-2i)^r\, r!\binom{m}{r}\binom{n}{r}(2\xi)^{m-r} H_{n-r}(\eta).$$

Passons à présent à la généralisation de notre équation intégrale (12).

§ 3. - L'équation intégrale générale.

Donnons-nous n quantités réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que

$$1.^\circ\quad |\lambda_k|>1\quad (k=1,2,\ldots,n);\qquad 2.^\circ\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2}<1.$$

Soit a_{jk} le système de coefficients défini par

$$(21)\qquad a_{jj}=\lambda_j^2-1;\quad a_{jk}=-1\qquad (j,k=1,2,\ldots,n;\ j\neq k),$$

et considérons la forme quadratique à n variables

$$(22)\qquad \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{j,k}^{1,n} a_{jk}x_j x_k\,,$$

dont le déterminant est

$$\Delta_n=\lambda_1^2\,\lambda_2^2\ldots\lambda_n^2\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2}\right).$$

Les conditions 1.° et 2.° montrent que $a_{jj}>0$, et $\Delta_n>0$, donc on peut adjoindre d'après le § 1, à la forme quadratique φ_n un système de polynomes d'HERMITE à n variables. Pour les buts du présent §, il sera le plus commode de définir ces polynomes à l'aide de la fonction génératrice (5). Des considérations très simples donnent alors, en vertu de (5) et (5'), *l'équation intégrale générale* que nous avons cherchée:

$$(23)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_{m_1}\left(\frac{z+\xi_1}{\lambda_1}\right) H_{m_2}\left(\frac{z+\xi_2}{\lambda_2}\right)\ldots H_{m_n}\left(\frac{z+\xi_n}{\lambda_n}\right)dz=$$
$$=\lambda_1^{-m_1}\lambda_2^{-m_2}\ldots\lambda_n^{-m_n} H_{m_1,m_2,\ldots,m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ici, rappelons-le, le polynome d'HERMITE à n variables correspond à la forme quadratique définie par (21) et (22), et les ξ_k sont liés aux x_k par (4).

Si $n=2$, (23) se réduit à la relation (12).

Il est indiqué, dans le cas général aussi, comme pour $n=2$, de chercher ce que devient l'equation intégrale (23) pour les valeurs des paramètres ne satisfaisant pas aux conditions imposées plus haut.

En général, si $\Delta_n=0$, la forme (22) se réduit, d'après la théorie des formes quadratiques, à une forme à $n-1$ variables, de sorte que *le polynome d'Hermite à n variables, correspondant à une φ_n pour laquelle $\Delta_n=0$, s'exprime au moyen des polynomes d'Hermite à $n-1$ variables.* Si l'on considère le cas le plus simple où $\lambda_k=0$ $(k=1, 2,\ldots, n)$, on aura $\Delta_n=0$, $a_{jk}=-1$ et $\xi_k=-(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, pour tous les indices,

$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=-(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

Le polynome d'HERMITE correspondant sera tout simplement

$$H^{(0)}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=i^{m_1+m_2+\ldots+m_n} H_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(ix_1+ix_2+\ldots+ix_n).$$

L'équation intégrale (23) se réduit à l'expression bien connue des polynomes d'HERMITE à une variable par une intégrale analogue à (15).

La généralisation de (9) pour les polynomes à n variables donnera lieu, dans le cas présent, à une relation analogue à (20). Nous croyons qu'il est inutile de l'écrire ici explicitement.

Cas limites pour $n=3$. - 1.° Une des possibilités les plus simples où $\Delta_3=0$ est fournie par $\lambda_k=\sqrt{3}\,(k=1, 2, 3)$. Alors

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2 \qquad (a_{jj}=2,\ a_{jk}=-1),$$

et il faut chercher à exprimer le polynome $H^{(0)}_{m_1, m_2, m_3}(x_1, x_2, x_3)$ correspondant à l'aide de (7). Si nous faisons

$$x_1-x_2=y_1-y_2, \quad x_2-x_3=y_2, \quad x_1-x_3=y_1,$$

ou

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3)=2(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)\equiv\varphi,$$

nous aurons

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+m_3} e^{-\varphi_3}}{\partial x_1^{m_1}\,\partial x_2^{m_2}\,\partial x_3^{m_3}}=\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial y_1^{m_1}\,\partial y_2^{m_2}}\left[\frac{\partial^{m_3} e^{-\varphi_3}}{\partial x_3^{m_3}}\right]=(-1)^{m_3}\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial y_1^{m_1}\,\partial y_2^{m_2}}\left(\frac{\partial e^{-\varphi}}{\partial y_1}+\frac{\partial e^{-\varphi}}{\partial y_2}\right)^{(m_3)}=$$

$$=(-1)^{m_3}\sum_{k=0}^{m_3}\binom{m_3}{k}\frac{\partial^{m_1+m_2+m_3} e^{-\varphi}}{\partial y_1^{m_1+m_3-k}\,\partial y_2^{m_2+k}},$$

de sorte que

$$(24)\quad H^{(0)}_{m_1, m_2, m_3}(x_1, x_2, x_3)=(-1)^{m_3}\sum_{k=0}^{m_3}\binom{m_3}{k}H_{m_1+m_3-k,\, m_2+k}(x_1-x_3, x_2-x_3),$$

avec $a_{jj}=2$, $a_{jk}=-1$, pour tous les deux polynomes d'HERMITE qui y interviennent. L'équation (23) s'écrit alors, avec des petits changements de notations :

$$(23') \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_m\left(\frac{z+2u-v}{\sqrt{3}}\right) H_n\left(\frac{z-u+2v}{\sqrt{3}}\right) H_p\left(\frac{u+v-z}{\sqrt{3}}\right) dz =$$

$$= 3^{-\frac{m+n+p}{2}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} H_{m+p-k,\ n+k}(u, v).$$

2.° L'autre cas limite, comme pour $n=2$, est celui où $\lambda_k=1$ (et $a_{jj}=0$, $a_{jk}=-1$). Ici

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = -2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1), \qquad (\Delta_3=-2)$$

et des calculs analogues à ceux de 1.° permettent de déduire de (7) la relation

$$(25) \quad H^{(-)}_{m_1, m_2, m_3}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=m_3} \frac{(m_2+\beta)!\ m_3!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}\, 2^{m_1+\alpha+\frac{\gamma}{2}} (-x_2-x_3)^{m_1-m_2+\alpha-\beta} \times$$

$$\times L^{(m_1-m_2+\alpha-\beta)}_{m_2+\beta}[-2(x_1+x_3)(x_2+x_3)] \cdot H_\gamma(x_3\sqrt{2}),$$

où L désigne le polynome de LAGUERRE (17), et où l'on suppose que $m_1 \geqq m_2+m_3$. Si $m_3=0$, on retrouve (18); on peut aussi écrire une équation intégrale, se réduisant, pour $n_3=0$, à (19).

Une application de (23). - Dans le cas où $x_1=x_2=x_3=0$, et $m_1=m_2+m_3$, le second membre de (25) n'est différent de zéro que pour $\alpha=\gamma=0$, $\beta=m_3$, et alors

$$H^{(-)}_{m_1, m_2, m_3}(0, 0, 0) = 2^{m_1} m_1!$$

En général, si l'on pose dans (23), $x_1=x_2=\ldots.=x_n=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\ldots.=\lambda_n=1$, et en supposant que $m_2+m_3+\ldots.+m_n=m_1\equiv m$, on retrouve la formule ([9])

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_m(z) H_{m_2}(z) \ldots. H_{m_n}(z)\, dz = 2^m\, m!$$

(23) peut encore être considéré comme la généralisation de cette relation.

§ 4. - Inversion de l'équation intégrale (23).

Nous savons que les formules particulières (15) et (19), correspondant aux cas où $\Delta_2=0$, et $\Delta_2=-1$, admettent des inversions, pour lesquelles nous ren-

---

([9]) BAILEY W. N.: *On Hermite polynomials and associated Legendre functions.* Journal London Math. Soc. 14, 281-286. (1939).

voyons au travail cité sous ([1]). Nous nous proposons de chercher dans ce § l'*équation intégrale générale qui pourra être considérée comme l'inversion de* (23), et qui contiendra, à la limite, ces formules spéciales mentionnées tout à l'heure.

D'après la définition (5),

$$\sum \frac{h_1^{m_1} h_2^{m_2} \dots h_n^{m_n}}{m_1!\, m_2! \dots m_n!} H_{m_1, m_2, \dots, m_n}\left(x_1 + \frac{u}{\lambda_1}, x_2 + \frac{u}{\lambda_2}, \dots, x_n + \frac{u}{\lambda_n}\right) =$$

$$= \exp\left[2 \sum_{r=1}^{n} h_r \xi_r - \varphi_n(h_1, h_2, \dots, h_n)\right] \cdot \exp\left[2u \sum_{r=1}^{n} h_r \mu_r\right],$$

où $\xi_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s$, $\mu_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs} \frac{1}{\lambda_s}$, φ_n la forme quadratique (2), et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n quantités qui seront précisées plus loin, ainsi que les coefficients a_{rs}. Multiplions les deux membres par $e^{-(u-t)^2}$, où t est une quantité arbitraire du plan, et intégrons ([10]) par rapport à u de $-\infty$ à $+\infty$. Il vient

$$(26) \quad \sum \frac{h_1^{m_1} h_2^{m_2} \dots h_n^{m_n}}{m_1!\, m_2! \dots m_n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-t)^2} H_{m_1, m_2, \dots, m_n}\left(x_1 + \frac{u}{\lambda_1}, x_2 + \frac{u}{\lambda_2}, \dots, x_n + \frac{u}{\lambda_n}\right) du$$

$$= \sqrt{\pi} \exp\left[2 \sum_{r=1}^{n} (\xi_r + t\mu_r) h_r + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} (\mu_r \mu_s - a_{rs}) h_r h_s\right].$$

Le second membre se décompose au produit de n fonctions génératrices de polynomes d'Hermite à une variable, lorsque

$$a_{rs} = \mu_r \mu_s, \qquad \text{pour} \qquad r \neq s.$$

Nous définirons alors la forme quadratique à n variables au moyen des coefficients

$$(27) \quad a_{rr} = \lambda_r^2 \cdot k[1-(n-1)k], \qquad a_{rs} = \lambda_r \lambda_s \cdot k^2, \qquad (r, s = 1, 2, \dots, n;\ r \neq s)$$

et l'on doit avoir $0 < k < \frac{1}{n-1}$. Les nombres μ_r définis tout à l'heure seront égaux à $\mu_r = k\lambda_r$, et l'on aura: $a_{rr} - \mu_r^2 = \lambda_r^2 \cdot k(1-nk)$.

Le second membre de (26) devient ainsi

$$(26') \quad \exp \sum_{r=1}^{n} [2h_r(\xi_r + t\mu_r) - (a_{rr} - \mu_r^2) h_r^2] = \exp \sum_{r=1}^{n} \left\{ 2h_r \sqrt{a_{rr} - \mu_r^2}\, \frac{\xi_r + t\mu_r}{\sqrt{a_{rr} - \mu_r^2}} - (h_r \sqrt{a_{rr} - \mu_r^2})^2 \right\}$$

$$= \sum \frac{h_1^{m_1} h_2^{m_2} \dots h_n^{m_n}}{m_1!\, m_2! \dots m_n!} (a_{11} - \mu_1^2)^{\frac{m_1}{2}} \dots (a_{nn} - \mu_n^2)^{\frac{m_n}{2}} H_{m_1}\left(\frac{\xi_1 + t\mu_1}{\sqrt{a_{11} - \mu_1^2}}\right) \dots H_{m_n}\left(\frac{\xi_n + t\mu_n}{\sqrt{a_{nn} - \mu_n^2}}\right).$$

([10]) Pour la légitimité de l'intégration terme-à-terme des séries multiples qui interviennent dans ce travail, il est suffisant de rappeler la convergence uniforme de ces séries. Voir, d'ailleurs, APPELL, loc. cit.

D'autre part, il est facile à montrer que le déterminant de la forme quadratique φ_n de coefficients (27) est

$$\varDelta_n = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_n^2 \cdot k^n \, (1-nk).$$

Remarquons immédiatement que la condition $\varDelta_n > 0$ remplace les inégalités $0 < k < \frac{1}{n-1}$ par

$$0 < k < \frac{1}{n}. \tag{28}$$

Si nous posons ensuite, dans (26) et (26'), $t = \frac{\tau}{k}\sqrt{1-nk}$, nous trouvons finalement, par identification, dans (26) et (26'), des coefficieents de $h_1^{m_1} \ldots h_n^{m_n}$, l'*équation intégrale cherchée*:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u - \frac{\tau}{k}\sqrt{1-nk}\right)^2} H_{m_1, m_2, \ldots, m_n}\left(x_1 + \frac{u}{\lambda_1},\ x_2 + \frac{u}{\lambda_2}, \ldots,\ x_n + \frac{u}{\lambda_n}\right) du \tag{29}$$

$$= \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \ldots \lambda_n^{m_n} (1-nk)^{\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{2}} H_{m_1}\left(\tau + \frac{\xi_1}{\lambda_1\sqrt{1-nk}}\right) \ldots H_{m_n}\left(\tau + \frac{\xi_n}{\lambda_n\sqrt{1-nk}}\right).$$

(Pour $n=1$, (29) se réduit à (1')). Rappelons que le polynome d'HERMITE à n variables figurant dans cette équation correspond à la forme quadratique φ_n définie par (27), avec k satisfaisant à (28), tandisque les nombres réels λ_r ne sont soumis à aucune restriction; le paramètre τ peut prendre n'importe quelle valeur réelle ou complexe du plan entier.

Cas particuliers et cas limites de (29). - 1.° Si $k = \frac{1}{n}$, $\varDelta_n = 0$, et $a_{rs} = \frac{\lambda_r \lambda_s}{n^2}$, $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ de sorte que

$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n^2}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)^2 = z^2.$$

Dans ce cas, d'après (7),

$$H^{(0)}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \ldots \lambda_n^{m_n} n^{-(m_1+m_2+\ldots+m_n)} H_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(z).$$

Si l'on remarque que $\xi_r = \lambda_r \frac{z}{n}$, l'équation (29) se réduit à l'inversion de (15).

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} H_m(z+u) du = (2z)^m \qquad (\text{où } m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n). \tag{30}$$

2.° Considérons ici seulement le cas où $n=2$, et soit $k=1$. Alors $a_{rr}=0$, $a_{rs} = \lambda_r \lambda_s$ $(r, s = 1, 2)$. Soit $\lambda_1 = \lambda_2 = -i$, d'où $\varDelta_2 = -1$, et $\xi_1 = -x_2$, $\xi_2 = -x_1$; en tenant compte de (18), nous trouvons

$$\frac{2^{m_1} m_2!}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+i\tau)^2} (x_2 + iu)^{m_1 - m_2} L_{m_2}^{(m_1 - m_2)} [-2(x_1 + iu)(x_2 + iu)] du = \tag{31}$$

$$= H_{m_1}(x_2 + \tau) H_{m_2}(x_1 + \tau) \qquad (m_1 \geqq m_2).$$

Si nous considérons encore le cas particulier où $x_1=-v$, $x_2=v$, nous aurons l'*équation intégrale très intéressante* (11), fournissant l'inversion de (19):

$$(31') \quad \frac{2^m n!}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+iz)^2} (v+iu)^{m-n} L_n^{(m-n)} (2u^2+2v^2) du = H_m(z+v) \, H_n(z-v) \qquad (m \geqq n).$$

§ 5. - Inversion du développement (9).

L'expression (5) des fonctions génératrices permet d'établir, dans le cas de $n=2$, et avec les notations utilisées dans le § 1, la *formule inverse de* (9):

$$(32) \quad H_m\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) H_n\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right) = a^{-\frac{m}{2}} c^{-\frac{n}{2}} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (2b)^r \, r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} H_{m-r,\, n-r}(x, y),$$

où le polynome d'HERMITE à deux variables correspond à la forme quadratique $\varphi_2(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$, avec $\Delta_2=ac-b^2>0$. La généralisation de ce développement pour plusieurs variables peut être établie sans difficulté.

Dans le cas limite où $a=b=c=1$, et $\Delta_2=0$, (32) devient, en vertu de (13),

$$(32') \qquad H_m(x) \, H_n(x) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} 2^r \, r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} H_{m+n-2r}(x),$$

se réduisant ainsi à une formule établie antérieurement (12). Cette relation (32') peut aussi être considérée comme l'inversion de (20), et nous voyons que ces deux résultats trouvent leur origine dans la théorie des polynomes d'HERMITE à deux variables.

Si $a=c=0$, $b=-1$ (où $\Delta_2=-1$), (32) se réduit, en vertu de (18), à « l'inversion » bien connue des polynomes de LAGUERRE, que nous rencontrerons encore dans le chapitre qui s'occupera de ces derniers (13).

---

(11) Voir I. Remarquons que des changements de paramètres permettent de donner à (19) une forme qui montre que (31') est *l'inversion* de cette équation (19).

(12) Pour les indications bibliographiques, voir I, § 1.

(13) Nous étudions la liaison entre les polynomes de LAGUERRE à une et deux variables, et nous traitons des questions analogues à celles du présent article dans un travail en préparation. (Ajouté à la correction des épreuves).

II. - Résultats sur les polynomes ultrasphériques.

§ 1. - La formule de multiplication des polynomes $V_n^{(s)}(x)$.

Définissons les polynomes ultrasphériques ([14]) à l'aide des fonctions génératrices

$$(1) \qquad (1-2ax+a^2)^{-s}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n V_n^{(s)}(x),$$

où s est un nombre réel non nul, qui n'est pas égal à un entier négatif, la variable x étant dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Ces polynomes sont *orthogonaux*, dans l'intervalle $(-1, +1)$, par rapport au poids $(1-x^2)^{s-\frac{1}{2}}$.

Rappelons encore la relation

$$(2) \qquad \frac{d V_n^{(s)}(x)}{dx}=2s V_{n-1}^{(s+1)}(x),$$

et la formule limite

$$(3) \qquad \lim_{s\to\infty} s^{-\frac{n}{2}} V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)=\frac{1}{n!} H_n(x),$$

se déduisant de (1) et de la relation (5′) du Chap. I.

Remplaçons, dans (1), a par λa, et x par $\frac{x}{\lambda}$, de sorte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \lambda^n V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)=(1-2ax+a^2)^{-s}\left(1-\frac{a^2(1-\lambda^2)}{1-2ax+a^2}\right)^{-s}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s, k)}{k!} a^{2k}(1-\lambda^2)^k(1-2ax+a^2)^{-(s+k)}.$$

En tenant compte de (1), et identifiant aux deux membres les coefficients de a^n, il vient la « relation de multiplication » des polynomes ultrasphériques:

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(s, k)}{k!}(1-\lambda^2)^k V_{n-2k}^{(s+k)}(x)=\lambda^n V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Dans ces formules, d'après la notation usuelle,

$$(s, k)=\frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}.$$

([14]) Appell, loc. cit.

Il suit immédiatement de (1) que

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^n V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{(s, n)}{n!}(2x)^n$$

de sorte que, posant $\lambda=0$ dans (4),

$$\frac{(s, n)}{n!}(2x)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(s, k)}{k!} V_{n-2k}^{(s+k)}(x), \tag{5}$$

qui est « l'inversion » des polynomes ultrasphériques $V_n^{(s)}(x)$.

Une transformation de (4) est la relation suivante:

$$\lambda^n V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(s, k)}{k!} (\lambda^2-1)^{\frac{n}{2}-k} V_{n-2k}^{(s+k)}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right). \tag{6}$$

Si l'on y fait $\lambda \to 0$, on retombe sur (5). Si $\lambda \to 1$, on a le développement direct des polynomes $V_n^{(s)}(x)$:

$$V_n^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(s, n-k)}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \tag{5'}$$

On trouve ensuite la formule

$$V_n^{(s)}(x+y) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(s, k)}{k!} (2x)^k V_{n-k}^{(s+k)}(y). \tag{7}$$

Le passage à la limite exprimé par (3) redonne, par les relations précédentes, les résultats connus ([15]) relatifs aux polynomes d'HERMITE à une variable.

§ 2. - Généralisation de l'équation intégrale (1') (Chap. I) pour les polynomes $V_n^{(s)}(x)$.

Il est facile à voir que l'intégrale, qui se réduit, par (3), à celle du premier membre de (1') du Chap. I, est de la forme

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{s-\frac{1}{2}} V_n^{(s)}\left(\frac{x+y}{\lambda}\right) dx.$$

Cherchons à trouver la valeur de celle-ci, exprimée à l'aide des polynomes ultra-

([15]) Voir I, § 1.

sphériques d'argument y. Or, en substituant à $V_n^{(s)}\left(\frac{x+y}{\lambda}\right)$ le second membre de la formule correspondante (7), et se rappelant que

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{s-\frac{1}{2}}x^{2r}dx=\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(r+s+1)},$$

nous trouvons finalement l'équation intégrale

$$(8)\qquad J_n=\frac{\lambda^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{s-\frac{1}{2}}V_n^{(s)}\left(\frac{x+y}{\lambda}\right)dx=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(s,\,2r)}{\left(s+\frac{1}{2},\,r+\frac{1}{2}\right)}\frac{\lambda^{n-2r}}{r!}V_{n-2r}^{(s+2r)}\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

En appliquant ici le passage à la limite (3), et tenant compte de la limite correspondante de (6), nous retrouvons l'équation concernant les polynomes d'HERMITE (1') (Chap. I).

Il est indiqué de chercher si le second membre de (8) pouvait être mis sous une forme analogue à celui de (1') (Chap. I), de sorte que le passage à la limite réduise (8) directement à cette équation des polynomes d'HERMITE, sans l'intermédiaire de (6).

Si l'on écrit (8) sous la forme

$$J_n'=\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}J_n=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{s}{s+2r}\binom{s+2r}{r}\lambda^{n-2r}V_{n-2r}^{(s+2r)}\left(\frac{y}{\lambda}\right),$$

l'application répétée de (6) conduit à

$$J_1'=(\lambda^2-1)^{\frac{1}{2}}V_1^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right),\quad J_2'=(\lambda^2-1)V_2^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right),$$

$$J_3'=(\lambda^2-1)^{\frac{3}{2}}V_3^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)+(\lambda^2-1)^{\frac{1}{2}}V_1^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right),$$

$$J_4'=(\lambda^2-1)^2V_4^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)+\frac{2(s+2)}{s+1}(\lambda^2-1)V_2^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)+\frac{s(s+3)}{s+1}(\lambda^2-1).$$

Nous voyons donc que seulement pour $n=1$ et $n=2$, trouve-t-on des expressions analogues à (1'), mais pour des valeurs plus élevées de n, on aura, comme valeur de J_n, une série contenant les polynomes $V_{n-2r}^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)$, pour $r=0, 1, 2,\ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$:

$$(8')\qquad J_n=\frac{\lambda^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{s-\frac{1}{2}}V_n^{(s)}\left(\frac{x+y}{\lambda}\right)dx=\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A_r^{(n)}V_{n-2r}^{(s)}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right),$$

où les coefficients $A_r^{(n)}$ dépendent de s et de λ: $A_0^{(n)}=(\lambda^2-1)^{\frac{n}{2}}$. Nous n'effectuons pas ici le calcul de ces coefficients.

Si $\lambda \to 0$, ou $\lambda \to 1$, on trouvera des formules analogues à celles des cas limites des polynomes d'HERMITE, sans avoir évidemment la simplicité et l'élégance des résultats, pour lesquels nous renvoyons au travail cité sous [1].

En spécialisant le paramètre s, nous obtenons des relations pour les diverses sortes de polynomes ultrasphériques. Si $s=\frac{1}{2}$, par exemple, $V_n^{(s)}(x)$ est le polynome de LEGENDRE $X_n(x)$, etc.

Nous connaissons aussi l'extension de ces polynomes au cas de plusieurs variables. Si nous voulons trouver la généralisation de l'équation intégrale (12) du Chap. I pour ces polynomes ultrasphériques à deux variables, nous avons à exprimer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{s-\frac{1}{2}}\, V_{m,n}^{(s)}\left(\frac{t+\xi}{\lambda},\ \frac{t+\eta}{\mu}\right) dt,$$

en fonction des polynomes $\mathfrak{V}_{m,n}^{(s)}(x,y)$, et les polynomes à deux variables qui y figurent sont définis par [16]

$$(1-2hx-2ky+h^2+k^2)^{-(s+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h^m k^n V_{m,n}^{(s)}(x,y),$$

et

$$\{(h\xi+k\eta-1)^2+\varphi_2(h,k)\,[1-\varphi_2(x,y)]\}^{-s}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h^m k^n\, \mathfrak{V}_{m,n}^{(s)}(x,y)$$

la forme quadratique φ_2 et les variables ξ et η étant les mêmes qu'au § 1 du Chap. I. Par les passages à la limite analogues à (3), cette dernière intégrale se réduira à (12) du Chap. I. Vu que le résultat (8′), relatif à une variable, est déjà assez compliqué, nous croyons qu'il n'y aura pas grand intérêt à déterminer cette relation. On voit, en tout cas, dans quelle direction les équations intégrales (23) et (29) du Chap. I peuvent encore être généralisées.

---

(16) APPELL, loc. cit. et ANGELESCU: *Thèse.* (Paris, 1916).

III. - Fonctions hypergéometriques et polynomes de Laguerre.

§ 1. - Relations pour les polynomes hypergéométriques de Jacobi.

Observant que les polynomes ultrasphériques $V_n^{(s)}(x)$ sont des cas particuliers d'une classe plus générale de polynomes, appelés polynomes de JACOBI ([17]), il est naturel de voir si certains résultats, établis pour les premiers, pouvaient être étendus à ces derniers polynomes. Ceci est encore plus indiqué si l'on se rappelle que les polynomes de LAGUERRE (17) (Chap. I) peuvent être obtenus comme limites des polynomes hypergéométriques, et l'on pourra ainsi s'attendre à trouver des généralisations et nouvelles interprétations pour des résultats concernant les polynomes de LAGUERRE, et n'ayant, à première vue, aucune liaison entre eux.

Ces polynomes de JACOBI sont définis, dans l'intervalle (0, 1), par

$$\mathcal{F}_n(a, \gamma, x)=\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-a}}{(\gamma, n)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{a+n-\gamma}], \tag{1}$$

n étant un entier non négatif, a et γ deux paramètres. Nous savons que les $\mathcal{F}_n$ sont orthogonaux dans l'intervalle (0, 1), par rapport au poids $x^{a-1}(1-x)^{\gamma-a-1}$. On a encore

$$\mathcal{F}_n(a, \gamma, x)=F(-n, a+n, \gamma, x)$$

où F est la fonction hypergéométrique de GAUSS à une variable, définie par

$$F(a, \beta, \gamma, x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)m!}x^m=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-a}du, \tag{2}$$

avec $R(\gamma)>R(\beta)>0$.

Les polynomes ultrasphériques $V_n^{(s)}(x)$ sont liés à ces polynomes $\mathcal{F}_n$ par

$$V_n^{(s)}(x)=(-1)^n\frac{(s, n)}{n!}\mathcal{F}_n\left(s, \frac{s+1}{2}, \frac{1+x}{2}\right).$$

En confrontant la formule (17) du Chap. I à la relation (1) de tout à l'heure, on verra que

$$L_n^{(a)}(x)=\frac{(a+1, n)}{n!}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_n\left(\frac{1}{\varepsilon}, a+1, \varepsilon x\right). \tag{3}$$

([17]) Nous utilisons ici la définition et la notation dues à APPELL. Certains auteurs appellent polynomes de JACOBI les polynomes (à un facteur près):

$$J_n(x, \lambda, \mu)=(x+1)^{-\lambda}(x-1)^{-\mu}\frac{d^n[(x+1)^{n+\lambda}(x-1)^{n+\mu}]}{dx^n}, \qquad (-1\leqq x\leqq 1).$$

Entre les deux définitions, il y a la relation de passage

$$\mathcal{F}_n(a, \gamma, x)=\frac{(-1)^n}{2^n(\gamma, n)}J_n(2x-1, \gamma-1, a-\gamma).$$

Cette relation se déduit d'ailleurs de la définition des *fonctions confluentes* (de KUMMER) ([18])

$$(4)\qquad G(a, \gamma, x)=\lim_{\varepsilon\to 0} F\left(a, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(a)\Gamma(\gamma-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{\gamma-a-1}e^{ux}du,$$

avec $R(\gamma)>R(a)>0$, si l'on se rappelle que

$$(3')\qquad L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+1, n)}{n!}G(-n, \alpha+1, x).$$

La représentation intégrale (2) des fonctions hypergéométriques F permet de déduire très facilement la « formule de multiplication » des polynomes de JACOBI :

$$(5)\qquad \lambda^n \mathcal{F}_n\left(a, \gamma, \frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda-1)^k \mathcal{F}_{n-k}(a+k, \gamma, x),$$

qui peut aussi se mettre sous la forme suivante:

$$(5')\qquad \lambda^n \mathcal{F}_n\left(a, \gamma, \frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda-1)^{n-k} \mathcal{F}_{n-k}\left(a+k, \gamma, \frac{x}{\lambda-1}\right),$$

où λ est un paramètre arbitraire. Tenant compte de ce que (d'après (1)),

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^n \mathcal{F}_n\left(a, \gamma, \frac{x}{\lambda}\right)=(-1)^n\frac{(n+a, n)}{(\gamma, n)}x^n,$$

et posant, dans (5) et (5'), $\lambda\to 0$ et $\lambda\to 1$ respectivement, on aura les deux développements inverses:

$$(6)\qquad \mathcal{F}_n(a, \gamma, x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n+a, k)}{(\gamma, k)}x^k,$$

$$(6')\qquad \frac{(n+a, n)}{(\gamma, n)}x^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\mathcal{F}_{n-k}(a+k, \gamma, x).$$

En appliquant à ces relations le passage à la limite (3), on retrouve des résultats connus ([19]) relatifs aux polynomes de LAGUERRE $L_n^{(\alpha)}(x)$, p. ex. son développement en série de x, l'inversion de celui-ci, formule de multiplication, etc.

([18]) On a l'habitude aussi de désigner ces fonctions confluentes par ${}_1F_1(a, \gamma, x)$. Nous conserverons plutôt les notations d'APPELL. Faisons observer que, dans le cas où les conditions imposées aux paramètres ne sont pas vérifiées (comme pour les polynomes de LAGUERRE, p. ex.), on emploie, au lieu de (4), une représentation par une intégrale curviligne de POCHHAMMER.

([19]) Voir I.

Insérons ici seulement la relation:

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{n}(\lambda-1)^{n-k}\binom{n+\alpha}{n-k}L_k^{(\alpha)}(x). \tag{7}$$

§ 2. - L'équation intégrale générale pour les fonctions hypergéométriques F_A de Lauricella.

Cherchons maintenant une équation intégrale analogue à (8') du Chap. II. Sans nous occuper du polynome de JACOBI $\mathcal{F}_n$, ni de la fonction F à une variable, dont il est un cas particulier, nous porterons notre attention immédiatement sur la fonction hypergéométrique à n variables F_A de LAURICELLA, parce que cette dernière contient tous les cas particuliers importants. Par définition,

$$\begin{aligned}F_A(\alpha;\ \beta_1,\ldots,\beta_n;\ \gamma_1,\ldots,\gamma_n;\ x_1,\ldots,x_n)=\\ =\sum\frac{(\alpha,\ m_1+\ldots+m_n)(\beta_1,\ m_1)\ldots(\beta_n,\ m_n)}{(\gamma_1,\ m_1)\ldots(\gamma_n,\ m_n)\,m_1!\ldots m_n!}\,x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}.\end{aligned} \tag{8}$$

Nous n'avons pas besoin de nous occuper ici des conditions de convergence de cette série multiple, et mentionnons seulement que, dans le domaine de convergence, et sous les conditions imposées aux paramètres qui y figurent, il est légitime d'intégrer cette série terme à terme, après l'avoir multipliée par une fonction intégrable et telle que l'intégrale obtenue ait un sens. Multiplions donc les deux membres de (8) par $x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma-1}$, remplaçons $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ respectivement par $xx_1,\ xx_2,\ldots,\ xx_n$ (où tous les x_k ne sont pas égaux à 1), et intégrons les deux membres par rapport à x de 0 à 1. Il vient alors immédiatement *l'équation intégrale très simple et particulièrement remarquable*:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma-1}F_A(\alpha;\ \beta_1,\ldots,\beta_n;\ \gamma_1,\ldots,\gamma_n;\ xx_1,\ldots,xx_n)dx=\\ =\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}F_A(\gamma;\ \beta_1,\ldots,\beta_n;\ \gamma_1,\ldots,\gamma_n;\ x_1,\ldots,x_n)\end{aligned} \tag{9}$$

avec les conditions $R(\alpha)>R(\gamma)>0$.

§ 3. - Quelques cas particuliers ou limites de (9).

1.° Si $n=1$, on trouve l'équation intégrale, valable sur le plan z, et dans les conditions $z\neq 1$, $|\arg(1-z)|<\pi$,

$$\int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{\alpha-\sigma-1}F(\alpha,\beta,\gamma,xz)dx=\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\alpha-\sigma)}{\Gamma(\alpha)}F(\sigma,\beta,\gamma,z), \tag{10}$$

avec $R(a)>R(\sigma)>0$. C'est un résultat de M. A. ERDÉLYI ([20]). Si l'on y fait encore $a=\gamma$, (10) se réduit, à cause de

$$F(\gamma, \beta, \gamma, xz)=(1-xz)^{-\beta},$$

à la représentation des fonctions F par l'intégrale

$$F(\sigma, \beta, \gamma, x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\gamma-\sigma)}\int_0^1 z^{\sigma-1}(1-z)^{\gamma-\sigma-1}(1-xz)^{-\beta}dz,$$

et vu le rôle symétrique de a et β dans (2), nous constatons que l'expression précédente est équivalente à la formule (2).

2.° Remplaçons dans (9) les β par $\frac{1}{\varepsilon}$, et $x_1, x_2,\ldots, x_n$ par $\varepsilon x_1, \varepsilon x_2,\ldots, \varepsilon x_n$. Si $\varepsilon\to 0$, (9) devient

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{a-\gamma-1}\Psi_2(a;\ \gamma_1,\ldots, \gamma_n;\ xx_1,\ldots, xx_n)dx= \\ =\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(a-\gamma)}{\Gamma(a)}\Psi_2(\gamma;\ \gamma_1,\ldots, \gamma_n;\ x_1,\ldots, x_n) \tag{11}$$

Ψ_2 étant la fonction hypergéométrique confluente à n variables de M. P. HUMBERT, généralisant la fonction $G(a, \gamma, x)$ de KUMMER.

Si

$$a=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+k+\frac{n}{2},$$

$$\gamma=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+l+\frac{n}{2}, \qquad R(k)>R(l)>0, \qquad R(a)>0,$$

$$\gamma_1=2\mu_1+1,\ldots, \quad \gamma_n=2\mu_n+1,$$

$$M_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1,\ldots, x_n)= \\ =x_1^{\mu_1+\frac{1}{2}}\ldots x_n^{\mu_n+\frac{1}{2}}e^{-\frac{x_1+\ldots+x_n}{2}}\Psi_2(\mu_1+\ldots+\mu_n+k+\frac{n}{2};\ 2\mu_1+1,\ldots, 2\mu_n+1;\ x_1,\ldots, x_n)$$

([20]) A. ERDÉLYI, Quarterly Journ. of Math., 8, 200-213, 267-277 (1937). Nous n'avons pas eu l'occasion de consulter ces articles (nous les avons vus cités dans la Note de M. C. S. MEIJER: *Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen.* Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Amsterdam, 42, 355-369 (1939) qui donne à son tour de formules du même genre). M. ERDÉLYI a traité le même problème dans une Note récente (Ibid. 10, 176-189 (1939)), dont nous avons vu un rapport dans les Mathem. Reviews (1, 117 (1940)). Les formules générales (9) et (14) ne sont pas mentionnées dans ces citations ou rapports. Remarquons dès maintenant que les équations (19) et (25′) (que M. ERDÉLYI a publiées ultérieurement aux Notes du Quarterly Journal) se déduisent de (9).

Indiquons aussi que (9) et (14) généralisent encore les intégrales calculées dans le travail de M. A. ERDÉLYI: *Über einige bestimmte Integrale, in denen die Whittakersche $M_{k,m}$-Funktionen auftreten.* Math. Zeit., 40, 693-702 (1936).

est *la fonction de Whittaker* à n variables, on tire de (11) l'équation suivante:

$$(12)\qquad \int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{k+l-1} e^{-(1-x)\frac{x_1+\dots+x_n}{2}} M_{-k,\,\mu_1,\dots,\,\mu_n}(xx_1,\dots,xx_n)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(k-l)}{\left(\mu_1+\dots+\mu_n+l+\frac{n}{2},\,k-l\right)} M_{-l,\,\mu_1,\dots,\,\mu_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

3.° Pour les polynomes $\mathcal{F}_n$ de JACOBI, on a l'équation très simple qui se déduit immédiatement de (5):

$$(13)\qquad \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma-1}\mathcal{F}_n\left(\alpha,\gamma,\frac{x}{\lambda}\right)dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{(\alpha+n,n)}{(\alpha,n)}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n.$$

Avec le passage à la limite (3), (13) devient

$$(13')\qquad \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n.$$

Avant de passer à la déduction des autres relations concernant les polynomes de LAGUERRE ([21]), établissons d'abord une équation intégrale, analogue à (9), pour les fonctions hypergéométriques F_D (généralisant les fonctions F_1 d'APPELL).

§ 4. - Une équation intégrale pour les fonctions hypergéométriques F_D de Lauricella.

Ces fonctions F_D étant définies par

$$F_D(\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n;\gamma;x_1,\dots,x_n) = \sum \frac{(\alpha,m_1+\dots+m_n)(\beta_1,m_1)\dots(\beta_n,m_n)}{(\gamma,m_1+\dots+m_n)\,m_1!\dots m_n!}\,x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n},$$

on en tire immédiatement l'équation

$$(14)\qquad \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\sigma-\gamma-1} F_D(\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n;\gamma;xx_1,\dots,xx_n)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\sigma-\gamma)}{\Gamma(\sigma)} F_D(\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n;\sigma;x_1,\dots,x_n)$$

avec $R(\sigma)>R(\gamma)>0$, tous les x_k n'étant pas égaux à 1.

([21]) On aurait pu encore déduire de (9), dans le cas de $n=2$, une équation pour les polynomes de JACOBI à deux variables $\mathcal{F}_{m,n}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y)$, définis par P. APPELL, et qui se décomposent à la limite au produit de deux polynomes de LAGUERRE. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire ces équations, de même que d'autres cas particuliers de (9) et (14).

1.° Pour $n=1$, l'équation (14) se réduit à la formule de M. ERDÉLYI (analogue à (10), et valable dans les mêmes conditions):

$$(10') \qquad \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\sigma-\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz)dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\sigma-\gamma)}{\Gamma(\sigma)} F(\alpha, \beta, \sigma, z)$$

2.° Si l'on remplace, dans (14), α par $\frac{1}{\varepsilon}$, et les $x_1, \ldots, x_n$, par $\varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon x_n$, si $\varepsilon \to 0$, on aura

$$(15) \qquad \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\sigma-\gamma-1} \Phi_2(\beta_1, \ldots, \beta_n;\ \gamma;\ xx_1, \ldots, xx_n)dx = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\sigma-\gamma)}{\Gamma(\sigma)} \Phi_2(\beta_1, \ldots, \beta_n;\ \sigma;\ x_1, \ldots, x_n)$$

les Φ_2 étant encore des fonctions confluentes de P. HUMBERT.

§ 5. - Équations intégrales contenant les polynomes de Laguerre. Généralisations.

1.° Considérons la formule (9), pour $n=2$; soit $\alpha=\frac{1}{\varepsilon}$, et remplaçons x par εx. Si $\varepsilon \to 0$, on trouve à la limite, l'équation:

$$(16) \qquad \int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-x} G(\beta_1, \gamma_1, xy)\, G(\beta_2, \gamma_2, xz)\, dx = \\ = \Gamma(\gamma) F_2(\gamma;\ \beta_1, \beta_2;\ \gamma_1, \gamma_2;\ y, z). \qquad (R(\gamma)>0).$$

Dans le cas où $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$, (16) devient, en vertu de formules de réduction connues ([22]):

$$(17) \qquad \int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-x} G(\beta, \gamma, xy)\, G(\beta', \gamma, xz)dx = \\ = \Gamma(\gamma)\,(1-y)^{-\beta}(1-z)^{-\beta'} F\left(\beta, \beta', \gamma, \frac{yz}{(1-y)(1-z)}\right).$$

Si les β sont des entiers négatifs, ces formules se réduisent, par (3′), à ([23])

$$(16') \qquad \int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-x} L_m^{(\gamma_1-1)}(xy)\, L_n^{(\gamma_2-1)}(xz)dx = \\ = \frac{(\gamma_1, m)(\gamma_2, n)}{m!\ n!} \Gamma(\gamma) F_2(\gamma;\ -m, -n;\ \gamma_1, \gamma_2;\ y, z),$$

([22]) P. APPELL, loc. cit. p. 24, équation (28), et p. 35, équation (10).

([23]) L'équation (16′) est un cas particulier de l'intégrale calculée au § 3 du travail de M. ERDÉLYI, cité tout à l'heure, Math. Zeits, 40.

et (avec $\gamma=\gamma_1=\gamma_2=\alpha+1$)

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_m^{(\alpha)}(xy)\, L_n^{(\alpha)}(xz)dx=$$

$$=\frac{(\alpha+1,\, m)\,(\alpha+1,\, n)}{m!\; n!}\Gamma(\alpha+1)\,(1-y)^m(1-z)^n F\left(-m,\ -n,\ \alpha+1,\ \frac{yz}{(1-y)\,(1-z)}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{m!\; n!}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\frac{r!}{\Gamma(r+\alpha+1)}\binom{m}{r}\binom{n}{r}y^r z^r(1-y)^{m-r}(1-z)^{n-r}.$$

On en déduit immédiatement la propriété d'orthogonalité des polynomes de Laguerre: si $m\neq n$, le second membre est nul pour $y=z=1$. Si $y=z=1$, et $m=n$, sa valeur est $\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

2.° La formule (14) donne, pour $n=2$, et $\beta_1=\beta_2=\dfrac{1}{\varepsilon}$, remplaçant x_1 et x_2 par εx_1 et εx_2 (avec $x_1+x_2=y$), et $\varepsilon\to 0$, le résultat de M. ERDÉLYI:

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\sigma-\gamma-1}\, G(\alpha,\ \gamma,\ xy)dx=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\sigma-\gamma)}{\Gamma(\sigma)}\, G(\alpha,\ \sigma,\ y)$$

avec $R(\sigma)>R(\gamma)>0$.

3.° Dans le cas de $n=2$ encore, si l'on fait dans (9), $\alpha=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\beta_1=\dfrac{1}{\varepsilon}$, et remplaçant x par εx, x_1 par $-\varepsilon x_1$, si l'on fait tendre ε vers 0, on trouve l'équation

$$(18)\quad \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} J(\gamma_1,\ -xx_1)\, G(\beta_2,\ \gamma_2,\ xx_2)dx=\Gamma(\gamma)\,\Psi_1(\gamma;\ \beta_2;\ \gamma_1,\ \gamma_2;\ -x_1,\ x_2),$$

où la fonction $J(\gamma_1,\ -xx_1)$ est liée à la fonction usuelle de BESSEL par la relation

$$J(\gamma_1,\ -xx_1)=\Gamma(\gamma_1)\,(xx_1)^{-\frac{\gamma_1-1}{2}}J_{\gamma_1-1}(2\sqrt{xx_1}),$$

et Ψ_1 désigne une des fonctions hypergéométriques confluentes de P. HUMBERT. Cette formule (18) généralise une équation intégrale concernant les polynomes de LAGUERRE qui est du même genre que l'équation (1') du chap. I. Soit en effet dans (18).

$$\gamma=\gamma_1=\gamma_2=\alpha+1;\qquad x_1=y,\quad x_2=\frac{1}{\lambda};\qquad \beta_2=-n.$$

En tenant compte des formules de réduction citées sous ([22]), et de

$$G(\beta,\ \gamma,\ x)=e^x\, G(\gamma-\beta,\ \gamma,\ -x).$$

(3') permet de retrouver la relation ([24])

$$(19) \qquad \int_0^\infty x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-x} J_\alpha(2\sqrt{xy})\, L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{1-\lambda}\right).$$

4.° Il est possible de généraliser ce résultat, pour $n=3$, et en général, pour un nombre quelconque de variables. On obtiendra ainsi une formule analogue à (18), qui est d'ailleurs une forme limite de (16). Nous ne nous occuperons ici que du cas $n=3$, pour trouver la généralisation de (19), et pour en déduire une équation fonctionnelle très intéressante concernant les polynomes de LAGUERRE.

Avec des passages à la limite analogues à ceux de 3.°, et avec les mêmes notations, on déduira de (9) l'équation suivante:

$$(20) \qquad \int_0^\infty x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-x} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})\, L_m^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) L_n^{(\beta)}\left(\frac{x}{\mu}\right) dx =$$

$$= \frac{(\alpha+1, m)\,(\beta+1, n)}{m!\, n!}\, y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, \Psi_1\left(\alpha+\beta+1;\, -m,\, -n;\, \alpha+\beta+1,\, \alpha+1,\, \beta+1;\, -y,\, \frac{1}{\lambda},\, \frac{1}{\mu}\right).$$

On voit que (20) est une extension immédiate de (19), avec le second membre analogue à celui de (18). Il est alors indiqué de chercher à transformer ce second membre à une forme semblable au second membre de (19).

Écrivons, pour cela, l'équation analogue à (18):

$$(21) \quad J = \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} J(\gamma_1,\, -xx_1)\, G(\beta_2,\, \gamma_2,\, xx_2)\, G(\beta_3,\, \gamma_3,\, xx_3) dx =$$
$$= \Gamma(\gamma)\, \Psi_1(\gamma;\, \beta_2,\, \beta_3;\, \gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3;\, -x_1,\, x_2,\, x_3),$$

et supposons que $\gamma=\gamma_1=\gamma_2+\gamma_3-1$. Le second membre de (21) peut alors se mettre sous la forme suivante:

$$\Gamma(\gamma_2+\gamma_3-1) \sum_{k=0}^\infty F_2(\gamma_2+\gamma_3-1+k;\, \beta_2,\, \beta_3;\, \gamma_2,\, \gamma_3;\, x_2,\, x_3)\, \frac{(-x_1)^k}{k!}.$$

Utilisons maintenant la représentation bien connue des fonctions F_2 par une intégrale double, qui donne ici

$$(22) \qquad \Gamma(\gamma_2+\gamma_3-1) \sum_{k=0}^\infty F_2(\gamma_2+\gamma_3-1+k;\, \beta_2,\, \beta_3;\, \gamma_2,\, \gamma_3;\, x_2,\, x_3)\, \frac{(-x_1)^k}{k!}$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma_2+\gamma_3-1)\, \Gamma(\gamma_2)\, \Gamma(\gamma_3)}{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3)\Gamma(\gamma_2-\beta_2)\Gamma(\gamma_3-\beta_3)}$$
$$\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta_2-1} v^{\beta_3-1} (1-u)^{\gamma_2-\beta_2-1} (1-v)^{\gamma_3-\beta_3-1} (1-ux_2-vx_3)^{-\gamma_2-\gamma_3-1}\, e^{-\frac{x_1}{1-ux_2-vx_3}}\, du dv$$

formule variable pour $R(\gamma_2)>R(\beta_2)>0$, $R(\gamma_3)>R(\beta_3)>0$, $R(\gamma_2+\gamma_3)>1$.

([24]) Voir I. Bibliographie.

Posons ici

$$(23) \qquad a=\frac{1}{1-x_2-x_3}, \qquad b=\frac{x_2}{x_2+x_3-1}, \qquad c=\frac{x_3}{x_2+x_3-1}, \qquad (a+b+c=1)$$

et effectuons, dans l'intégrale double, les changements de variable:

$$u=\frac{as}{1-bs-ct}, \qquad v=\frac{at}{1-bs-ct}.$$

L'intégrale J de (21) devient ainsi, en vertu de (22), et avec les abbréviations (23):

$$(24) \qquad J=\frac{\Gamma(\gamma_2+\gamma_3-1)\,\Gamma(\gamma_2)\,\Gamma(\gamma_3)}{\Gamma(\beta_2)\,\Gamma(\beta_3)\,\Gamma(\gamma_2-\beta_2)\,\Gamma(\gamma_3-\beta_3)}\,a^{\beta_2+\beta_3}\times$$
$$\times\int_0^1\!\!\int_0^1 s^{\beta_2-1}\,t^{\beta_3-1}\,[(1-c)(1-s)+c(1-t)]^{\gamma_2-\beta_2-1}[b(1-s)+$$
$$+(1-b)(1-t)]^{\gamma_3-\beta_3-1}\,e^{-x_1(1-bs-ct)}\,ds\,dt.$$

Avant de passer plus loin, indiquons immédiatement une conséquence importante de cette relation. Si l'on y fait $b=c=1$ (c'est-à-dire $a=-1$, $x_2=x_3=1$), l'intégrale double (24) se décompose au produit de deux intégrales simples. En se rappelant la représentation des fonctions de KUMMER par une intégrale (4) (sous les conditions imposées aux paramètres), on aura:

$$J=\frac{\Gamma(\gamma_2+\gamma_3-1)\,\Gamma(\gamma_2)\,\Gamma(\gamma_3)}{\Gamma(\gamma_2-\beta_2+\beta_3)\,\Gamma(\gamma_3+\beta_2-\beta_3)}\,(-1)^{\beta_2+\beta_3}\,G(\beta_2,\,\gamma_3+\beta_2-\beta_3,\,x_1)\,G(\beta_3,\,\gamma_2-\beta_2+\beta_3,\,x_1).$$

L'équation (21) devient dans ce cas, avec quelques changements de notation,

$$(25) \qquad \int_0^\infty x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,e^{-x}\,J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})\,G(\gamma,\,\alpha+1,\,x)\,G(\delta,\,\beta+1,\,x)\,dx$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)\,(-1)^{\gamma+\delta}}{\Gamma(\alpha+1-\gamma+\delta)\,\Gamma(\beta+1+\gamma-\delta)}\,y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,e^{-y}\,G(\gamma,\,\beta+1+\gamma-\delta,\,y)\,G(\delta,\,\alpha+1-\gamma+\delta,\,y)$$

$$[R(\alpha-\gamma+\delta)>-1,\quad R(\beta+\gamma-\delta)>-1,\quad R(\alpha)>-1,\quad R(\beta)>-1,\quad R(\alpha+\beta)>-1]$$

fournissant ainsi la généralisation d'une équation intégrale de M. A. ERDÉLYI ([25]), relative au cas particulier des polynomes de LAGUERRE, obtenu par (3'), et posant $\gamma=-m$, $\delta=-n$. Cette formule est donc la suivante:

$$(25') \qquad \int_0^\infty x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,e^{-x}\,J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})\,L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\beta)}(x)\,dx=$$
$$=(-1)^{m+n}\,y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,e^{-y}\,L_m^{(\beta-m+n)}(y)\,L_n^{(\alpha+m-n)}(y),$$

avec la condition $R(\alpha+\beta)>-1$.

([25]) A. ERDÉLYI: *The Hankel-Transform of Products of Whittaker's functions.* Journal of the London Math. Soc. 13, 146-154, 1938. Voir encore I.

Pour ce qui est des conditions de validité de (25), nous avons dû, pour la légitimité des calculs, faire certaines restrictions sur les paramètres qui figurent dans (21). Il est évident que le résultat obtenu est indépendant de la plupart de ces conditions, et il ne faut conserver que celles d'entre elles qui sont nécessaires pour que (25) ait un sens. D'ailleurs, on aurait pu se passer des restrictions telles que p. ex. $R(\beta_2)>0$, $R(\beta_3)>0$, dans la déduction de (24), par prolongement analytique, et en utilisant au lieu de (22), des intégrales curvilignes de POCHAMMER. D'autre part, il était aussi possible de retrouver les résultats précédents par réarrangements des séries multiples convergentes qui y figurent, n'ayant ainsi besoin que de faire des restrictions telles que les arguments des fonctions Γ intervenant (ou leur partie réelle au moins), soient positifs.

Retournons maintenant sur (24). Si b et c sont différents de 1, l'intégrale double ne peut pas se réduire au produit d'intégrales simples (sauf si $\gamma_2=\beta_2+1$ et $\gamma_3=\beta_3+1$, cas que nous écarterons ici). Développons alors les expressions entre crochets dans l'intégrale double du second membre, et effectuons ensuite l'intégration. Il vient la formule généralisant (25):

$$(26)\qquad \int_0^\infty x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-x} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})\, G\left(\gamma,\, \alpha+1, \frac{x}{\lambda}\right) G\left(\delta,\, \beta+1, \frac{x}{\mu}\right) dx$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)(-1)^{\gamma+\delta}}{(\lambda+\mu-\lambda\mu)^{\alpha+\beta}}\, y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-y} \sum_i \sum_k \frac{(\alpha-\gamma-i+1,k)\,(\beta-\delta-k+1,i)}{\Gamma(\alpha-i+k+1)\Gamma(\beta+i-k+1)\, i!\, k!}\, \lambda^{\beta+\gamma+i-k}\, \mu^{\alpha+\delta-i+k} \times$$

$$\times (1-\lambda)^{\alpha-\gamma-i} (1-\mu)^{\beta-\delta-k}\, G\left(\gamma,\, \alpha-i+k+1, \frac{\mu y}{\lambda+\mu-\lambda\mu}\right) G\left(\delta,\, \beta+i-k+1, \frac{\lambda y}{\lambda+\mu-\lambda\mu}\right)$$

les paramètres α, β, γ et δ étant assujettis à des conditions telles que les arguments des fonctions Γ qui figurent dans cette équation, soient positifs, et $R(\alpha+\beta)>-1$.

En considérant ici le cas où γ et δ sont des entiers négatifs $-m$, et $-n$, nous aurons, en vertu de (3′), l'équation cherchée:

$$(20')\qquad \int_0^\infty x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-x} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})\, L_m^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) L_n^{(\beta)}\left(\frac{x}{\mu}\right) dx=$$

$$=(-1)^{m+n}(\lambda+\mu-\lambda\mu)^{-(\alpha+\beta)} y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-y} \sum_i \sum_k \binom{m+\alpha}{i}\binom{n+\beta}{k} \lambda^{\beta+i-k-m}\, \mu^{\alpha-i+k-n} \times$$

$$\times (1-\lambda)^{\alpha+m-i} (1-\mu)^{\beta+n-k}\, L_m^{(\alpha-i+k)}\left(\frac{\mu y}{\lambda+\mu-\lambda\mu}\right) L_n^{(\beta+i-k)}\left(\frac{\lambda y}{\lambda+\mu-\lambda\mu}\right)$$

avec $R(\alpha+\beta)>-1$, λ et μ n'étant pas nuls tous les deux. On en déduira immédiatement l'équation (25′) de M. ERDÉLYI.

On peut encore considérer des cas particuliers de (20′); p. ex. pour $\lambda=1$, $\mu\neq 1$, ou $\lambda=0$, $\mu\neq 0$.

Indiquons, pour terminer, une autre expression de l'intégrale (20). En tenant compte de (7) et de (25'), il vient la formule

$$(27)\qquad \int_0^\infty x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-x} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})\, L_m^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) L_n^{(\beta)}\left(\frac{x}{\mu}\right) dx =$$

$$= y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-y} \lambda^{-m}\mu^{-n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k}(\lambda-1)^{m-i}(\mu-1)^{n-k} \binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-k} L_i^{(\beta-i+k)}(y)\, L_k^{(\alpha+i-k)}(y).$$

Si $\lambda=\mu=0$, la relation (20) se réduit à la représentation bien connue des polynomes de LAGUERRE par une intégrale définie (formule de LE ROY, obtenue de (19) en passant à la limite $\lambda \to 0$). Dans ce même cas $\lambda=\mu=0$, on tire de (27)

$$\binom{m+n}{m} L_{m+n}^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-k} L_i^{(\beta-i+k)}(y)\, L_k^{(\alpha+i-k)}(y).$$

Si $n=0$ (et ainsi $k=0$), cette relation se réduit à une formule connue (voir loc. cit. sous ([1]):

$$L_m^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+\alpha}{m-i} L_i^{(\beta-i)}(y),$$

ce qui permet d'exprimer la somme double précédente par une somme simple, et dont la vérification directe ne peut pas offrir de difficultés.