ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALDO GHIZZETTI

Sui coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione limitata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 215-223

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_215_0>

SUI COEFFICIENTI DI EULERO-FOURIER DI UNA FUNZIONE LIMITATA (*)

di ALDO GHIZZETTI (Torino).

Sia $f(t)$ una funzione integrabile nell'intervallo $(0, 2\pi)$ ed

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$(1) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\, ntdt$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

i suoi coefficienti di EULERO-FOURIER. Supponiamo che la funzione $f(t)$ sia *limitata* e precisamente che soddisfi alla

$$(2) \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \quad (^1).$$

In queste condizioni si possono dimostrare delle notevoli disuguaglianze relative ai coefficienti (1), le quali fissano il massimo e il minimo valore possibili per un generico coefficiente a_n o b_n in funzione dei coefficienti precedenti. Ritenendo che tali disuguaglianze non siano ancora state osservate, mi propongo in questa Nota di iniziare l'argomento indicando quelle relative ai casi $n = 1$,

---

(*) In relazione all'argomento qui trattato, segnaliamo il lavoro di C. CARATHÉODORY ed L. FEJÉR: *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonisehen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landau'schen Satz.* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, tomo 32, 1911, pp. 218-239) ove viene dato (p. 225) un teorema sul massimo e il minimo di una funzione continua in $(0, 2\pi)$ della quale sono noti i primi $2n+1$ coefficienti di EULERO-FOURIER.

(1) Se fosse invece

$$(2') \qquad m \leqslant f(t) \leqslant M$$

basterebbe sostituire alla $f(t)$ la $\dfrac{f(t)-m}{M-m}$ per ridurci alla (2). Per passare dalle formule relative alla ipotesi (2) a quelle relative all'ipotesi (2') basta cambiare a_0 in $\dfrac{a_0 - m}{M-m}$ ed a_n, b_n in $\dfrac{a_n}{M-m}$, $\dfrac{b_n}{M-m}$.

$n=2$, le quali si possono riassumere nelle due formule seguenti

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 \tag{3}$$

$$\sqrt{a_2^2+b_2^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2}(a_1^2+b_1^2) \operatorname{tg} \frac{\pi a_0}{2}. \tag{4}$$

La (3) sarà dimostrata come caso particolare della

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0, \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{3'}$$

a proposito della quale non deve stupire il fatto che il secondo membro non dipende da n perchè, *per ogni valore di n,* esistono delle $f(t)$ per cui vale il segno di uguaglianza.

Il metodo usato per stabilire le (3), (4) vale però in generale e può servire anche per altri sistemi di funzioni ortogonali; di tutto ciò mi occuperò in lavori successivi.

1. - Nelle condizioni suddette si ha per il coefficiente a_0 la limitazione ovvia

$$0 \leqslant a_0 \leqslant 1. \tag{4}$$

Fissato a_0 soddisfacente a quest'ultima, vediamo quali siano il massimo e il minimo valore possibili per il coefficiente a_n. Dico che *si ha*

$$\boxed{-\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0}, \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{5}$$

ciascuno dei segni di uguaglianza potendo effettivamente sussistere, per ogni valore di n, solo per certe determinate forme della f(t).

Fissato $n \geqslant 1$, consideriamo infatti la funzione $\varphi_n(t;\ a_0)$ così definita

$$\varphi_n(t;\ a_0) = \begin{cases} 1 & \text{ove} \quad \cos nt + \cos \pi a_0 < 0 \\ 0 & \text{ove} \quad \cos nt + \cos \pi a_0 > 0 \end{cases}$$

ed osserviamo subito che, in virtù della (2), si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_n(t;\ a_0) - f(t)] (\cos nt + \cos \pi a_0)\, dt \leqslant 0. \tag{6}$$

Inoltre si trova immediatamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t;\ a_0)\, dt = a_0, \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t;\ a_0) \cos nt\, dt = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0.$$

Tenuto conto di ciò e delle (1), la (6) si riduce subito alla

$$-\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0 - a_n \leqslant 0$$

ossia alla prima delle disuguaglianze (5).

Dal ragionamento fatto risulta poi che *l'uguaglianza* $a_n = -\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0$ *può sussistere solo se vale il segno di uguaglianza nella* (6), *e questo può evidentemente accadere solo se in quasi-tutto l'intervallo* $(0, 2\pi)$ *si ha* $f(t) = \varphi_n(t;\, a_0)$.

L'altra disuguaglianza (5) risulta poi subito applicando quella già dimostrata alla funzione $f^*(t) = 1 - f(t)$ per la quale $a_0^* = 1 - a_0$, $a_n^* = -a_n$; infatti la $-\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0^* \leqslant a_n^*$ diventa $-\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi(1-a_0) \leqslant -a_n$ *ossia proprio* $a_n \leqslant \frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0$, *potendo valere l'uguaglianza solo se* $f^*(t) = \varphi_n(t;\, 1-a_0)$ *ossia se* $f(t) = 1 - \varphi_n(t;\, 1-a_0) = \varphi_n\left(t + \frac{\pi}{n};\, a_0\right)$ *in quasi-tutto l'intervallo* $(0, 2\pi)$ (2).

Per i coefficienti b_n *vale pure la limitazione*

$$(5') \qquad \boxed{-\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0 \leqslant b_n \leqslant \frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0}\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots.)\,;$$

basta applicare la (5) alla funzione $\bar{f}(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)$ (3) per la quale $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_n = b_n$, $\bar{b}_n = -a_n$. E si vede subito che *i due segni di uguaglianza valgono rispettivamente per* $f(t) = \varphi_n\left(t - \frac{\pi}{2n};\, a_0\right)$ *e per* $f(t) = \varphi_n\left(t + \frac{\pi}{2n};\, a_0\right)$.

Anzi la (5) ha un significato più generale: essa costituisce una limitazione per l'ampiezza $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ dell'n-esima armonica della $f(t)$. Infatti, applicando la (5) alla funzione $f(t+k)$ si ha che, *qualunque sia* k, deve essere

$$-\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0 \leqslant a_n \cos nk + b_n\,\text{sen}\,nk \leqslant \frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0\,;$$

ne segue facilmente

$$\boxed{r_n \leqslant \frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\pi a_0}\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots.)$$

cioè proprio la (3'). *In quest'ultima il segno di uguaglianza vale solo se* $f(t)$ *coincide con una qualunque delle funzioni* $\varphi_n(t+k;\, a_0)$.

---

(2) D'ora innanzi quando diremo $f(t) = \varphi(t)$ sarà sempre sottintesa la frase « in quasi-tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ ».

(3) È sottinteso che pensiamo la $f(t)$ come elemento di una funzione periodica con periodo 2π.

2. - Il problema del n.° 1 si può generalizzare proponendoci la determinazione del massimo e del minimo del coefficiente a_n della $f(t)$ (soddisfacente alla (2)) quando già si conoscono tutti i coefficienti precedenti a_0, a_1, $b_1, \ldots$, a_{n-1}, b_{n-1} (e non soltanto a_0 come nel caso già trattato).

Per risolverlo si può seguire una via analoga a quella tenuta al n.° 1. Consideriamo una successione di $2n$ punti $t_0, t_1, \ldots, t_{2n-1}$ tali da aversi

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{2n-1} \leqslant t_0 + 2\pi$$

$$t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_{2n-1} = 0\,; \tag{7}$$

in virtù di quest'ultima condizione esiste un polinomio trigonometrico di ordine n del tipo

$$Q(t) = \sum_{r=0}^{n-1} (p_r \cos rt + q_r \operatorname{sen} rt) + \cos nt$$

avente per radici $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2n-1}$.

Consideriamo ora la funzione $\varphi(t)$ che vale 1 ove $Q(t) < 0$ e vale 0 ove $Q(t) > 0$. Sarà ([4])

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)]\, Q(t)\, dt \leqslant 0$$

ossia

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)] \cos nt dt + \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1} \left\{ p_r \int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)] \cos rt dt + \right.$$
$$\left. + q_r \int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)] \operatorname{sen} rt dt \right\} \leqslant 0. \tag{8}$$

Finora ai punti $t_0, t_1, \ldots, t_{2n-1}$ abbiamo imposto una sola condizione (la (7)); restano quindi $2n-1$ arbitrarietà e sarà generalmente possibile (salvo accurato esame della cosa) approfittarne per far sì che la funzione $\varphi(t)$ abbia i suoi primi $2n-1$ coefficienti di EULERO-FOURIER $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ rispettivamente uguali ai coefficienti $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}$ della data $f(t)$.

Allora nella (8) tutti i termini della Σ risultano nulli, ed essa diventa

$$\alpha_n - a_n \leqslant 0\,,$$

mostrando che il minimo valore possibile per il coefficiente a_n è dato da α_n e che tale minimo si raggiunge solo per $f(t) = \varphi(t)$.

([4]) Per comodità, approfittando dell'osservazione fatta in nota ([3]), ci riferiremo d'ora in poi ad un intervallo $(t_0, t_0 + 2\pi)$, anzichè all'intervallo $(0, 2\pi)$.

Con considerazioni analoghe a quelle del n.° 1 si studiano poi il massimo di a_n, il minimo e il massimo di b_n, nonchè il massimo di $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

L'unica difficoltà sono i dettagli di calcolo nella determinazione della $\varphi(t)$; mi limiterò per ora a svilupparli nel caso $n=2$.

3. - Per studiare il caso $n=2$ occorrerà determinare quattro numeri

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_0 + 2\pi \tag{9}$$

soggetti alla condizione

$$t_3 + t_2 + t_1 + t_0 = 0$$

in modo tale che i coefficienti α_0, α_1, β_1 della funzione

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{in} \quad (t_0, t_1) \\ 0 & \text{in} \quad (t_1, t_2) \\ 1 & \text{in} \quad (t_2, t_3) \\ 0 & \text{in} \quad (t_3, t_0 + 2\pi) \end{cases}$$

risultino rispettivamente uguali ai coefficienti a_0, a_1, b_1 della $f(t)$. Si trova così il sistema

$$\begin{cases} t_3 + t_2 + t_1 + t_0 = 0 \\ t_3 - t_2 + t_1 - t_0 = 2\pi a_0 \\ \operatorname{sen} t_3 - \operatorname{sen} t_2 + \operatorname{sen} t_1 - \operatorname{sen} t_0 = \pi a_1 \\ \cos t_3 - \cos t_2 + \cos t_1 - \cos t_0 = -\pi b_1 \end{cases} \tag{10}$$

ove a_0, a_1, b_1 sono numeri noti soddisfacenti (n.° 1) alle

$$\begin{cases} 0 < a_0 < 1 \quad (^5) \\ a_1^2 + b_1^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2} \operatorname{sen}^2 \pi a_0 . \end{cases} \tag{11}$$

Il sistema (10) si risolve elementarmente, e si trova

$$t_0 = -\frac{\pi a_0}{2} - \mu, \quad t_1 = \frac{\pi a_0}{2} - \lambda, \quad t_2 = -\frac{\pi a_0}{2} + \mu, \quad t_3 = \frac{\pi a_0}{2} + \lambda \tag{12}$$

---

(5) Escludiamo i casi $a_0 = 0$, $a_0 = 1$, in cui tutti i coefficienti a_n, b_n (con $n > 0$) sono nulli. In tali casi i calcoli che seguono presentano delle impossibilità o delle indeterminazioni; delle ovvie modificazioni portano a confermare che $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$.

ove λ, μ sono determinati dalle [6]

$$\text{(13)} \qquad \cos\lambda = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a_1}{\operatorname{sen}\frac{\pi a_0}{2}} - \frac{b_1}{\cos\frac{\pi a_0}{2}}\right), \qquad \cos\mu = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a_1}{\operatorname{sen}\frac{\pi a_0}{2}} + \frac{b_1}{\cos\frac{\pi a_0}{2}}\right)$$

$$\text{(13')} \qquad 0 \leq \lambda \leq \pi, \qquad 0 \leq \mu \leq \pi.$$

Costruiamo ora il polinomio trigonometrico

$$Q(t) = p_0 + p_1 \cos t + q_1 \operatorname{sen} t + \cos 2t$$

che ha le radici (12). Lo si ottiene subito osservando che i numeri (12) sono radici di

$$\text{(14)} \qquad \left[\cos\left(t - \frac{\pi a_0}{2}\right) - \cos\lambda\right]\left[\cos\left(t + \frac{\pi a_0}{2}\right) - \cos\mu\right] = 0$$

e questa, sviluppata e moltiplicata per 2, porge, tenendo conto delle (13)

$$\text{(14')} \qquad Q(t) = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{a_1^2}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi a_0}{2}} - \frac{b_1^2}{\cos^2\frac{\pi a_0}{2}}\right) + \cos\pi a_0 -$$

$$-\pi a_1 \operatorname{cotg}\frac{\pi a_0}{2}\cdot\cos t - \pi b_1 \operatorname{tg}\frac{\pi a_0}{2}\cdot\operatorname{sen} t + \cos 2t,$$

ed è facile controllare che questo polinomio $Q(t)$ è effettivamente negativo ove

---

[6] I numeri λ, μ esistono certamente perchè

$$\left|\frac{\pi}{4}\left(\frac{a_1}{\operatorname{sen}\frac{\pi a_0}{2}} \mp \frac{b_1}{\cos\frac{\pi a_0}{2}}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\operatorname{sen}\pi a_0} \leq 1$$

in virtù di (11).

Occorre inoltre controllare che i numeri (12) soddisfano effettivamente alle limitazioni (9). Si vede subito che queste equivalgono alle

$$(*) \qquad -\pi a_0 \leq \lambda - \mu \leq \pi a_0, \qquad \pi a_0 \leq \lambda + \mu \leq 2\pi - \pi a_0$$

le quali sono certe verificate perchè dalle (13) segue

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{4}{\pi^2}(\cos^2\lambda - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\pi a_0 + \cos^2\mu)$$

e quindi per (11)

$$\cos^2\lambda - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\pi a_0 + \cos^2\mu - \operatorname{sen}^2\pi a_0 \leq 0$$

ossia

$$[\cos(\lambda+\mu) - \cos\pi a_0][\cos(\lambda-\mu) - \cos\pi a_0] \leq 0\,;$$

quest'ultima, unitamente alle (13'), garantisce precisamente le (*).

$\varphi(t)=1$ (cioè in (t_0, t_1) e in (t_2, t_3)) e positivo ove $\varphi(t)=0$ (ossia in (t_1, t_2) e in $(t_3, t_0+2\pi)$) (7).

Allora, per quanto si è detto al n.° 2, si avrà

$$\alpha_2 \leqslant a_2$$

ove α_2 denota il terzo coefficiente della funzione $\varphi(t)$ dianzi costruita (8):

$$\alpha_2 = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t) \cos 2t dt = \frac{1}{2\pi} (\text{sen } 2t_3 - \text{sen } 2t_2 + \text{sen } 2t_1 - \text{sen } 2t_0) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{sen } \pi a_0 (\cos 2\lambda + \cos 2\mu) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \text{ sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \text{ cotg } \pi a_0 .$$

Applicando poi per il risultato trovato alla funzione $f^*(t) = 1 - f(t)$ (cfr. n.° 1) e riunendolo al precedente *si ha finalmente*:

$$(15) \qquad \boxed{\begin{gathered} -\frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \text{ sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \text{ cotg } \pi a_0 \leqslant \\ \leqslant a_2 \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \text{ sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \text{ cotg } \pi a_0 \end{gathered}}$$

il segno di uguaglianza a sinistra potendo valere solo per $f(t) = \varphi(t; a_0, a_1, b_1)$ *e quello di destra solo per* $f(t) = 1 - \varphi(t; 1-a_0, -a_1, -b_1) = \varphi\left(t - \frac{\pi}{2}; a_0, b_1, -a_1\right)$.

Applicando poi le (15) alla $\bar{f}(t) = f\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ *si deduce*

$$(15') \qquad \boxed{\begin{gathered} -\frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \text{ sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} 2a_1 b_1 \text{ cotg } \pi a_0 \leqslant \\ \leqslant b_2 \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \text{ sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} 2a_1 b_1 \text{ cotg } \pi a_0 \end{gathered}}$$

---

(7) Basta far vedere che $Q(t)$ è non crescente nel punto t_0, non decrescente nel punto t_1, ecc. ossia che $Q'(t_0) \leqslant 0$, $Q'(t_1) \geqslant 0, \ldots$. E ciò segue subito assumendo per $\frac{1}{2} Q(t)$ l'espressione (14); si ha per esempio

$$\frac{1}{2} Q'(t_0) = \frac{1}{2} Q'\left(-\frac{\pi a_0}{2} - \mu\right) = 2 \text{ sen } \mu \text{ sen } \frac{\lambda + \mu + \pi a_0}{2} \text{ sen } \frac{\lambda - \mu - \pi a_0}{2}$$

e, ricordando le (13') e la (*) di nota (6), si vede subito che l'ultimo membro è non positivo.

(8) Questa funzione $\varphi(t)$ sarà indicata nel seguito con $\varphi(t; a_0, a_1, b_1)$ per mettere in evidenza la sua dipendenza dai parametri a_0, a_1, b_1.

i segni di uguaglianza valendo rispettivamente per $f(t)=\varphi\left(t-\frac{\pi}{4};\ a_0,\ \frac{a_1+b_1}{\sqrt{2}},\ -\frac{a_1-b_1}{\sqrt{2}}\right)$ *e per* $f(t)=\varphi\left(t+\frac{\pi}{4};\ a_0,\ \frac{a_1-b_1}{\sqrt{2}},\ \frac{a_1+b_1}{\sqrt{2}}\right)$.

Più generalmente, ragionando sulla $f(t+k)$, si deduce che, qualunque sia k, vale la

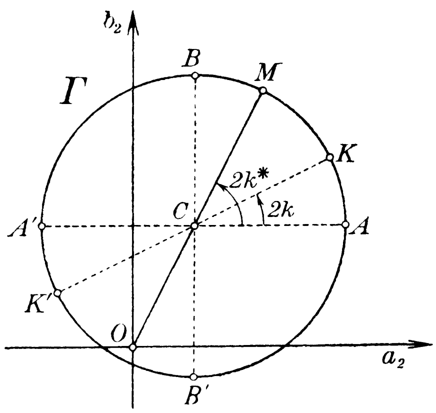
$$-\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0+\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a_0}(a_1^2+b_1^2)+\frac{\pi}{2}[(a_1^2-b_1^2)\cos 2k+2a_1b_1\,\mathrm{sen}\,2k]\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0\leqslant$$
$$\leqslant a_2\cos 2k+b_2\,\mathrm{sen}\,2k\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0-\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a_0}(a_1^2+b_1^2)+\frac{\pi}{2}[(a_1^2-b_1^2)\cos 2k+2a_1b_1\,\mathrm{sen}\,2k]\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0$$

che si può anche scrivere

$$-\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0+\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a_0}(a_1^2+b_1^2)\leqslant$$
$$\leqslant\left[a_2-\frac{\pi}{2}(a_1^2-b_1^2)\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0\right]\cos 2k+\left[b_2-\frac{\pi}{2}\,2a_1b_1\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0\right]\mathrm{sen}\,2k\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0-\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a_0}(a_1^2+b_1^2).$$

Dovendo quest'ultima valere qualunque sia k, si deduce

$$\boxed{\begin{gathered}\left[a_2-\frac{\pi}{2}(a_1^2-b_1^2)\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0\right]^2+\left[b_2-\frac{\pi}{2}2a_1b_1\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0\right]^2\leqslant\\ \leqslant\left[\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0-\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a_0}(a_1^2+b_1^2)\right]^2\end{gathered}}\tag{16}$$



Usando un piano cartesiano $(a_2,\ b_2)$, si ha dunque che, *una volta fissati* $a_0,\ a_1,\ b_1$, *il punto* $P(a_2,\ b_2)$ *non può essere esterno al cerchio* Γ *avente il centro nel punto*

$$C\left[\alpha=\frac{\pi}{2}(a_1^2-b_1^2)\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0,\quad \beta=\frac{\pi}{2}\,2a_1b_1\,\mathrm{cotg}\,\pi a_0\right]$$

e raggio

$$R=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0-\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a_0}(a_1^2+b_1^2)\quad [9].$$

---

[9] Tenendo conto di (11), si vede che $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leqslant R\leqslant\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; il cerchio Γ non lascia quindi fuori l'origine O, mentre non esce dal cerchio col centro nell'origine e raggio $\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi a_0$ dentro il quale deve pur cadere il punto $P(a_2,\ b_2)$, in base al risultato del n.° 1.

Il punto P cade sul contorno di Γ solo se $f(t)$ coincide con una funzione $\varphi(t-k;\ a_0,\ a_1 \cos k+b_1 \operatorname{sen} k,\ -a_1 \operatorname{sen} k+b_1 \cos k)$ *oppure* $\varphi(t-k-\frac{\pi}{2};\ a_0,\ -a_1 \operatorname{sen} k+b_1 \cos k,\ -a_1 \cos k-b_1 \operatorname{sen} k)$ i cui coefficienti di EULERO-FOURIER valgono rispettivamente

$$a_0,\ a_1,\ b_1,\quad \alpha-R \cos 2k,\quad \beta-R \operatorname{sen} 2k, \ldots$$
$$a_0,\ a_1,\ b_1,\quad \alpha+R \cos 2k,\quad \beta+R \operatorname{sen} 2k, \ldots;$$

in tal caso il punto P si porta in K' oppure in K, estremi del diametro di Γ che forma l'angolo $2k$ coll'asse a_2 (10).

Appare quindi evidente che *il massimo dell'ampiezza $r_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ della seconda armonica è data*

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+R=\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0-\frac{\pi}{2}(a_1^2+b_1^2) \operatorname{tg} \frac{\pi a_0}{2}$$

in corrispondenza all'estremo M di quel diametro di Γ che passa per l'origine.

Si ha cioè

$$r_2 \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0-\frac{\pi}{2} r_1^2 \operatorname{tg} \frac{\pi a_0}{2} \tag{17}$$

vale a dire la (4), *il segno $=$ potendo sussistere solo per $P \equiv M$ ossia* (introducendo l'angolo $2k^*$ per cui $\cos 2k^*=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\operatorname{sen} 2k^*=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ e quindi p. es. $\cos k^*=\frac{a_1}{r_1}$, $\operatorname{sen} k^*=\frac{b_1}{r_1}$) *per $f(t)$ coincidente con* $\varphi\left(t-k^*-\frac{\pi}{2};\ a_0,\ 0,\ -r_1\right)=\varphi\left(t-k^*+\frac{\pi}{2};\ a_0,\ 0,\ r_1\right)$.

Supposto ora di *non prefissare per la $f(t)$ i valori di a_0, a_1, b_1, ma soltanto il valore a_0 e quello di $r_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$*, in corrispondenza alle ∞^1 coppie di valori di a_1, b_1 soddisfacenti alla $a_1^2+b_1^2=r_1^2$ ($a_1=-r_1 \operatorname{sen} \lambda$, $b_1=r_1 \cos \lambda$) avremo ∞^1 cerchi Γ, di raggio *costante R*, il cui centro C si sposta sul cerchio di centro O e raggio $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (pure costante). Tali cerchi ricoprono perciò un cerchio Γ_0 di centro O e raggio $R_0=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+R$, il cui contorno è il luogo del punto M. *Il punto $P(a_2, b_2)$ non può cadere fuori di Γ_0; vale cioè la* (17), *nella quale può sussistere il segno di eguaglianza solo se P cade sul contorno di Γ_0 cioè per $f(t)=\varphi(t-\lambda;\ a_0,\ 0,\ r_1)$.*

---

(10) Per $k=0$ ritroviamo le (15), che si possono anche scrivere $\alpha-R \leq a_2 \leq \alpha+R$, in corrispondenza al diametro AA'; per $k=\frac{\pi}{4}$ ritroviamo le (15') ($\beta-R \leq b_2 \leq \beta+R$) in corrispondenza a BB'.