Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Renato Nardini

Studio e risoluzione di un' equazione funzionale del tipo misto

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 201-213
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_201_0>

STUDIO E RISOLUZIONE DI UN' EQUAZIONE FUNZIONALE DEL TIPO MISTO

di RENATO NARDINI (Bologna).

1. - Il Prof. TONELLI in un interessante lavoro [1] ha studiato e risolto l' equazione funzionale

$$\varphi(x) = f(x) + A[x, \overset{x}{\underset{0}{\varphi(y)}}] \tag{0}$$

dove $A[x, \overset{x}{\underset{0}{\varphi(y)}}]$ è un funzionale dipendente dalla x e dai valori che la funzione incognita $\varphi(y)$ assume nell' intervallo $(0, x)$; in quest' equazione rientrano come casi particolari le equazioni integrali del tipo di VOLTERRA. Il TONELLI, sotto opportune ipotesi, ha dimostrato l' esistenza della soluzione della (0) e ne ha stabilito alcune proprietà fondamentali.

Il metodo del TONELLI consiste in grandi linee nel costruire una successione di funzioni che, dal punto di vista intuitivo approssimano una soluzione dell' equazione proposta ; si verifica poi che in un certo intervallo $(0, l)$ con $l > 0$, tutte queste funzioni sono ugualmente limitate ed ugualmente continue quindi esse ammettono almeno una funzione limite che si mostra essere soluzione dell' equazione proposta nel detto intervallo. Sotto ulteriori condizioni si dimostra l' unicità della soluzione, l' uniforme convergenza delle funzioni costruite precedentemente verso l' unica soluzione, l' estensione dell' esistenza di questa all' intervallo $(0, 1)$.

Tale procedimento è stato ripreso dal prof. D. GRAFFI che lo ha adattato allo studio e alla risoluzione di un' equazione funzionale vettoriale [2] pure a limite superiore variabile che gli si è presentata in una questione di fisica-matematica. Essendo dunque il metodo del TONELLI così efficace nel trattare equazioni contenenti funzionali a limiti variabili, noi lo sfrutteremo qui per lo

[1] L. TONELLI : *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra.* Bull. of the Calcutta Math. Soc., Vol. XX, 1928.

[2] D. GRAFFI : *Sopra un' equazione funzionale e la sua applicazione a un problema di fisica ereditaria.* Annali di Matem., Serie IV, Tomo IX, 1931.

studio e la risoluzione della seguente equazione

$$(1) \qquad \psi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^b K(x, y, z)\, \psi(x, z)\, dz + A[x, y, \psi(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]$$

in cui la funzione incognita $\psi(x, y)$ compare sotto un integrale a limiti fissi e sotto un funzionale con un limite variabile, riguardo al quale verranno esposte fra breve le condizioni a cui s' intenderà sottoposto. La presenza dell' integrale a limiti fissi rende necessaria qualche variante al ragionamento seguito dal TONELLI, variante dedotta dalla teoria delle equazioni integrali del tipo di FREDHOLM : a tale proposito si supporrà sempre che λ non sia autovalore del nucleo $K(x, y, z)$.

Casi particolari interessanti della (1) sono le seguenti equazioni integrali : (3)

$$\psi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^b K(x, y, z)\, \psi(x, z)\, dz + \mu \int_0^x dt \int_0^b H(x, y, t, z)\, \psi(t, z)\, dz$$

$$\psi(x, y) = f(x, y) + \mu \int_0^x dt \int_0^b H(x, y, t, z)\, \psi(t, z)\, dz$$

che equivalgono nell'ordine alle seguenti in coordinate polari

$$\psi(\varrho, \vartheta) = f(\varrho, \vartheta) + \lambda \int_0^{2\pi} K(\varrho, \vartheta, \vartheta')\, \psi(\varrho, \vartheta')\, d\vartheta' + \mu \int_0^{\varrho} d\varrho' \int_0^{2\pi} H(\varrho, \vartheta, \varrho', \vartheta')\, \psi(\varrho', \vartheta')\, d\vartheta'$$

$$\psi(\varrho, \vartheta) = f(\varrho, \vartheta) + \mu \int_0^{\varrho} d\varrho' \int_0^{2\pi} H(\varrho, \vartheta, \varrho', \vartheta')\, \psi(\varrho', \vartheta')\, d\vartheta'.$$

Altri casi particolari si potrebbero avere considerando equazioni integrali non lineari nella funzione incognita $\psi(x, y)$ come per esempio

$$\psi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^b K(x, y, z)\, \psi(x, z)\, dz + \mu \int_0^x dt \int_0^b H(x, y, t, z, \psi(t, z))\, dz.$$

2. - Per definire il funzionale che compare nella (1) intenderemo designare col simbolo

$$A\, [x, y, \psi(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]$$

(dove b è un numero fisso compreso (4) fra 0 e 1) un numero reale dipendente

(3) Saranno esposte fra breve le condizioni a cui si suppongono sottoposte le funzioni note $f(x, y)$ e $K(x, y, z)$; riguardo ad $H(x, y, t, z)$ si ammette la continuità per x, t variabili in $(0, 1)$, y, z in $(0, b)$. Analoga osservazione va fatta per il nucleo dell' ultimo esempio $H(x, y, t, z, \psi)$, in cui ψ si suppone in modulo minore od uguale di un numero a.

(4) I ragionamenti seguenti si potrebbero far valer con qualche piccola precisazione anche nel caso che fosse $b > 1$ sempre restando finito.

secondo una data legge esclusivamente da x e y variabili rispettivamente in (0, 1) e in (0, b) e dai valori che la funzione $\psi(t, z)$ assume nel campo rettangolare con i lati paralleli agli assi avente come vertici opposti i punti (0, 0), (1, b) — per designarlo adotteremo il simbolo $B(0, 1)$ — nel quale essa verrà supposta continua perciò in modulo minore od uguale di un numero positivo a.

Supporremo poi che il funzionale soddisfi alle condizioni seguenti :

I) Esiste un numero M tale che per ogni punto (x, y) di $B(0, 1)$ e per ogni funzione $\psi(t, z)$ continua ed in modulo $\leqslant a$ nel campo $B(0, x)$, si abbia

$$(C_1) \qquad |A[x, y, \psi(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]| \leqslant Mx$$

II) Ad ogni $\varepsilon > 0$ si possa far corrispondere un $\varrho > 0$ tale che per ogni coppia di punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$, y_1, y_2 in (0, b), $x_2 - x_1 < \varrho$, $|y_1 - y_2| < \varrho$, e per ogni funzione $\psi(t, z)$ continua ed in modulo $\leqslant a$ in $B(0, x_2)$, si abbia

$$(C_2) \qquad |A[x_1, y_1, \psi(\overset{x_1}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] - A[x_2, y_2, \psi(\overset{x_2}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]| \leqslant \varepsilon$$

III) Ad ogni $\varepsilon > 0$ si possa far corrispondere un $\sigma > 0$ tale che per ogni punto (x, y) di $B(0, 1)$ e per ogni coppia di funzioni $\psi_1(t, z)$ e $\psi_2(t, z)$ continue ed in modulo $\leqslant a$ nel campo $B(0, x)$ ed ivi soddisfacenti alla condizione che sia sempre $|\psi_1(t, z) - \psi_2(t, z)| \leqslant \sigma$, risulti

$$(C_3) \qquad |A[x, y, \psi_1(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] - A[x, y, \psi_2(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]| \leqslant \varepsilon$$

Per quanto riguarda gli altri elementi che compaiono nella (1), supporremo che $f(x, y)$ sia data finita e continua in tutto $B(0, 1)$ in modo che ivi sia sempre $|f(x, y)| \leqslant N$, N essendo un numero positivo, $K(x, y, z)$ sia pure finito e continuo per $0 \leqslant x \leqslant 1$, y, z in (0, b) e perciò considerato quale nucleo di un'equazione di FREDHOLM nella variabile indipendente y ammetta un nucleo risolvente $\Gamma(x, y, z; \lambda)$ pure continuo e limitato e tale che sia, sempre per $0 \leqslant x \leqslant 1$ e per y, z in (0, b), $|\lambda\Gamma(x, y, z; \lambda)| \leqslant L$. Imponiamo infine la condizione [5] che sia

$$(2) \qquad N(1 + L) = a - \delta \qquad (\text{con } \delta > 0).$$

---

[5] Di questa ci si servirà per ottenere che

$$|f(x, y)| + |\lambda \int_0^b K(x, y, z) f(x, z) dz| \leqslant a - \delta.$$

Con qualche precisazione si potrebbe sostituire la (2) con la condizione meno restrittiva

$$|f(0, y)| + |\lambda \int_0^b K(0, y, z) f(0, z) dz| = a - 2\delta' \qquad \left(\delta' = \frac{\delta}{2}\right).$$

3. - Ci proponiamo anzitutto di dimostrare che esiste un $l>0$ tale che nel campo $B(0,\, l)$ esiste almeno una soluzione finita e continua della (1).

Definiamo a tale scopo per ogni valore intero positivo di n una funzione $\psi_n(x,\, y)$ pensata in modo che al crescere di n tenda intuitivamente ad approssimare una soluzione della (1). Precisamente poniamo

per $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$

$$\psi_n(x,\, y)=f(x,\, y)+\lambda \int_0^b K(x,\, y,\, z)\, \psi_n(x,\, z)dz. \tag{3}$$

Osserviamo che tale definizione è effettiva per ogni y di $(0,\, b)$ in quanto, tenendo presente che λ non è autovalore di $K(x,\, y,\, z)$, si ha che la (3) considerata come equazione di FREDHOLM nella funzione incognita $\psi_n(x, y)$, — dove x si considera un parametro — ha come soluzione determinata ed unica

$$\psi_n(x,\, y)=f(x,\, y)-\lambda \int_0^b \Gamma(x,\, y,\, z\,;\, \lambda)\; f(x,\, z)dz. \tag{3'}$$

Continuiamo nella definizione di $\psi_n(x,\, y)$, nel modo seguente:

per $\frac{1}{n} > x,\; 0 \leqslant y \leqslant b$

$$\psi_n(x,\, y)=f(x,\, y)+\lambda \int_0^b K(x,\, y,\, z)\, \psi_n(x,\, z)dz + A\Big[x-\frac{1}{n},\, y,\, \psi_n\Big(\overset{x-\frac{1}{n}}{\underset{0}{t}},\, \overset{b}{\underset{0}{z}}\Big)\Big]. \tag{4}$$

Per mostrare che tale definizione è valida per $0 \leqslant y \leqslant b,\; 0 \leqslant x \leqslant l$ con $l>0$ indipendente da n, osserviamo che in base alla (3') si ha per $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$

$$|\, \psi_n(x,\, y)\, | \leqslant |\, f(x,\, y)\, | + \Big|\, \lambda \int_0^b \Gamma(x,\, y,\, z\,;\, \lambda)\; f(x,\, z)dz\, \Big|$$

cioè ricordando la (2)

$$|\, \psi_n(x,\, y)\, | \leqslant a-\delta. \tag{5}$$

Orbene indichiamo con l il massimo numero positivo non maggiore di 1 nè di $\frac{\delta}{M(1+bL)}$ e sia $\frac{r}{n} \leqslant l < \frac{r+1}{n}$. Successivamente prendiamo in considerazione il funzionale che compare nella (4) ed osserviamo che essendo $\psi_n(t,\, z)$ continua e in base alla (5) in modulo $\leqslant a$ per $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$, $0 \leqslant z \leqslant b$, esso è una funzione nota di x e y per $\frac{1}{n} < x \leqslant \frac{2}{n}$, $0 \leqslant y \leqslant b$ e in forza della (C_1) in modulo $\leqslant Ml$; ponendo quindi

$$A\Big[x-\frac{1}{n},\, y,\, \psi_n\Big(\overset{x-\frac{1}{n}}{\underset{0}{t}},\, \overset{b}{\underset{0}{z}}\Big)\Big]=\gamma_n(x,\, y)$$

otteniamo che la (4) quale equazione di FREDHOLM ci dà la $\psi_n(x, y)$ sotto la forma

$$(4') \qquad \psi_n(x, y) = f(x, y) + \gamma_n(x, y) - \lambda \int_0^b \Gamma(x, y, z; \lambda) \{ f(x, z) + \gamma_n(x, z) \} \, dz.$$

Da qui si ricava (sempre per $\frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}$, $0 \leq y \leq b$) che

$$(5') \qquad | \psi_n(x, y) | \leq N(1 + bL) + Ml(1 + bL) \leq a - \delta + \delta.$$

S'è così mostrato che è $| \psi_n(x, y) | \leq a$ in tutto $B\left(0, \frac{2}{n}\right)$; analogo ragionamento fa valere la (5') nel campo $B\left(0, \frac{3}{n}\right)$ e così di seguito fino ad arrivare al campo $B(0, l)$. In quest'ultimo campo allora le $\psi_n(x, y)$ risultano completamente definite [6] dalle (4) o (4') e per giunta ugualmente limitate; per dimostrarne anche l'ugual continuità premettiamo che scelto un $\varepsilon > 0$ e detto ε_1 un numero non maggiore nè di ε, nè di $\frac{\varepsilon}{2L + M + N}$, è possibile trovare un ϱ_1 tale che per $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq l$ e per y_1, y_2 in $(0, b)$ con $x_2 - x_1 < \varrho_1$, $| y_2 - y_1 | < \varrho_1$, sia

$$(6) \quad | \gamma_n(x_2, y_2) - \gamma_n(x_1, y_1) | = \left| A[x_2 - \tfrac{1}{n}, y_2, \psi_n(\underset{0}{\overset{x_2 - \frac{1}{n}}{t}}, \underset{0}{\overset{b}{z}})] - A[x_1 - \tfrac{1}{n}, y_1, \psi_n(\underset{0}{\overset{x_1 - \frac{1}{n}}{t}}, \underset{0}{\overset{b}{z}})] \right| < \varepsilon_1$$

Infatti basta prendere ϱ_1 non maggiore del ϱ considerato nella condizione II) riferito ad ε_1 e non maggiore di $\frac{\varepsilon_1}{M}$ per comprendere il caso in cui fosse $x_1 \leq \frac{1}{n}$ (e quindi $x_2 - \frac{1}{n} < \varrho_1$) e con ciò il secondo membro della (6) si riducesse a

$$\left| A[x_2 - \tfrac{1}{n}, y_2, \psi_n(\underset{0}{\overset{x_2 - \frac{1}{n}}{t}}, \underset{0}{\overset{b}{z}})] \right| \text{ che per } (C_1) \text{ è } \leq M\varrho_1 \leq \varepsilon_1 .$$

Dopo di che all' ε assegnato si farà corrispondere un ϱ non maggiore del ϱ_1 associato ad ε_1 e tale che per $x_2 - x_1 < \varrho$ (con $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq l$), $| y_2 - y_1 | < \varrho$ (con y_1, y_2 compresi fra 0 e b) sia [7]

$$| f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) | \leq \varepsilon_1 \qquad | \lambda\Gamma(x_2, y_2, z; \lambda) - \lambda\Gamma(x_1, y_1, z; \lambda) | \leq \varepsilon_1$$

Ora dalla (4') si ottiene

$$(7) \qquad | \psi_n(x_2, y_2) - \psi_n(x_1, y_1) | \leq | f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) | + | \gamma_n(x_2, y_2) - \gamma_n(x_1, y_1) | +$$
$$+ \int_0^b | \lambda\Gamma(x_2, y_2, x; \lambda) \{ f(x_2, z) + \gamma_n(x_2, z) \} - \lambda\Gamma(x_1, y_1, z; \lambda) \{ f(x_1, z) + \gamma_n(x_1, z) \} | \, dz.$$

---

(6) Nella (4) o (4') si può far rientrare rispett. la (3) o (3') facendo la convenzione che per $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ sia $\gamma_n(x, y) = 0$.

(7) Ciò è possibile per la continuità di $f(x, y)$ e di $\lambda\Gamma(x, y, z; \lambda)$.

Indichiamo per brevità con Γ_1 l'espressione $\lambda\Gamma(x_1, y_1, z; \lambda)$, con F_1 l'espressione $f(x_1, z)+\gamma_n(x_1, z)$ e analogamente con Γ_2 l'espressione $\lambda\Gamma(x_2, y_2, z; \lambda)$, con F_2 l'espressione $f(x_2, z) + \gamma_n(x_2, z)$; l'ultimo termine a secondo membro della (7) diviene

$$\int_0^b |\Gamma_2 F_2 - \Gamma_1 F_1| \, dz \qquad \text{cioè} \qquad \int_0^b |\Gamma_2 F_2 - \Gamma_1 F_2 + \Gamma_1 F_2 - \Gamma_1 F_1| \, dz.$$

Il termine in questione è perciò minore od uguale di

$$\int_0^b |F_2| \, |\Gamma_2 - \Gamma_1| \, dz + \int_0^b |\Gamma_1| \, |F_2 - F_1| \, dz$$

quest'ultima espressione è, per le condizioni poste sopra (8), minore od uguale di

$$b(N+Ml)\,\varepsilon_1 + 2bL\,\varepsilon_1 \leqslant (2L+M+N)\,\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.$$

Concludendo si ottiene quindi dalla (7)

$$|\psi_n(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1)| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon$$

quindi le $\psi_n(x, y)$ costituiscono in $B(0, l)$ un insieme di funzioni ugualmente continue e ugualmente limitate. Per una proprietà (9) di questi insiemi le $\psi_n(x, y)$ ammettono nel detto campo almeno una funzione limite continua che indicheremo con $\psi_\infty(x, y)$ e verso cui converge uniformemente una successione $\psi_{n_1}(x, y)$, $\psi_{n_2}(x, y), \ldots, \psi_{n_m}(x, y), \ldots$ estratta da quella delle $\psi_n(x, y)$; inoltre la $\psi_\infty(x, y)$ come limite di funzioni in modulo minore di a risulta soddisfacente alla medesima condizione, quindi sono definiti i funzionali contenenti $\psi_\infty(x, y)$.

S'è detto che dal punto di vista intuitivo le $\psi_n(x, y)$ tendono ad approssimare una soluzione della (1) al crescere di n; effettivamente si può ora verificare con tutto rigore che la funzione limite $\psi_\infty(x, y)$ è soluzione della (1) cioè mostrare che

$$\psi_\infty(x, y) - f(x, y) - \lambda \int K(x, y, z)\, \psi_\infty(x, z) dz - A[x, y, \psi_\infty(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] = 0. \tag{8}$$

Per giungere a ciò, scelto un $\varepsilon > 0$, fissiamo un m_1 abbastanza grande in modo che, considerato un σ corrispondente secondo la condizione III) all'ε scelto, si abbia per $m > m_1$ in conseguenza dell'uniforme convergenza delle $\psi_{n_m}(x, y)$ verso la $\psi_\infty(x, y)$

$$|\psi_\infty(x, y) - \psi_{n_m}(x, y)| < \sigma \tag{9}$$

---

(8) Riepilogando si ha: $|\Gamma_1| \leqslant L$, $|F_2| \leqslant N + ML$, $|F_1 - F_2| < 2\varepsilon_1$, $|\Gamma_2 - \Gamma_1| \leqslant \varepsilon_1$.

(9) Qui si fa uso del teorema di ASCOLI (Vedi p. e. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I. n. 22) esteso al caso delle funzioni di due variabili.

dove inoltre supporremo per la ragione che vedremo poi, che σ sia minore di ε e di $\frac{\varepsilon}{bH}$, H essendo il massimo modulo di $\lambda K(x, y, z)$ nel campo di definizione di tale nucleo.

Inoltre possiamo ammettere che m_1 sia abbastanza grande da far sì che per $m > m_1$, $\frac{1}{n_m}$ sia minore del ϱ associato secondo la condizione II) all'ε scelto e minore altresì di $\frac{\varepsilon}{M}$.

Ora ricordando la definizione di $\psi_{n_m}(x, y)$ secondo la (4), si ha che il modulo del primo membro della (8) è minore od uguale dell'espressione

$$
(10) \qquad |\psi_\infty(x, y) - \psi_{n_m}(x, y)| + |\lambda \int_0^b K(x, y, z)\{\psi_{n_m}(x, z) - \psi_\infty(x, z)\} dz| +
$$

$$
+ |A[x - \frac{1}{n_m}, y, \psi_{n_m}(\overset{x-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] - A[x - \frac{1}{n_m}, y, \psi_\infty(\overset{x-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]| +
$$

$$
+ |A[x - \frac{1}{n_m}, y, \psi_\infty(\overset{x-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] - A[x, y, \psi_\infty(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]|.
$$

Il secondo termine della (10) è $< \varepsilon$ in quanto esso è (sempre per $m > m_1$) minore di $bH\sigma$, essendosi supposto $\sigma < \frac{\varepsilon}{bH}$; il terzo termine è $< \varepsilon$ per la (C_3) che si applica in base alla (9); l'ultimo termine è minore di ε sia se è $x > \frac{1}{n_m}$ — per la (C_2) —, sia se è $x \leq \frac{1}{n_m}$ — perchè in tal caso, basta considerare la (C_1). — Concludendo, il primo membro della (8) risulta minore di $\sigma + 3\varepsilon < 4\varepsilon$ quindi, per l'arbitrarietà di ε, si conclude con la piena validità della (8) la quale mostra appunto che $\psi_\infty(x, y)$ è soluzione della (1) almeno per $0 \leq x \leq l$, o $0 \leq y \leq b$.

4. - Per poter affermare che la soluzione della (1) è unica, sottoporremo il funzionale $A[x, y, \psi(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]$ all'ulteriore condizione seguente:

IV) Esiste un numero M' tale che per ogni y di $(0, b)$, per ogni x di $(0, 1)$, per ogni x_0 di $(0, x)$ e per ogni coppia di funzioni $\psi'(t, z)$ e $\psi''(t, z)$ continue ed in modulo $\leq a$ in $B(0, x)$ sia

$$
(C_4) \qquad |A[x, y, \psi'(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] - A[x, y, \psi''(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]| \leq M'
$$

$$
\{(x - x_0) \max |\psi' \overset{x}{\underset{x_0}{-}} \psi''| + x_0 \max |\psi' \overset{x_0}{\underset{0}{-}} \psi''\}
$$

dove $\max|\psi' \overset{x_2}{\underset{x_1}{-}} \psi''|$ rappresenta il massimo valore di

$$
|\psi'(t, z) - \psi''(t, z)| \quad \text{per} \quad x_1 \leq t \leq x_2, \quad 0 \leq z \leq b.
$$

Dopo di ciò mostriamo che se per $0 \leqslant x \leqslant A$, $0 \leqslant y \leqslant b$ esistono due soluzioni della (1) $\psi'(x, y)$ e $\psi''(x, y)$ finite e continue, esse devono coincidere.

Siccome è per la (C_1) $A[x, y, \psi(\overset{0}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]=0$, si ha dalla (1)

$$\psi'(0, y)=f(0, y)+\lambda \int_0^b K(0, y, z)\, \psi'(0, z)dz$$

$$\psi''(0, y)=f(0, y)+\lambda \int_0^b K(0, y, z)\, \psi''(0, z)dz$$

allora, stando sempre nell'ipotesi che λ non sia autovalore di $K(x, y, z)$, si ha che $\psi'(0, y)=\psi''(0, y)$ per qualunque y di $(0, b)$ per il fatto che è unica la soluzione di un'equazione di FREDHOLM in cui λ non sia autovalore del nucleo.

Scelto ora un $\varepsilon>0$ arbitrario, sia x_1 il massimo numero compreso fra 0 e A tale che in tutto $B(0, x_1)$ sia

$$|\psi'(x, y)-\psi''(x, y)| \leqslant \varepsilon.$$

Se $x_1=A$, allora, per l'arbitrarietà di ε, la nostra proposizione è dimostrata. Se invece non si può affermare che $x_1=A$, allora in un punto almeno la cui prima coordinata è x_1, — la seconda la indicheremo con y_1 — si avrà

$$|\psi'(x_1, y_1)-\psi''(x_1, y_1)|=\varepsilon \tag{11}$$

altrimenti, essendo $\psi'(x, y)-\psi''(x, y)$ una funzione continua in $B(0, A)$, si avrebbe che $|\psi'(x, y)-\psi''(x, y)|$ sarebbe minore di ε in un campo più esteso di $B(0, x_1)$.

Per il fatto che $\psi'(x, y)$ e $\psi''(x, y)$ sono soluzioni della (1), si ricava da quest' ultima

$$\begin{aligned}\psi'(x, y)-\psi''(x, y)=\lambda \int_0^b K(x, y, z)\{\psi'(x, z)-\psi''(x, z)\}\, dz+\\ +A[x, y, \psi'(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]-A[x, y, \psi''(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})].\end{aligned} \tag{12}$$

Considerando la (12) come un'equazione di FREDHOLM dove si assume y come variabile indipendente, la si risolva considerando la differenza dei due funzionali come funzione nota e chiamandola con $\chi(x, y)$; si ottiene

$$\psi'(x, y)-\psi''(x, y)=\chi(x, y)-\lambda \int_0^b \Gamma(x, y, z;\, \lambda)\, \chi(x, z)dz \tag{13}$$

Se ora applichiamo la (C_4) a $|\chi(x, y)|$, facendovi $x_0=0$, si ha

$$|\chi(x, y)| \leqslant M' \cdot x \cdot \max |\psi' \overset{x}{\underset{0}{-}} \psi''|$$

Calcolando la (13) nel punto (x_1, y_1) e passando ai moduli nei due membri, risulta, ricordando la (11) e tenendo presente altresì che $\max_0^{x_1} |\psi' - \psi''| \leqslant \varepsilon$,

$$\varepsilon \leqslant M' \cdot x_1 \cdot \varepsilon \cdot (1 + bL)$$

cioè

$$\varepsilon \leqslant M' \cdot x_1 \cdot \varepsilon \cdot (1 + L)$$

e quindi $x_1 \geqslant \frac{1}{M'(1+L)}$ per ogni ε. Ciò significa che almeno in tutto $B\left(0, \frac{1}{M'(1+L)}\right)$ è $\psi'(x, y) \equiv \psi''(x, y)$.

Se ora a $|\chi(x_1, y_1)|$ applichiamo nuovamente la (C_4) facendovi $x_0 = \frac{1}{M'(1+L)}$, e teniamo presente che $\max_0^{\frac{1}{M'(1+L)}} |\psi' - \psi''| = 0$ otteniamo

$$|\chi(x_1, y_1)| \leqslant M' \cdot \left(x_1 - \frac{1}{M'(1+L)}\right) \max_{\frac{1}{M'(1+L)}}^{x_1} |\psi' - \psi''|$$

e perciò

$$\varepsilon \leqslant M' \cdot \left(x_1 - \frac{1}{M'(1+L)}\right) \cdot \varepsilon \cdot (1 + bL)$$

da cui per ogni valore di ε,

$$x_1 \geqslant \frac{2}{M'(1+L)}$$

cioè $\psi'(x, y) \equiv \psi''(x, y)$ almeno in tutto $B\left(0, \frac{2}{M'(1+L)}\right)$.

Proseguendo si dimostra in tal modo che ciò avviene in tutto $B(0, \Lambda)$.

5. - Sotto le condizioni del numero precedente, basandoci sull'unicità della soluzione della (1) si può dimostrare, con considerazioni identiche a quelle usate da TONELLI a tale riguardo nel lavoro citato, che è tutta la successione $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$... considerata nel numero 3 che converge uniformemente nel campo $B(0, l)$ verso la $\psi_\infty(x, y)$ unica soluzione della (1). Più in generale mostreremo che se $\psi^*(x, y)$ è in $B(0, \Lambda)$ — con $\Lambda \geqslant l$ — soluzione della (1) ed ivi è sempre in modulo $< a$, allora in esso le $\psi_n(x, y)$ convergono uniformemente verso la $\psi^*(x, y)$.

Questo avverrà di certo, per quanto si è detto precedentemente, in $B(0, l)$ quindi limitatamente a questo campo, detto 4Δ il minimo [10] di $a - |\psi^*(x, y)|$ in $B(0, \Lambda)$, è possibile trovare un n_1 tale che per $n > n_1$ sia

$$|\psi_n(x, y) - \psi^*(x, y)| < \Delta \qquad \text{cioè} \qquad |\psi_n(x, y)| \leqslant |\psi^*(x, y)| + \Delta$$

---

[10] Tale minimo esiste ed è maggiore di zero in quanto si è supposto che in $B(0, \Lambda)$ sia sempre $|\psi^*(x, y)| < a$.

e infine

$$|\psi_n(x, y)| < a - 3\Delta. \tag{14}$$

Inoltre determiniamo un $l_1 > 0$ tale che sia contemporaneamente per $0 \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant 1$, $x'' - x' \leqslant l_1$ e per ogni y di $(0, b)$

$$|f(x'', y) - f(x', y)| < \Delta \tag{15}$$

e

$$|\lambda \int_0^b \{ K(x'', y, z)\, \psi(x'', z) - K(x', y, z)\, \psi(x', z) \} dz | \leqslant \Delta \tag{16}$$

$$|A[x'', y, \psi(\overset{x''}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] - A[x', y, \psi(\overset{x'}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]| \leqslant \Delta \tag{17}$$

per qualsiasi funzione $\psi(t, z)$ definita per $0 \leqslant t \leqslant x''$, $0 \leqslant z \leqslant b$ ed ivi continua e sempre in modulo $\leqslant a$. La determinazione di l_1 in modo che siano soddisfatte le tre relazioni suddette è possibile per la (15) in seguito alla supposta continuità di $f(x, y)$, per la (16) avendo ammesso la continuità di $K(x, y, x)$ e di $\psi(t, z)$, per la (17) in conseguenza di (C_2).

Prendendo sempre in considerazione solo valori di n maggiori di n_1, potremo supporre n_1 sufficientemente grande in modo che, se è $\frac{r}{n} \leqslant l < \frac{r+1}{n}$, si abbia $l_1 \geqslant \frac{r+1}{n} - l$ e precisamente $\frac{s}{n} \leqslant l_1 < \frac{s+1}{n}$. Ora si ha evidentemente

$$\begin{aligned} |\psi_n(x, y)| \leqslant |\psi_n(l, y)| + |f(x, y) - f(l, y)| + \\ + |\lambda \int_0^b \{ K(x, y, z)\, \psi_n(x, z) - K(l, y, z)\, \psi_n(l, z) \} dz | + \\ + |A[x - \tfrac{1}{n}, y, \psi_n(\overset{x-\frac{1}{n}}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] - A[l - \tfrac{1}{n}, y, \psi_n(\overset{l-\frac{1}{n}}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})]| \end{aligned}$$

Se si suppone $l \leqslant x \leqslant \frac{r+1}{n}$ e si applicano ai termini del secondo membro nell'ordine la (14) e, essendo $x - l \leqslant l_1$, la (15), la (16), la (17), si ricava

$$|\psi_n(x, y)| < \{a - 3\Delta\} + \Delta + \Delta + \Delta$$

si conclude che $|\psi_n(x, y)| < a$, per $l \leqslant x \leqslant \frac{r+1}{n}$.

Ripetendo il procedimento seguito si mostra che $|\psi_n(x, y)| < a$ anche per $\frac{r+1}{n} < x \leqslant \frac{r+2}{n}$ e così di seguito fino ad ottenere che tale espressione è valida in tutto $B(0, l + l_1)$: allora ivi le $\psi_n(x, y)$ sono per $n > n_1$ ugualmente limitate; ragionando come al n. 3 si deduce che esse sono ugualmente continue e si conclude che in tutto $B(0, l + l_1)$ convergono uniformemente verso l'unica soluzione della (1) cioè verso la $\psi^*(x, y)$. Se ora si determina un $n_2 > n_1$ tale che per $n > n_2$ valga la (14) in $B(0, l+l_1)$, applicando nuovamente il ragionamento fatto si vede che le $\psi_n(x, y)$ convergono per $n > n_2$ verso la $\psi^*(x, y)$ in tutto $B(0, l+2l_1)$ e così si procede fino ad aver estesa la proprietà de dimostrarsi a $B(0, \Lambda)$.

6. - Vogliamo ora modificare le condizioni del n. 2 per poter affermare che la soluzione della (1) esiste in tutto $B(0, 1)$: ad esse sostituiremo le seguenti:

I'). Ad ogni numero intero positivo m si possa far corrispondere un numero M_m tale che, se $\psi(t, z)$ è una funzione continua ed in modulo $\leqslant m$ per $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, y, z in $(0, b)$, si abbia per ogni punto (x, y)

$$(\mathrm{C}_1') \qquad \left| A[x, y, \psi(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] \right| \leqslant M_m \cdot x$$

II'). Per ogni m, scelto un $\varepsilon > 0$ gli si possa associare un ϱ_m tale che, per ogni $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$, y_1, y_2 in $(0, b)$ con $x_2 - x_1 < \varrho_m$, $|y_2 - y_1| < \varrho_m$, e per ogni funzione $\psi(t, z)$ continua ed in modulo $\leqslant m$ in $B(0, x_2)$, valga la (C_2).

III'). Per ogni intero m, scelto un $\varepsilon > 0$ gli si possa associare un $\sigma_m > 0$ tale che per ogni punto (x, y) di $B(0, 1)$ e per ogni coppia di funzioni $\psi_1(t, z)$ e $\psi_2(t, z)$ continue ed in modulo $\leqslant m$ nel campo $B(0, x)$ ed ivi soddisfacenti alla condizione che sia sempre $|\psi_1(t, z) - \psi_2(t, z)| \leqslant \sigma_m$, risulti valida la (C_3).

Supporremo inoltre sempre valida la condizione IV).

Premettiamo inoltre la seguente osservazione:

Ad ogni m soddisfacente a

$$|f(x, y)| + \left| \lambda \int_0^b \Gamma(x, y, z; \lambda)\, f(x, z) dz \right| \leqslant N(1 + bL) \leqslant m$$

è possibile associare un Λ_m massimo tale che in $B(0, \Lambda_m)$ la (1) ammetta soluzione continua ed unica $\psi^*(x, y)$ che ivi rimanga in modulo $\leqslant m$: basterebbe all'uopo ripetere, valendosi però delle nuove condizioni, il ragionamento mediante il quale ad a si è associato il numero l. È evidentemente $\Lambda_{m+1} \geqslant \Lambda_m$; precisando maggiormente verificheremo che $\Lambda_{m+1} > \Lambda_m$.

Mostriamo a tale scopo che se Λ_m è il massimo numero compreso fra 0 e 1 — e precisamente sia $\frac{s}{n} \leqslant \Lambda_m < \frac{s+1}{n}$ — tale che in tutto $B(0, \Lambda_m)$ sia $|\psi^*(x, y)| \leqslant m$, dev'essere almeno in un punto (x, y) del campo

$$|\psi^*(x, y)| = m$$

altrimenti si può provare che $|\psi^*(x, y)|$ è $< m$ anche in un campo $B(0, \Lambda_m + l_1)$ con $l_1 > 0$, contro la definizione di Λ_m.

Ammettiamo infatti che $|\psi^*(x, y)|$ sia $< m$ in tutto $B(0, A_m)$; chiameremo 5Δ il minimo di $|m - \psi^*(x, y)|$ in tale campo. Ora in tutto $B(0, A_m)$ le $\psi_n(x, y)$ — definite dalla (4′) — convergono uniformemente verso $\psi^*(x, y)$ quindi è possibile trovare un n_1 tale che per $n > n_1$ sia

$$|\psi_n(x, y) - \psi^*(x, y)| < \Delta$$

cioè,

$$|\psi_n(x, y)| < m - 4\Delta.$$

Determiniamo ora un $l_1 > 0$ tale che per $0 \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant 1$, $x'' - x' < l_1$ e per ogni y di $(0, b)$ siano soddisfatte le (15), (16), (17) del numero (5). Sostituendo nel ragionamento ivi svolto A_m al posto di l si deduce che per $n > n_1$

$$|\psi_n(x, y)| < m - \Delta \tag{18}$$

in tutto $B(0, A_m + l_1)$, nel cui campo le $\psi_n(x, y)$ convergono uniformemente verso la $\psi^*(x, y)$, quindi è possibile determinare un n_2 tale che per $n > n_2$ si abbia

$$|\psi_n(x, y) - \psi^*(x, y)| < \Delta$$

e quindi per la (18)

$$|\psi^*(x, y)| < m$$

in tutto $B(0, A_m + l_1)$ contro la definizione di A_m.

In tal caso è allora $A_{m+1} > A_m$ perchè in un punto (x, y) almeno di $B(0, A_{m+1})$ dovrà essere $|\psi^*(x, y)| = m + 1$ e tale punto non può appartenere a $B(0, A_m)$.

I A_m costituiscono allora una successione crescente avente infiniti termini perciò o esiste un $A_{\overline{m}} \geqslant 1$. e con ciò resta dimostrato che la $\psi^*(x, y)$ soluzione della (1) esiste unica e continua in $B(0, 1)$ ed ivi in modulo $\leqslant \overline{m}$, oppure i A_m ammettono un limite superiore $A \leqslant 1$. In tale caso però la $\psi^*(x, y)$ per almeno un valore di y di $(0, b)$ quando x tende a A dovrebbe in modulo diventare maggiore di qualsiasi numero positivo assegnato; mostreremo che invece entro $B(0, A)$ la $\psi^*(x, y)$ si mantiene finita quindi sarà esclusa l'esistenza di questo $A \leqslant 1$ e resterà confermata quella di un $A_{\overline{m}} \geqslant 1$. A tale scopo supponiamo, come s'è già fatto precedentemente, che sia N il massimo modulo di $f(x, y)$ in $B(0, 1)$, L quello di $\lambda A(x, y, z; \lambda)$ nel campo di definizione di tale nucleo, inoltre indichiamo con Ψ il massimo modulo della $\psi^*(x, y)$ in $B\left(0, A - \frac{1}{2M'(1 + L)}\right)$, con $\Phi(x)$ quello della $\psi^*(x, y)$ in $B\left(A - \frac{1}{2M'(1 + L)}, x\right)$.

Siccome $\psi^*(x, y)$ è soluzione della (1), si ha da questa la relazione

$$\psi^*(x, y) = f(x, y) + A[x, y, \psi^*(\overset{x}{\underset{0}{t}}, \overset{b}{\underset{0}{z}})] + \lambda \int_0^b K(x, y, z)\, \psi^*(x, z) dz$$

che, ponendovi $A[x, y, \psi^*(t, z)] = \gamma(x, y)$ (funzione nota), può essere considerata un'equazione di FREDHOLM e darci perciò la $\psi^*(x, y)$ sotto la forma

$$\psi^*(x, y) = f(x, y) + \gamma(x, y) - \lambda \int_0^b \Gamma(x, y, z; \lambda) \{f(x, z) + \gamma(x, z)\} dz.$$

Ora osserviamo che

$$|\gamma(x, y)| \leq |A[x, y, \overset{x\ b}{\underset{0\ 0}{0}}]| + |A[x, y, \psi^*(\overset{x\ b}{\underset{0\ 0}{t,\ z}})] - A[x, y, \overset{x\ b}{\underset{0\ 0}{0}}]|;$$

considerando solo valori di x soddisfacenti alla relazione $\Lambda - \frac{1}{2M'(1+L)} \leq x < \Lambda$ e applicando la (C_1') al primo termine del secondo membro, la (C_4) all'ultimo facendovi $x_0 = \lambda - \frac{1}{2M'(1+L)}$ si ha

$$|\gamma(x, y)| \leq M_0 + M' \left\{ \left(\Lambda - \frac{1}{2M'(1+L)} \right) \Psi + \frac{1}{2M'(1+L)} \Phi(x) \right\}.$$

Dopo di ciò si ricava

$$|\psi^*(x, y)| \leq N(1 + bL) + M_0(1 + bL) + M' \left\{ \Psi + \frac{1}{2M'(1+L)} \Phi(x) \right\} (1 + bL)$$

da cui

$$\Phi(x) \leq (N + M_0 + M'\Psi)(1 + L) + \frac{1}{2} \Phi(x)$$

e infine

$$\Phi(x) \leq 2(N + M_0 + M'\Psi)\ (1 + L)$$

il che mostra che $\psi^*(x, y)$ è limitata per ogni y di $(0, b)$ e per ogni x soddisfacente a $0 \leq x < \Lambda$.

Si conclude che la (1) nelle ipotesi poste ammette soluzione finita e continua in tutto $B(0, 1)$.