ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

LAMBERTO CESARI

**Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 163-186

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_163_0>

# UN NUOVO CRITERIO DI STABILITÀ PER LE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

di LAMBERTO CESARI (Pisa) (¹).

Il problema della stabilità delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + \varphi(x)y = 0 \tag{1}$$

è stato studiato da molti autori (²) e, nell'ipotesi che esista il $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = a$, $a > 0$, si conoscono sostanzialmente due condizioni sufficienti per detta stabilità e cioè che $\varphi(x) - a$ sia assolutamente integrabile in $(x_0, \infty)$ (³), oppure a variazione limitata in $(x_0, \infty)$ (⁴).

Per le equazioni differenziali lineari di ordine $n$ è noto il seguente

TEOREMA I (⁵). - Se le funzioni $f_\lambda(x)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, anche complesse, hanno determinati e finiti i limiti $\lim\limits_{x\to\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda$ e le funzioni $f_\lambda(x) - a_\lambda$ sono assoluta-

---

(¹) Lavoro eseguito nel Seminario di Alta Matematica della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(²) Si veda ad es. A. WIMAN: *Ueber die reellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Archiv för Mat. Astr. ecc. Stockolm, Bd. 12 (1917); M. MATELL: *Asymptotische Eigenschaften gewisser linearer Differential Gleichungen.* Upsala (1924), Appelbergs Boktrykeri Aktielbolag; P. FATOU: *Sur un critère de stabilité.* Comptes Rendus, T. 189, (1929), pp. 967-969; R. CACCIOPOLI: *Sopra un criterio di stabilità.* Rend. Acc. Lincei, S. VI, T. 11 (1930), pp. 251-254; O. PERRON: *Ueber ein vermeintliches Stabilitätskriterium.* Nachrichten der Math. Gesell. zu Göttingen, (1930), pp. 28-29; M. FUKUHARA e M. NAGUMO: *On a condition of stability for a differential equation.* Proceedings of Imp. Akad. Tokio, T. 6, (1930), pp. 131-132; M. BIERNACKI: *Sur l'équation différentielle* $\ddot{x} + A(t)x = 0$. Prace Math. Fiz., 40 (1933) pp. 163-171; A. WIMAN: *Ueber eine Stabilitätsfrage in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Acta Math. 66 (1936), pp. 121-145; G. SANSONE: *Sopra il comportamento asintotico delle soluzioni di un'equazione differenziale della dinamica.* Scritti Mat. off. a Luigi Berzolari, Pavia (1936), pp. 385-403; Z. BUTLEWSKI: *Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre.* Mathematica, Vol. XII (1936), pp. 36-48.

(³) Vedi M. FUKUHARA e M. NAGUMO, loc. cit. in (²),

(⁴) Vedi in particolare A. WIMANN, i due lavori cit. in (²) e R. CACCIOPOLI, loc. cit. in (²).

(⁵) M. HUKUHARA: *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires.* Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. II (1934), pp. 13-88. Vedasi un'altra dimostrazione in L. CESARI: *Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari.* Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa. S. II, Vol. VIII (1939), pp. 131-148 mente integrabili in $(x_0, \infty)$; se tutti gli integrali dell'equazione differenziale

$$z^{(n)}+a_1 z^{(n-1)}+....+a_n z=0 \tag{2}$$

sono limitati; allora anche tutti gli integrali dell'equazione differenziale

$$y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+....+f_n(x)y=0 \tag{3}$$

sono limitati ([6]).

Una analoga estensione alle equazioni differenziali di ordine $n$ della condizione che la funzione $\varphi(x)$ sia a variazione limitata in $(x_0, \infty)$ non è a prima vista possibile. Infatti l'equazione

$$y''-\frac{2}{x}y'+y=0 \tag{4}$$

i cui coefficienti sono tutti a variazione limitata nell'intervallo $(1, \infty)$ e tendono a quelli dell'equazione $z''+z=0$ ad integrali limitati, ha gli integrali $\operatorname{sen} x - x\cos x$ e $\cos x + x \operatorname{sen} x$ che sono non limitati.

Tuttavia si osservi che l'equazione

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0 \tag{5}$$

ha gli integrali $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $\dfrac{\cos x}{x}$ che sono limitati.

Il diverso comportamento degli integrali della (4) e della (5) è dovuto al segno diverso del primo coefficiente, ciò che può essere interpretato in modo assai elegante come segue: Consideriamo per ogni $x$ abbastanza grande le radici, dipendenti da $x$, dell'equazione algebrica

$$\varrho^2(x)\mp\frac{2}{x}\varrho(x)+1=0.$$

Noi vediamo che, col segno superiore, le radici (complesse) $\varrho_1(x)$ e $\varrho_2(x)$ hanno parte reale positiva e, col segno inferiore, hanno parte reale negativa, tendendo in entrambi i casi ai valori $+i$ e $-i$, sull'asse immaginario, quando $x\to\infty$. Questa osservazione ci ha condotti ad enunciare il seguente

TEOREMA II. - *Se le funzioni $f_\lambda(x)$, $\lambda=1, 2,...., n$, anche complesse, sono a variazione limitata in $(x_0, \infty)$; se, posto $\lim f_\lambda(x)=a_\lambda$, tutti gli integrali dell'equazione differenziale (2) sono limitati; se le radici, dipendenti da $x$ $\varrho_1(x),...., \varrho_n(x)$, dell'equazione*

$$\varrho^n+f_1(x)\varrho^{n-1}+....+f_n(x)=0$$

---

([6]) Nel mio lavoro cit. in ([5]) ho dimostrato questo teorema nell'ipotesi che le funzioni $f_\lambda(x)$, $\lambda=1, 2,...., n$, siano continue in un intervallo $(x_0, \infty)$. Per una dimostrazione indipendente da tale ipotesi e del tutto elementare vedasi L. CESARI: *Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie*. Rend. Semin. Mat. della R. Università di Roma, Ser. IV, Vol. III, pp. 171-193. Ricordo qui che se tutti gli integrali dell'equazione (3) sono limitati, essi sono anche tutti stabili.

*hanno in* $(x_0, \infty)$ *parte reale non positiva; allora anche tutti gli integrali dell'equazione differenziale* (3) *sono limitati.*

Il teorema I, già noto, e il teorema II, per la prima volta qui enunciato, sono casi particolari del seguente più generale teorema che dimostriamo nel presente lavoro.

TEOREMA III. - *Se le funzioni* $f_\lambda(x)$, $\lambda=1, 2,...., n$, *sono a variazione limitata in* $(x_0, \infty)$ *e* $\lim\limits_{x\to\infty} f_\lambda(x)=0$, $\lambda=1, 2,...., n$; *se le funzioni* $\varphi_\lambda(x)$, $\lambda=1, 2,...., n$, *sono assolutamente integrabili in* $(x_0, \infty)$; *se* $\sigma_1, \sigma_2,...., \sigma_\nu$ *sono le radici distinte dell'equazione*

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + .... + a_n = 0$$

*e* $\sigma_1, \sigma_2,...., \sigma_\nu$ *hanno tutte parte reale non positiva e quelle a parte reale nulla sono semplici; se le radici dell'equazione*

$$\varrho^n(x) + [a_1 + f_1(x)]\,\varrho^{n-1}(x) + .... + [a_n + f_n(x)] = 0$$

*hanno in* $(x_0, \infty)$ *tutte parte reale non positiva; allora tutti gli integrali dell'equazione differenziale*

$$y^{(n)} + [a_1 + f_1(x) + \varphi_1(x)]\,y^{(n-1)} + .... + [a_n + f_n(x) + \varphi_n(x)]\,y = 0$$

*sono limitati.*

Per i sistemi di equazioni differenziali lineari vale una proposizione analoga alla precedente.

TEOREMA IV. - *Se le funzioni* $f_{\lambda\mu}(x)$, $\lambda, \mu=1, 2,...., n$, *sono a variazione limitata in* $(x_0, \infty)$ *e se* $\lim f_{\lambda\mu}(x)=0$, $\lambda, \mu=1, 2,...., n$; *se le funzioni* $\varphi_{\lambda\mu}(x)$, $\lambda, \mu=1, 2,...., n$, *sono assolutamente integrabili in* $(x_0, \infty)$; *se le radici dell'equazione*

$$| a_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}\, \varrho | = 0$$

*hanno tutte parte reale non positiva e quelle a parte reale nulla sono semplici* (7); *se le radici dell'equazione*

$$| a_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}(x) - \delta_{\lambda\mu}\, \varrho(x) | = 0$$

*hanno in* $(x_0, \infty)$ *parte reale non positiva; allora tutti gli integrali del sistema di equazioni differenziali*

$$y'_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} [a_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}(x) + \varphi_{\lambda\mu}(x)]\, y_\mu(x), \qquad \lambda=1, 2,...., n$$

*sono limitati.*

---

(7) Si veda su questa condizione quanto è detto nell'osservazione alla fine del presente lavoro.

È pure utile conoscere il comportamento all'infinito degli integrali delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali lineari non omogenei. Ci siamo già occupati di tale problema in una nostra precedente memoria [8]. Qui vogliamo aggiungere i due seguenti teoremi.

TEOREMA V. - *Se sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema III; se esiste il* $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = b$ *e la funzione* $\varphi(x) - b$ *è assolutamente integrabile in* $(x_0, \infty)$; *se è soddisfatta una delle seguenti condizioni*

$$a) \quad \sigma_\lambda \neq 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots, \nu,$$
$$b) \quad b = 0;$$

*allora l'equazione differenziale*

$$y^{(n)} + [a_1 + f_1(x) + \varphi_1(x)]\, y^{(n-1)} + \dots + [a_n + f_n(x) + \varphi_n(x)] y = \varphi(x)$$

*ha gli integrali tutti limitati.*

TEOREMA VI. - *Se sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema IV; se esistono i limiti* $\lim_{x\to\infty} \varphi_\lambda(x) = b_\lambda$ *e le funzioni* $\varphi_\lambda(x) - b_\lambda$ *sono assolutamente integrabili in* $(x_0, \infty)$, $\lambda = 1, 2, \dots, n$; *se è soddisfatta una delle seguenti condizioni*

$$a) \quad \sigma_\lambda \neq 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots, \nu,$$
$$b) \quad b_\lambda = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots, n;$$

*allora il sistema di equazioni differenziali*

$$y'_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} [a_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}(x) + \varphi_{\lambda\mu}(x)]\, y_\mu(x) + \varphi_\lambda(x), \qquad \lambda = 1, 2, \dots, n,$$

*ha gli integrali tutti limitati* [9].

* * *

1. - Poichè l'equazione differenziale lineare di ordine $n$ considerata nel teorema III può essere ricondotta ad un sistema di equazioni differenziali del tipo considerato nel teorema IV, il teorema III è una conseguenza del teorema IV. Basta dunque dimostrare questo ultimo teorema. Analogamente il teorema V è una conseguenza del teorema VI. Premettiamo alcuni Lemmi.

---

(8) Loc. cit. in (6).

(9) Nel lavoro cit. in (6) ho già dimostrato con esempi che la tesi di questi teoremi può non essere più vera se vengono a mancare entrambe le condizioni *a*) e *b*).

2. - *Lemma I.* - *Se* $a_1(t)$, $a_2(t), \ldots, a_n(t)$, $a \leq t \leq b$ [10], *sono funzioni complesse del parametro reale* $t$ *continue in un punto* $t_0$, *esistono* $n$ *funzioni* $\varrho_1(t), \ldots, \varrho_n(t)$ *continue in* $t_0$, *che soddisfano per ogni* $t$ *l'equazione*

$$\varrho^n + a_1(t)\,\varrho^{n-1} + \ldots + a_n(t) = 0. \tag{6}$$

*Se* $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ *sono continue in tutto* $(a, b)$ *anche* $\varrho_1(t), \ldots, \varrho_n(t)$ *sono continue in tutto* $(a, b)$.

La proprietà contenuta in questo Lemma è così comune che riteniamo inutile ripeterne qui la dimostrazione [11].

3. - Siano $a_1(t)$, $a_2(t), \ldots, a_n(t)$ funzioni complesse definite in $(a, \infty)$ ed esistano finiti i limiti $\lim\limits_{t\to\infty} a_\lambda(t) = b_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Se $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sono le radici dell'equazione

$$\varrho^n + b_1\,\varrho^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{7}$$

il Lemma I afferma che

$$\lim_{t\to\infty} \varrho_\lambda(t) = \sigma_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n.$$

Vale ora il

*Lemma II.* - *Se* $a_1(t)$, $a_2(t), \ldots, a_n(t)$, $a \leq t < \infty$, *sono funzioni complesse del parametro reale* $t$, *a variazione limitata in* $(a, \infty)$, *se* $b_\lambda = \lim\limits_{t\to\infty} a_\lambda(t)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, *e* $\sigma_i$ *è una radice semplice dell'equazione* (7), *allora esiste un intervallo* $(\bar{t}, \infty)$ $(\bar{t} \geq a)$ *nel quale la radice* $\varrho_i(t)$ *della* (6) *è sempre semplice e a variazione limitata.*

Siano $v_1(t)$, $v_2(t), \ldots, v_n(t)$ le variazioni totali di $a_1(t)$, $a_2(t), \ldots, a_n(t)$ in $(a, t)$ e sia $v(t)$ una qualsiasi funzione non decrescente e limitata che cresca in ogni intervallo almeno quanto ciascuna delle funzioni $v_\lambda(t)$, cioè tale che per ogni $t > t' \geq a$

$$v(t) - v(t') \geq \max_{\lambda=1,2,\ldots,n} [v_\lambda(t) - v_\lambda(t')] \quad [12].$$

Poniamo $v = \lim\limits_{t\to\infty} v(t)$, $V = v + \max\limits_{\lambda=1,2,\ldots,n} |b_\lambda|$.

Consideriamo l'equazione

$$f(\varrho) = \varrho^n + b_1\,\varrho^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

---

(10) Non si esclude qui che $a$ e $b$ possano essere infiniti.

(11) Si veda ad esempio L. Bianchi - *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, ecc. Vol. I. (Zanichelli, 1928).

(12) Ad esempio $v_0(t) = \sum\limits_{\lambda=1}^{n} v_\lambda(t)$ gode di questa proprietà.

Se $\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_\nu'$ sono le sue radici distinte (di molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$), sia $3\delta$ la loro minima distanza e siano $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ le circonferenze di centri $\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_\nu'$ e raggio $\delta$ del piano complesso $\varrho$. La funzione $f(\varrho)$ non si annulla mai sulle circonferenze $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ e avrà su esse un minimo modulo non nullo $m > 0$.

Poniamo

$$F(\varrho, t) = \varrho^n + a_1(t)\varrho^{n-1} + \ldots + a_n(t)$$

e inoltre

$$M = \max\,[1, |\sigma_1'| + \delta, \ldots, |\sigma_\nu'| + \delta].$$

Sia $\bar{t}$ un punto ($\bar{t} \geqslant a$) tale che

$$v - v(\bar{t}) \leqslant \frac{m}{2nM^n}, \quad \frac{m^2}{8\delta n^3 M^{2n} V}.$$

È allora su $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$, per ogni $\bar{t} \leqslant t < \infty$,

$$|b_\lambda - a_\lambda(t)| \leqslant \frac{m}{2nM^n}, \quad \frac{m^2}{8\delta n^3 M^{2n} V},$$

$$|F(\varrho, t) - f(\varrho)| < nM^n \frac{m}{2nM^n} = \frac{m}{2}, \quad |F(\varrho, t)| \geqslant \frac{m}{2},$$

$$|F(\varrho, t)| < nM^n V, \qquad |f(\varrho)| < nM^n V,$$

$$|F_\varrho(\varrho, t)| < n^2 M^n V, \quad |f'(\varrho)| < n^2 M^n V.$$

È inoltre

$$|F(\varrho, t) - f(\varrho)| \leqslant nM^n \frac{m^2}{8\delta n^3 M^{2n} V} = \frac{m^2}{8\delta n^2 M^n V},$$

$$|F_\varrho(\varrho, t) - f'(\varrho)| \leqslant n^2 M^n \frac{m^2}{8\delta n^3 M^{2n} V} = \frac{m^2}{8\delta\, n M^n V},$$

$$\left| \frac{F_\varrho(\varrho, t)}{F(\varrho, t)} - \frac{f'(\varrho)}{f(\varrho)} \right| \leqslant \frac{1}{m\left(\frac{m}{2}\right)} \left[ nM^n V \frac{m^2}{8\delta n M^n V} + n^2 M^n V \frac{m^2}{8\delta n^2 M^n V} \right] = \frac{1}{2\delta}$$

e quindi

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{F_\varrho(\varrho, t)}{F(\varrho, t)}\, d\varrho - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{f'(\varrho)}{f(\varrho)}\, d\varrho \right| < \frac{1}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

e non potendo gli integrali indicati assumere altro che valori interi ([13]) si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{F_\varrho(\varrho, t)}{F(\varrho, t)}\, d\varrho = m_i, \quad i = 1, 2, \ldots \nu, \quad \bar{t} \leqslant t < \infty.$$

Cioè in ognuna delle circonferenze $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ sono contenute per ogni $\bar{t} \leqslant t < \infty$ tante radici della (6) quanto è l'ordine di molteplicità di $\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_\nu'$.

---

([13]) Loc. cit. in ([11]).

Sia ora $\sigma$ una delle radici semplici $(m=1)$, $\varrho(t)$ la corrispondente radice della (6) e $C$ la circonferenza corrispondente; si ha

$$\varrho(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_\varrho(\varrho, t)}{F(\varrho, t)}\,\varrho\, d\varrho .$$

Se $t_0$ e $t_1$ sono punti di $(\bar{t}, \infty)$ si ha pure

$$|\varrho(t_0)-\varrho(t_1)|<\delta\frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)^2}\left[nM^nV\cdot n^2M^n+n^2M^nV\cdot nM^n\right]|v(t_0)-v(t_1)|=$$
$$=\frac{8\delta n^3M^{2n}V}{m^2}\,|v(t_0)-v(t_1)|$$

e se infine $t_1$, $t_2$,...., $t_r$ sono $r$ punti consecutivi di $(\bar{t}, \infty)$ si ha

$$\sum_{i=1}^{r-1}|\varrho(t_i)-\varrho(t_{i+1})|<C\sum_{i=1}^{r-1}|v(t_i)-v(t_{i+1})|\leqslant Cv. \tag{8}$$

Se diciamo $w(t)$ la variazione totale di $\varrho(t)$ in $(\bar{t}, t)$ si ha infine

$$w(t)\leqslant Cv(t).$$

*Osservazione.* - La dimostrazione del Lemma II, mostra che il numero $\bar{t}$ del Lemma II può farsi dipendere soltanto dalla funzione $v(t)$ e dai numeri $b_1$, $b_2$,...., $b_n$ e che pure la costante $C$ della (8) dipende solo da $v(t)$ e da $b_1$, $b_2$,...., $b_n$.

4. - *Lemma III.* - *Se* $a_1(t)$, $a_2(t)$,..... $a_n(t)$, $a\leqslant t<\infty$, *sono funzioni complesse del parametro reale* $t$, *assolutamente continue e a variazione limitata in* $(a, \infty)$; *se* $b_\lambda=\lim\limits_{t\to\infty}a_\lambda(t)$, $\lambda=1, 2,...., n$, *e* $\sigma_i$ *è una radice semplice dell'equazione* (7); *allora esiste un intervallo* $(\bar{t}, \infty)$ $(\bar{t}\geqslant a)$ *nel quale la radice* $\varrho_i(t)$ *della* (6) *è sempre semplice, assolutamente continua e a variazione limitata.*

Se $v_\lambda(t)$ è la variazione totale di $a_\lambda(t)$ in $(a, t)$, $\lambda=1, 2,...., n$, si ponga

$$v_0(t)=\sum_{\lambda=1}^{n}v_\lambda(t).$$

Si può ora ripetere parola per parola il ragionamento fatto per il Lemma II sostituendo alla $v(t)$ la funzione $v_0(t)$. Ma qui $v_0(t)$ è una funzione assolutamente continua e perciò la (8) mostra che pure le radici $\varrho(t)$ considerate sono assolutamente continue in $(a, \infty)$ e di più a variazione limitata in $(a, \infty)$. Dimostrato ciò sia $v(t)$ una qualsiasi funzione non decrescente e limitata che in ogni intervallo cresca almeno quanto ciascuna delle funzioni $v_\lambda(t)$, cioè tale che per ogni $t>t'\geqslant a$

$$v(t)-v(t')\geqslant\max_{\lambda=1, 2,..., n}[v_\lambda(t)-v_\lambda(t')].$$

Si ha ancora

$$w(t) \leqslant Cv(t)$$

ove $C$ può farsi dipendere soltanto da $v(t)$ e da $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

**5.** - *Dimostrazione del Teorema IV.* - Consideriamo il sistema

$$y'_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} [a_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}(x) + \varphi_{\lambda\mu}(x)]\, y_\mu(x) \tag{9}$$

e supponiamo in un primo momento che oltre a tutte le ipotesi contenute nell'enunciato del teorema IV siano verificate le seguenti

1ª) *Le funzioni* $f_{\lambda\mu}(x)$ *sono assolutamente continue in* $(x_0, \infty)$*;*

2ª) *Posto*

$$v_{\lambda\mu}(x) = \int_{x_0}^{x} |f'_{\lambda\mu}(x)|\, dx,$$

*sia data una funzione* $v(x)$ *non decrescente e monotona che cresca in ogni intervallo almeno quanto ciascuna delle funzioni* $v_{\lambda\mu}(x)$; *sia cioè per ogni* $x_0 \leqslant x' \leqslant x < \infty$

$$v(x) - v(x') \geqslant \max_{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n} [v_{\lambda\mu}(x) - v_{\lambda\mu}(x')] \quad (^{14}).$$

**6.** - Consideriamo le equazioni

$$|a_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}(x) - \delta_{\lambda\mu}\, \varrho(x)| = 0 \qquad \varrho_1(x),\ \varrho_2(x), \ldots, \varrho_n(x) \tag{10}$$

$$|a_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}\, \sigma| = 0 \qquad \sigma_1,\ \sigma_2, \ldots, \sigma_n \tag{10'}$$

le cui radici, reali o complesse, distinte o coincidenti, abbiamo a fianco indicate.

La (10) scritta per disteso è una equazione algebrica i cui coefficienti sono funzioni assolutamente continue e a variazione limitata in $(x_0, \infty)$ che tendono per $x \to \infty$ a quelli della (10'). Esisterà per essi una funzione $v_1(x)$ che può farsi dipendere *soltanto* da $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$ e avente le proprietà viste per la funzione $v(t)$ nella dimostrazione del Lemma III.

Siano $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ le eventuali $p$ radici a parte reale nulla e semplici siano $\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_q'$ le rimanenti radici che saranno a parte reale negativa e di molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_q$, $m_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Sarà dunque

$$p + m_1 + m_2 + \ldots + m_q = n.$$

Consideriamo di nuovo il numero $3\delta$ visto nel Lemma II che penseremo ora definito come il più piccolo dei numeri $|\sigma_i - \sigma_{i'}|$, $|\sigma_i - \sigma'_l|$, $|\sigma_l - \sigma'_{l'}|$, $|R(\sigma'_l)|$,

---

(14) Ad esempio $v_0(x) = \sum_{\lambda, \mu=1}^{n} v_{\lambda\mu}(x)$ gode di tale proprietà.

$i, i'=1, 2,...., p$, $l, l'=1, 2,...., q$. Siano $C_1, C_2,...., C_p, C_1', C_2',...., C_q'$ le circonferenze di centri $\sigma_1,...., \sigma_p, \sigma_1',...., \sigma_q'$ e raggio $\delta$. Dette circonferenze sono esterne l'una all'altra e $C_1',...., C_q'$ giacciono completamente a sinistra dell'asse immaginario.

Per quanto si è visto nella dimostrazione dei Lemmi II e III esiste un $x_1 \geqslant x_0$ tale che per ogni $x \geqslant x_1$, $\varrho_1(x)$ è interna a $C_1,....$, $\varrho_p(x)$ è interna a $C_p$; $m_1$ ulteriori radici $\varrho(x)$ sono interne a $C_1',....$, $m_q$ ulteriori radici sono interne a $C_q'$. Osserviamo più precisamente che $\varrho_1(x), \varrho_2(x),...., \varrho_p(x)$ sono interne al semicerchio di $C_1, C_2,...., C_p$ a sinistra dell'asse immaginario o al più sono sull'asse immaginario stesso. Osserviamo infine che $x_1$ può farsi dipendere *soltanto* dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$ e da $v(x)$.

7. - Consideriamo la radice semplice $\sigma_1$ e il determinante $|a_{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu}\sigma_1|$ di nullità 1. Sia $a_{r\mu}-\delta_{r\mu}\sigma_1$, $\mu=1, 2,...., n$, una sua riga dipendente linearmente dalle altre, onde i relativi minori di ordine $n-1$, $D_{r\mu}(\sigma_1)$ non sono tutti nulli.

Poniamo $\xi_\mu=(-1)^\mu D_{r\mu}(\sigma_1)$, $\mu=1, 2,...., n$, cosicchè

$$\sum_{\mu=1}^{n} (a_{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu}\sigma_1)\,\xi_\mu=0, \qquad \lambda=1, 2,...., n.$$

Per fissare le idee sia ad esempio $\xi_1=-D_{r1}(\sigma_1)\neq 0$ cosicchè posto

$$A=\|a_{\lambda\mu}\|, \quad U=\left\|\begin{matrix} \xi_1 & 0 \ldots & 0 \\ \xi_2 & 1 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_n & 0 \ldots & 1 \end{matrix}\right\|, \qquad U^{-1}=\left\|\begin{matrix} 1/\xi_1 & 0 \ldots & 0 \\ -\xi_2/\xi_1 & 1 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\xi_n/\xi_1 & 0 \ldots & 1 \end{matrix}\right\|,$$

risulta

$$B=U^{-1}A\,U=\left\|\begin{matrix} \sigma_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

La matrice quadrata $\|b_{\lambda\mu}\|$, $\lambda, \mu=2, 3,...., n$, ha le radici caratteristiche $\sigma_2,...., \sigma_n$ tutte diverse da $\sigma_1$, onde posto $\mathfrak{D}(\sigma_1)=|b_{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu}\sigma_1|\neq 0$, ha soluzione il sistema

$$\sum_{\lambda=2}^{n} (b_{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu}\,\sigma_1)\,\tau_\lambda=-b_\mu, \qquad \mu=2, 3,...., n.$$

Poniamo

$$V=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ \tau_2 & 1 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_n & 0 \ldots & 1 \end{matrix}\right\|, \qquad V^{-1}=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ -\tau_2 & 1 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\tau_n & 0 \ldots & 1 \end{matrix}\right\|,$$

cosicchè

$$C=V^{-1}BV=\left\|\begin{matrix}\sigma_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{matrix}\right\|.$$

La matrice $\|c_{\lambda\mu}\|$ ha le radici caratteristiche $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$.

Consideriamo ora la radice semplice $\varrho_1(x)=\sigma_1+\varepsilon(x)$, ove $\varepsilon(x)$ tende a zero per $x\to\infty$ e, come sappiamo dal Lemma III, $\varepsilon(x)$ è una funzione assolutamente continua e a variazione limitata in $(x_1, \infty)$. Consideriamo il determinante $|a_{\lambda\mu}+ f_{\lambda\mu}(x)-\delta_{\lambda\mu}\varrho_1(x)|$ identicamente nullo per ogni $x$, ma di nullità 1 per $x\geqslant x_1$. Consideriamo infine i minori di ordine $n-1$ della sua riga $r^{\text{ma}}$, ove $r$ è il medesimo indice scelto avanti. Per semplicità indichiamo questi minori con $D_{r\mu}[\varrho_1(x)]$, $\mu=1, 2, \dots, n$. Si ha intanto

$$\lim_{x\to\infty} D_{r\mu}[\varrho_1(x)]=D_{r\mu}(\sigma_1), \qquad D_{r\mu}[\varrho_1(x)]=D_{r\mu}(\sigma_1)+\delta_{r\mu}(x), \qquad \mu=1, 2, \dots, n,$$

ove le funzioni $\delta_{r\mu}(x)$, come somme di prodotti delle funzioni $f_{\lambda\mu}(x)$, $\varepsilon(x)$ e delle costanti $a_{\lambda\mu}$, sono tutte funzioni assolutamente continue e a variazione limitata in $(x_1, \infty)$.

Esisterà poi un $x_2\geqslant x_1$ tale che per ogni $x\geqslant x_2$ è

$$|D_{r1}[\varrho_1(x)]|\geqslant\frac{1}{2}|D_{r1}(\sigma_1)|. \tag{11}$$

È facile riconoscere che tale $x_2\geqslant x_1$ può farsi dipendere soltanto da $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$.

Poniamo come sopra $\xi_\mu(x)=(-1)^\mu D_{r\mu}[\varrho_1(x)]$ e definiamo la matrice $U(x)$ in modo analogo a quanto si è fatto avanti per la matrice $U$. Esiste allora la matrice inversa $U^{-1}(x)$ che è dello stesso tipo di $U^{-1}(x)$ e, tenendo conto della (11), gli elementi della sua prima colonna differiscono dai corrispondenti di $U$ per funzioni tendenti a zero, assolutamente continue e a variazione limitata in $(x_2, \infty)$.

Posto $A(x)=\|a_{\lambda\mu}+f_{\lambda\mu}(x)\|$, risulta

$$B(x)=U^{-1}(x)\,A(x)\,U(x)=\left\|\begin{matrix}\varrho_1(x) & b_2(x) & \dots & b_n(x)\\ 0 & b_{22}(x) & \dots & b_{2n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & b_{n2}(x) & \dots & b_{nn}(x)\end{matrix}\right\|$$

ove

$$b_\mu(x)=b_\mu+\beta_\mu(x), \qquad b_{\lambda\mu}(x)=b_{\lambda\mu}+\beta_{\lambda\mu}(x), \qquad \lambda, \mu=2, 3, \dots, n,$$

e le funzioni $\beta_\mu(x)$, $\beta_{\lambda\mu}(x)$ tendono a zero per $x\to\infty$, sono assolutamente continue e a variazione limitata in $(x_2, \infty)$.

La matrice quadrata $\| b_{\lambda\mu}(x) \|$ ha radici caratteristiche $\varrho_2(x),\ldots, \varrho_n(x)$ tutte distinte da $\varrho_1(x)$ per $x \geqslant x_1$ e d'altra parte, posto $\mathfrak{D}[\varrho_1(x)] = | b_{\lambda\mu}(x) - \delta_{\lambda\mu}\varrho_1(x) |$, si ha

$$\lim_{x\to\infty} \mathfrak{D}[\varrho_1(x)] = \mathfrak{D}(\sigma_1), \qquad \mathfrak{D}[\varrho_1(x)] = \mathfrak{D}(\sigma_1) + \delta(x)$$

ove $\delta(x)$ è una funzione assolutamente continua e a variazione limitata. Esisterà infine un numero $x_3 \geqslant x_2$ tale che per ogni $x \geqslant x_3$ sia

$$|\mathfrak{D}[\varrho_1(x)]| \geqslant \frac{1}{2} |\mathfrak{D}(\sigma_1)|. \tag{12}$$

Anche qui è facile riconoscere che $x_3 \geqslant x_2$ dipende soltanto da $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$.

Esiste allora per ogni $x \geqslant x_3$ la soluzione del sistema

$$\sum_{\lambda=2}^{n} [b_{\lambda\mu}(x) - \delta_{\lambda\mu}\varrho_1(x)]\, \tau_\lambda(x) = -b_\mu(x)$$

e si ha

$$\lim_{x\to\infty} \tau_\lambda(x) = \tau_\mu, \qquad \tau_\mu(x) = \tau_\mu + \eta_\mu(x). \qquad \mu = 2, 3,\ldots, n,$$

ove, tenendo conto della (12), le funzioni $\eta_\mu(x)$ sono assolutamente continue e a variazione limitata in $(x_3, \infty)$.

Definita infine la matrice $V(x)$ in modo analogo alla $V$ si ha

$$C(x) = V^{-1}(x) B(x) V(x) = \begin{Vmatrix} \varrho_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{22}(x) & \ldots & c_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{n2}(x) & \ldots & c_{nn}(x) \end{Vmatrix}$$

ove, posto $c_{\lambda\mu}(x) = c_{\lambda\mu} + \gamma_{\lambda\mu}(x)$, le funzioni $\gamma_{\lambda\mu}(x)$ tendono a zero per $x \to \infty$ e sono assolutamente continue in $(x_3, \infty)$.

La matrice $\| c_{\lambda\mu}(x) \|$ ha le radici caratteristiche $\varrho_2(x),\ldots, \varrho_n(x)$.

Poniamo $W(x) = \| w_{\lambda\mu}(x) \| = U(x) V(x)$. La matrice $W(x)$ è dotata di inversa $W^{-1}(x) = V^{-1}(x)\, U^{-1}(x) = \| \overline{w}_{\lambda\mu}(x) \|$ e i rispettivi elementi $w_{\lambda\mu}(x)\; \overline{w}_{\lambda\mu}(x)$ sono tutte funzioni limitate, assolutamente continue e a variazione limitata in $(x_3, \infty)$.

Consideriamo il sistema (9) che scriviamo, mediante il simbolismo delle matrici, come segue

$$Y'(x) = [A(x) + \Phi(x)]\, Y(x) \tag{9'}$$

$$A(x) = \| a_{\lambda\mu}(x) + f_{\lambda\mu}(x) \|, \qquad \Phi(x) = \| \varphi_{\lambda\mu}(x) \|, \qquad Y(x) = \begin{Vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{Vmatrix}. \quad [15]$$

---

[15] Se $H(x) = \| h_{\lambda\mu}(x) \|$ è una matrice i cui elementi sono funzioni derivabili di un parametro $x$, si dice derivata di $H(x)$ la matrice $H'(x) = \| h'_{\lambda\mu}(x) \|$.

Eseguiamo allora sul sistema (9) la trasformazione

$$Y(x) = W(x)\,\overline{Y}(x), \qquad \overline{Y}(x) = W^{-1}(x)\,Y(x).$$

Si ha

$$\overline{Y}'(x) = W^{-1}(x)\,Y'(x) + [W^{-1}(x)]'\,Y(x) =$$
$$= W^{-1}(x)A(x)\,W(x)\,\overline{Y}(x) + W^{-1}(x)\,\Phi(x)\,W(x)\,\overline{Y}(x) + [W^{-1}(x)]'\,W(x)\,\overline{Y}(x)$$

e posto

$$\Psi(x) = W^{-1}(x)\,\Phi(x)\,W(x) + [W^{-1}(x)]'\,W(x) \equiv \|\psi_{\lambda\mu}(x)\|$$

si ha

$$\overline{Y}'(x) = [C(x) + \Psi(x)]\,\overline{Y}(x), \tag{13}$$

ove gli elementi $\psi_{\lambda\mu}(x)$ della matrice $\Psi(x)$ sono tutte funzioni di $x$ assolutamente integrabili in $(x_3, \infty)$.

Noi abbiamo così trasformato il sistema (9) nel sistema (13) e poichè gli elementi $W_{\lambda\mu}(x)$ e $W_{\lambda\mu}(x)$ sono limitati, condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le soluzioni del sistema (9) siano limitate è che altrettanto accada delle soluzioni del sistema (13).

Di più osserviamo che, posto

$$\varphi(x) = \max_{\lambda,\,\mu=1,\,2,\dots,\,n} |\varphi_{\lambda\mu}(x)|, \qquad f_0(x) = \max_{\lambda,\,\mu=1,\,2,\dots,\,n} |f'_{\lambda\mu}(x)|,$$

esiste una costante $C$ tale che per ogni $\lambda$, $\mu$

$$|\psi_{\lambda\mu}(x)| < C[\varphi(x) + f_0(x)].$$

È facile riconoscere che la costante $C$ dipende soltanto dalla funzione $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$.

8. - Il ragionamento che è stato fatto avanti può essere ripetuto sul sistema (13) prendendo in considerazione la successiva radice *semplice* $\varrho_2(x)$.

La nuova trasformazione non altererà più la prima riga e la prima colonna della matrice $C(x)$ e ne renderà invece nulli i termini della seconda riga e della seconda colonna eccetto il principale che diventerà $\varrho_2(x)$. E così di seguito per tutte le $p$ radici *semplici* in modo che dopo $p$ trasformazioni del tipo sopra indicato il sistema (9) sarà trasformato nel seguente

$$y'(x) = [D(x) + \Xi(x)]\,y(x) \tag{14}$$

dove

$$D(x)=\left\|\begin{array}{cccccc} \varrho_1(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \varrho_p(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{11}(x) & \dots & d_{1m}(x) \\ 0 & \dots & 0 & d_{21}(x) & \dots & d_{2m}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & d_{m1}(x) & \dots & d_{mm}(x) \end{array}\right\|, \qquad m=n-p=m_1+m_2+\dots+m_q$$

$$\Xi(x)=\|\bar{\chi}_{\lambda\mu}(x)\|.$$

Le funzioni $d_{\lambda\mu}(x)$ sono assolutamente continue e a variazione limitata in un certo intervallo $(x_{2p+1}, \infty)$, la matrice $\|d_{\lambda\mu}(x)\|$ ha le radici caratteristiche $\varrho_1'(x),\dots,$ $\varrho'_m(x)$ e infine le funzioni $\bar{\chi}_{\lambda\mu}(x)$ sono assolutamente integrabili in $(x_{2p+1}, \infty)$. Inoltre esiste una costante $C$ che dipende soltanto da $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$ tale che

$$|\bar{\chi}_{\lambda\mu}(x)| < C[\varphi(x)+f_0(x)].$$

È altresì facile riconoscere che anche il numero $x_{2p+1}$ dipende, in ultima analisi, soltanto da $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$.

Poniamo

$$D=\|d_{\lambda\mu}\|, \qquad \lim_{x\to\infty} d_{\lambda\mu}(x)=d_{\lambda\mu}, \qquad \lambda, \mu=1, 2,\dots, m,$$

e consideriamo la matrice, a elementi *costanti* $\|d_{\lambda\mu}\|$. Sia $\|\bar{d}_{\lambda\mu}\|$ una sua forma canonica del tipo

$$P^{-1}DP=\left\|\begin{array}{cccc} \sigma_1' & \varepsilon_1 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1' & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_q' \end{array}\right\| \qquad \begin{array}{l} \varepsilon_\lambda=0{,}1 \\ \varepsilon_\lambda=0 \text{ per } \lambda=m_1,\ m_1+m_2,\dots,\ m_1+m_2+\dots+m_{q-1} \end{array}$$

ove con $P=\|p_{\lambda\mu}\|$ abbiamo indicato la matrice, a elementi *costanti*, che effettua la trasformazione. Eseguiamo sulle variabili $(y_{p+1},\dots, y_{p+m=n})$ la stessa trasformazione cosicchè il sistema (14) si trasformerà nel seguente definitivo

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} y_1'=\varrho_1(x)y_1 & +\sum_{\mu=1}^{n}\chi_{1\mu}(x)y_\mu \\ y_2'=\qquad \varrho_2(x)y_2 & +\sum_{\mu=1}^{n}\chi_{2\mu}(x)y_\mu \\ \dots\dots\dots & \\ y_p'=\qquad\qquad \varrho_p(x)y_p & +\sum_{\mu=1}^{n}\chi_{p\mu}(x)y_\mu \\ y_\lambda'=\qquad \sigma_\lambda' y_\lambda+\varepsilon_\lambda y_{\lambda+1}+\sum_{\mu=p+1}^{n}\varepsilon_{\lambda\mu}(x)y_\mu & +\sum_{\mu=1}^{n}\chi_{\lambda\mu}(x)y_\mu \\ \qquad \lambda=p+1,\ p+2,\dots,\ p+m=n, & \end{array}\right.$$

ove le funzioni $\varepsilon_{\lambda\mu}(x)$ tendono a zero per $x \to \infty$ e sono a variazione limitata e assolutamente continue in $(x_{2p+1}, \infty)$, ove le funzioni $\chi_{\lambda\mu}(x)$ sono assolutamente integrabili in $(x_{2p+1}, \infty)$ ed esiste una costante $C$, dipendente solo da $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$, tale che

$$|\chi_{\lambda\mu}(x)| < C[\varphi(x) + f_0(x)], \qquad \lambda, \ \mu = 1, \ 2, \ldots, \ n.$$

Inoltre è facile riconoscere che, posto

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f_0(x)\, dx,$$

esiste una costante $C$ che può farsi dipendere solo da $v(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$ tale che

$$|\varepsilon_{\lambda\mu}(x)| < Cf(x), \qquad \lambda, \ \mu = p+1, \ldots, \ p+m=n.$$

Ci sarà utile per il seguito porre nelle (15)

$$\Psi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \chi_{\lambda\mu}(x) y_\mu(x) + \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 1 \leq \lambda \leq p \\ \sum\limits_{\mu=p+1}^{n} \varepsilon_{\lambda\mu}(x) y_\mu(x) & \text{se} \quad p+1 \leq \lambda \leq n. \end{cases} \tag{16}$$

9. - Consideriamo ora il sistema ausiliario

$$\begin{cases} z_1' = \varrho_1(x) z_1 \\ z_2' = \varrho_2(x) z_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_p' = \varrho_p(x) z_p \\ z_\lambda' = \sigma_\lambda z_\lambda + \varepsilon_\lambda z_{\lambda+1}, \qquad \lambda = p+1, \ldots, \ p+m=n. \end{cases} \tag{17}$$

Poniamo $x_0' = x_{2p+1}$,

$$z_1(x) = e^{\int_{x_0'}^{x} \varrho_1(x) dx}, \quad z_2(x) = e^{\int_{x_0'}^{x} \varrho_2(x) dx}, \ldots, \quad z_p(x) = e^{\int_{x_0'}^{x} \varrho_p(x) dx}$$

e poichè $R[\varrho_i(x)] \leq 0$ le funzioni ora scritte sono certo limitate in $(x_0', \infty)$.

Un sistema fondamentale di integrali del sistema (17) può ora scriversi come segue

$$\|z_{\lambda\mu}(x)\| = \left\| \begin{array}{cccc|c|c|c} z_1(x) & 0 & \ldots & 0 & & & \\ 0 & z_2(x) & \ldots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & z_p(x) & & & \\ \hline & & & & f_{\mu\nu}^{(1)}(x) e^{\sigma_1 x} & & \\ \hline & & & & & \ldots & \\ \hline & & & & & & f_{\mu\nu}^{(q)}(x) e^{\sigma_q x} \end{array} \right\|$$

ove $f_{\mu\nu}^{(\lambda)}(x)$, $(\mu, \nu=1, 2,...., m_\lambda)$ sono polinomi in $x$ di grado $m_\lambda-1$ al più ([16]).

Diciamo $W(x)$ il determinante $|z_{\lambda u}(x)|$ e $W_{\lambda\mu}(x)$ l'aggiunto di un suo elemento generico $z_{\lambda\mu}(x)$.

**10.** - Sia $(y_1, y_2,...., y_n)$ la soluzione del sistema (15) che assume nel punto $x_0'$ ben determinati valori iniziali $(\eta_1, \eta_2,...., \eta_n)$.

Sia $(\bar{z}_1, \bar{z}_2,...., \bar{z}_n)$ la soluzione del sistema (17) che assume in un punto $\bar{x} \geqslant x_0'$, che ci riserviamo di stabilire, per valori iniziali i valori che l'integrale $(y_1, y_2,...., y_n)$ assume in quel punto. Allora si ha, tenendo conto delle (16)

$$(18) \qquad y_i(x)=\bar{z}_i(x)+\sum_{u=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} z_{i\mu}(x)\int_{\bar{x}}^{x}\frac{W_{i\nu}(a)}{W(a)}\,\Psi_\nu(a)da.$$

Se $1 \leqslant i \leqslant p$, si ha $z_{i\mu}\equiv 0$ per $i \neq \mu$ e $W_{i\nu}\equiv 0$ per $i\neq\nu$, onde

$$(19) \qquad 1\leqslant i\leqslant p, \qquad y_i(x)=\bar{z}_i(x)+z_i(x)\int_{\bar{x}}^{x}\frac{\Psi_i(a)}{z_i(a)}\,da.$$

Sia invece $p+1\leqslant i\leqslant p+m=n$. Allora

$$z_{i\mu}\equiv 0 \quad \text{per} \quad 1\leqslant\mu\leqslant p, \qquad W_{i\nu}\equiv 0 \quad \text{per} \quad 1\leqslant\nu\leqslant p,$$

cosicchè nella (18) le sommatorie rispetto a $\mu$ e $\nu$ sono estese solo da $p+1$ a $n$. Ma allora nel rapporto $W_{\lambda\nu}(a)/W(a)$ non compaiono le funzioni $z_1(x)$, $z_2(x)$,...., $z_p(x)$.

Posto

$$\Omega_{i\nu}(x, a)=\sum_{\mu=p+1}^{n} z_{i\mu}(x)\frac{W_{i\nu}(a)}{W(a)}, \qquad i, \nu=p+1,...., n,$$

si ha per $p+1\leqslant i\leqslant n$,

$$(20) \qquad y_i(x)=\bar{z}_i(x)+\sum_{\nu=p+1}^{n}\int_{\bar{x}}^{x}\Omega_{i\nu}(x, a)\Psi_\nu(a)da,$$

ove, per quanto si è visto in un precedente lavoro ([17]), è

$$(21) \qquad \Omega_{i\nu}(x, a)=\sum_{\lambda=1}^{q}\sum_{t=0}^{m_\lambda-1}\omega_{i\nu\lambda t}(x-a)^t\,e^{\sigma_\lambda(x-a)},$$

essendo $\omega_{i\nu\lambda t}$ opportune costanti.

---

([16]) Non necessariamente qualcuno di questi polinomi raggiunge tale grado.

([17]) Cfr. loc. cit. in ([6]) pag. 192.

Poniamo

$$\varepsilon(x)=\max_{\alpha\geqslant x}\varepsilon_1(\alpha),\quad \varepsilon_1(x)=\max_{\lambda,\,\mu=1,\ldots,n}|\varepsilon_{\lambda\mu}(x)|,\quad \chi(x)=\max_{\lambda,\,\mu=1,\ldots,n}|\chi_{\lambda\mu}(x)|$$

cosicchè $\varepsilon(x)$ risulta una funzione continua non crescente e tendente a zero per $x\rightarrow\infty$ e $\chi(x)$ una funzione assolutamente integrabile in $(x_0', \infty)$.

Osserviamo d'altra parte che, posto

$$\text{estr. sup.}_{x\geqslant\tau}\sum_{\lambda=1}^{q}\sum_{t=0}^{m_\lambda-1}\int_\tau^x|\omega_{i\nu\lambda t}|\,(x-\alpha)^t\,|e^{\sigma_\lambda'(x-\alpha)}|\,d\alpha=N_{i\nu},\qquad [R(\sigma_\lambda')<0],$$

le quantità $N_{i\nu}$ sono tutte finite e non dipendono da $\tau$.

Diciamo $N$ il più grande dei numeri $N_{i\nu}$. È allora per ogni $i$, $\nu$

$$\int_\tau^x|\Omega_{i\nu}(x,\alpha)|\,d\alpha\leqslant N,\qquad x\geqslant\tau,\qquad N \text{ indipendente da } \tau. \tag{22}$$

Diciamo $\omega$ il più grande dei numeri $|\omega_{i\nu\lambda t}|$ e osserviamo che, essendo $r_\lambda=R(\sigma_\lambda')<0$, esistono finiti i numeri

$$N_{t\lambda}=\max_{u\geqslant 0}|u^t e^{r_\lambda u}|,\qquad \lambda=1,2,\ldots,q;\quad t=0,1,\ldots,m_\lambda-1.$$

Sia $N_1$ il più grande dei numeri $n\omega N_{t\lambda}$. Si ha allora per ogni $i$, $\nu$

$$|\Omega_{i\nu}(x,\alpha)|<N_1,\qquad x\geqslant\alpha. \tag{23}$$

Sia ora $0<\alpha<1$ un numero arbitrario e sia $\bar{x}\geqslant x_0'$ un numero tale che per ogni $x\geqslant\bar{x}$ sia

$$\varepsilon(x)<\frac{\alpha^n}{2Nn^2},\qquad \int_{\bar{x}}^x\chi(x)\,dx<\frac{\alpha^n}{n},\ \frac{\alpha^n}{2N_1n^2}. \tag{24}$$

Anche qui è facile riconoscere che, fissato $\alpha$, questo numero $\bar{x}$ può farsi dipendere soltanto da $v(x)$, dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$ e da $\varphi(x)$.

Definito in tal modo $\bar{x}$ l'integrale $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)$ riesce univocamente determinato e, necessariamente, limitato in $(\bar{x}, \infty)$.

Sia $L$ un numero tale che per ogni $x\geqslant\bar{x}$ si abbia

$$|y_i(x)|<L\alpha^i,\qquad i=1,2,\ldots,n,\qquad x_0'\leqslant x\leqslant\bar{x},$$
$$|\bar{z}_i(x)|<L\alpha^i,\qquad i=1,2,\ldots,n,\qquad \bar{x}\leqslant x<\infty.$$

Poniamo infine $M=L/1-\alpha$.

Osserviamo che poichè $\bar{x}$ dipende soltanto da $v(x)$, $\varphi(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$, i valori che l'integrale $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ assume in $(x_0', \bar{x})$ avranno dei limiti superiori che, fissati i valori iniziali $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, dipendono soltanto dalle stesse quantità.

Perciò anche i massimi moduli che possono assumere $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)$ in $(\bar{x}, \infty)$ dipendono soltanto dalle stesse quantità e quindi altrettanto accade per i numeri $L$ ed $M$.

Evidentemente valgono per $x = \bar{x}$ le disuguaglianze

$$|y_i(x)| < Ma^i, \qquad x = \bar{x}. \tag{25}$$

Dimostriamo che queste valgono per ogni $x \geq \bar{x}$. Esista infatti un primo punto $x_2 > \bar{x}$ nel quale per un certo indice $k$

$$\begin{array}{lll} |y_k(x_2)| = Ma^k, & |y_i(x_2)| \leq Ma^k, & i \neq k \\ |y_i(x)| < Ma^i, & i = 1, 2, \ldots, n, & \bar{x} \leq x < x_2 . \end{array}$$

Sia $1 \leq k \leq p$. Allora dalle (19) si ha

$$|y_k(x)| < La^k + \left| e^{\int_{x_0'}^{x} \varrho_k(x)\,dx} \int_{\bar{x}}^{x} e^{-\int_{x_0'}^{a} \varrho_k(\beta)\,d\beta}\, \Psi_k(a)\,da \right|$$

e, posto $r_k(x) = R(\varrho_k(x)) \leq 0$,

$$|y_k(x)| < La^k + e^{\int_{x_0'}^{x} r_k(x)\,dx} \int_{\bar{x}}^{x} e^{-\int_{x_0'}^{a} r_k(\beta)\,d\beta}\, |\Psi_k(a)|\,da.$$

Essendo la funzione esponenziale sotto il segno di integrale sempre crescente, si ha

$$|y_k(x)| < La^k + \int_{\bar{x}}^{x} |\Psi_k(a)|\,da.$$

Infine tenendo conto delle (16)

$$|y_k(x)| < La^k + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{\bar{x}}^{x} |\chi_{k\mu}(a)|\,|y_\mu(a)|\,da$$

e, per $\bar{x} \leq x \leq x_2$, e tenendo conto delle (24) e del fatto che $0 < a < 1$,

$$|y_k(x)| < La^k + Mna \int_{\bar{x}}^{x} \chi(a)\,da < La^k + Mn\,\frac{a^{n+1}}{n}$$

Per $x = x_2$ si trova così

$$Ma^k < La^k + Ma^{n+1}$$

e dividendo per $a^k$ e tenendo conto che $0 < a < 1$

$$M < L + Ma = M,$$

il che è assurdo.

Sia invece $p+1 \leqslant k \leqslant n$. Allora dalla (20) e successivamente dalle (16), (22), (23), (24) per ogni $\bar{x} \leqslant x \leqslant x_2$

$$\begin{aligned} |y_k(x)| &< La^k + \sum_{\nu=p+1}^{n} \left| \int_{\bar{x}}^{x} \Omega_{k\nu}(x, \alpha) \Psi_\nu(\alpha) d\alpha \right| \leqslant \\ &\leqslant La^k + \sum_{\nu=p+1}^{n} \sum_{\mu=p+1}^{n} \left| \int_{\bar{x}}^{x} \Omega_{k\nu}(x, \alpha)\, \varepsilon_{\nu\mu}(\alpha)\, y_\mu(\alpha) d\alpha \right| + \\ &+ \sum_{\nu=p+1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \left| \int_{\bar{x}}^{x} \Omega_{k\nu}(x, \alpha)\, \chi_{\nu\mu}(\alpha)\, y_\mu(\alpha) d\alpha \right| < \\ &< La^k + \left[ n^2 N\varepsilon(\bar{x}) + n^2 N_1 \int_{\bar{x}}^{x} \chi(\alpha) d\alpha \right] Ma < \\ &< La^k + Ma^{n+1} \end{aligned}$$

e infine per $x = x_2$ e sempre tenendo conto del fatto che $0 < a < 1$

$$Ma^k < La^k + Ma^{n+1}, \qquad M < L + Ma = M,$$

il che è assurdo.

È con ciò dimostrato che le (25) valgono per ogni $x \geqslant x_0'$ e quindi che ogni integrale delle (15) e perciò anche ogni integrale delle (9) è limitato.

Con questo il teorema IV è stato dimostrato nelle ipotesi 1 e 2 ammesse nel numero 5.

Ricordiamo che i numeri $x_0'$ e $\bar{x}$ trovati dipendono, fissato $a$, soltanto da $v(x)$, $\varphi(x)$ e dai coefficienti $a_{\lambda\mu}$. Ricordiamo pure che, fissati i valori iniziali $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ nel punto $x_0'$ dell'integrale $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, i numeri $L$ ed $M$ dipendono soltanto dalle stesse quantità. Per ogni $x_0' \leqslant x < \infty$ si ha inoltre $|y_\lambda(x)| < Ma^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$.

**11.** - Sia $f(x)$ una funzione (anche complessa) del parametro reale $x$ a variazione limitata in $(x_0, \infty)$ e sia $V(x)$ la sua variazione totale in $(x_0, x)$.

Esiste una successione di funzioni $[f_m(x)]$ assolutamente continue in $(x_0, \infty)$ e tali che, detta $V_m(x)$ la loro variazione totale in $(x_0, x)$ si abbia per ogni $x_0 \leqslant x' \leqslant x < \infty$

$$V_m(x) - V_m(x') \leqslant V(x) - V(x'), \quad \lim_{m\to\infty} V_m(x) = V(x), \quad \lim_{x\to\infty} f_m(x) = \lim_{x\to\infty} f(x), \tag{26}$$

e, in tutti i punti di continuità di $f(x)$,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x), \tag{26'}$$

la convergenza essendo uniforme in ogni intervallo in cui $f(x)$ è continua.

Nel prossimo numero dovremo applicare quanto abbiamo osservato a certe funzioni $\varrho(x)$ complesse e a variazione limitata tali che $R[\varrho(x)] \leqslant 0$.

Siano $\varrho_m(x)$ le funzioni approssimatrici considerate avanti. Dimostriamo che si può sempre ammettere che per ogni $m$ e per ogni $x$ di $(x_0, \infty)$ sia $R[\varrho_m(x)] \leq 0$.

Infatti, se per una funzione $\varrho_m(x)$ esiste qualche punto di $(x_0, \infty)$ in cui $R[\varrho_m(x)] > 0$, consideriamo tutti gli intervalli in cui $R[\varrho_m(x)] \geq 0$ e in questi intervalli al posto della funzione

$$\varrho_m(x) = R[\varrho_m(x)] + iJ[\varrho_m(x)]$$

consideriamo la funzione

$$\bar{\varrho}_m(x) = iJ[\varrho_m(x)].$$

La nuova funzione $\bar{\varrho}_m(x)$, che coincide con $\varrho_m(x)$ in tutti i punti in cui $R[\varrho_m(x)] < 0$, ha variazione totale minore di quella di $\varrho_m(x)$, è pure assolutamente continua in $(x_0, \infty)$ e infine $|\varrho(x) - \bar{\varrho}_m(x)| \leq |\varrho(x) - \varrho_m(x)|$.

12. - Riprendiamo in considerazione quanto è stato fatto nei numeri 7 e 8.

Osserviamo che ivi si ha

$$D(x) = \Omega^{-1}(x) A(x) \Omega(x) \tag{27}$$

ove $\Omega(x)$ è una opportuna matrice che si può costruire mediante tutta la catena di matrici del tipo $U(x)$ e $V(x)$ ossia mediante le matrici $W(x)$ che hanno servito per trasformare la matrice $A(x)$ nella $D(x)$.

Osserviamo pure che tutte le operazioni con cui abbiamo effettivamente costruito le matrici $U(x)$ e $V(x)$ conservano il loro significato anche se noi supponiamo che le funzioni $f_{\lambda\mu}(x)$ siano soltanto a variazione limitata in $(x_0, \infty)$ purchè si sostituisca nei numeri 7 e 8 ovunque alle parole « assolutamente continuo » le parole « a variazione limitata ». È evidente invece che l'effettivo passaggio dal sistema di equazioni differenziali (9) al sistema (13) è impossibile nelle nuove condizioni o meglio non ha interesse dato che si dovrebbero derivare delle funzioni a variazione limitata e non necessariamente assolutamente continue.

Siano dunque le funzioni $f_{\lambda\mu}(x)$ a variazione limitata. Esistono allora in un intervallo $(x_0', \infty)$ le funzioni $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \ldots, \varrho_p(x)$ pure a variazione limitata e così pure le funzioni $d_{\lambda\mu}(x)$ e le funzioni $\omega_{\lambda\mu}(x)$ costituenti la matrice $\Omega(x)$ tutte a variazione limitata e infine vale ancora la (27).

Approssimiamo ora nel modo indicato tutte le funzioni $\varrho_\lambda(x)$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$, $d_{\lambda\mu}(x)$, $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m)$, $\omega_{\lambda\mu}(x)$, $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ e siano $\varrho_\lambda^{(m)}(x)$, $d_{\lambda\mu}^{(m)}(x)$, $\omega_{\lambda\mu}^{(m)}(x)$ le funzioni approssimatrici. Supponiamo pure come abbiamo visto sopra $R[\varrho_\lambda^{(m)}(x)] \leq 0$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, p\,;\ m = 1, 2, \ldots)$. Varranno per tutte queste funzioni le relazioni corrispondenti alle (26) e (26').

Siano $D^{(m)}(x)$, $\Omega^{(m)}(x)$ le corrispondenti matrici. Noi possiamo ancora supporre che tutte le disuguaglianze del tipo (11) e (12) valgano anche per le funzioni approssimatrici purchè si sostituisca in esse al fattore 1/2 il fattore 1/4 più piccolo del precedente.

Poniamo

$$(27') \qquad A^{(m)}(x)=\Omega^{(m)}(x)D^{(m)}(x)\Omega^{(m)-1}(x), \qquad A^{(m)}(x)=\| a_{\lambda\mu}+f_{\lambda\mu}^{(m)}(x)\|$$

e consideriamo infine i sistemi di equazioni differenziali

$$(28) \qquad Y'_m(x)=[A^{(m)}(x)+\Phi(x)]Y_m(x), \qquad (m=1,\ 2,\dots).$$

In questi sistemi le funzioni $f_{\lambda\mu}^{(m)}(x)$ che entrano nella matrice $A^{(m)}(x)$ sono tutte assolutamente continue e dette $v_{\lambda\mu}^{(m)}(x)$ le loro variazioni totali nell'intervallo $(x_0', x)$, ossia, posto

$$v_{\lambda\mu}^{(m)}(x)=\int_{x_0'}^{x}\left|\frac{df_{\lambda\mu}^{(m)}(x)}{dx}\right| dx,$$

esiste una funzione $\bar{v}(x)$ indipendente da $\lambda$, $\mu$, $m$ non decrescente e limitata tale che per ogni $x_0' \leqslant x' < x < \infty$ sia, per ogni $m$,

$$(29) \qquad \bar{v}(x)-\bar{v}(x') \geqslant \max_{\lambda,\,\mu=1,2,\dots,n} [v_{\lambda\mu}^{(m)}(x)-v_{\lambda\mu}^{(m)}(x')], \qquad (m=1,\ 2,\dots).$$

Infatti le funzioni $a_{\lambda\mu}+f_{\lambda\mu}^{(m)}(x)$ sono somme di prodotti di funzioni che per le (26) già godono di tale proprietà.

Le funzioni $f_{\lambda\mu}^{(m)}(x)$ sono poi uniformemente limitate e inoltre, sempre per le (26),

$$\lim_{x\to\infty} f_{\lambda\mu}^{(m)}(x)=0, \qquad \lim_{m\to\infty} f_{\lambda\mu}^{(m)}(x)=f_{\lambda\mu}(x),$$

il secondo limite avendo luogo in tutti i punti che sono di continuità per tutte le funzioni $f_{\lambda\mu}(x)$.

*Tutti i sistemi* (28) *soddisfano alle condizioni viste nel n. 5, la funzione* $\bar{v}(x)$ *essendo la stessa per tutti.*

Se ora noi fissiamo nel punto $x_0'$, il medesimo per tutti i sistemi (28), la $n$-upla di numeri $(\eta_1, \eta_2,\dots, \eta_n)$, esiste per ogni sistema (28) uno ed un solo integrale $(y_1^{(m)}, y_2^{(m)},\dots, y_n^{(m)})$ che assume in $x_0'$ detti valori iniziali. Come si dimostra facilmente si ha per ogni $x \geqslant x_0'$

$$(30) \qquad \lim_{m\to\infty} y_\lambda^{(m)}(x)=y_\lambda(x), \qquad \lambda=1,\ 2,\dots,\ n,$$

ove $(y_1, y_2,\dots, y_n)$ rappresenta la soluzione del sistema (9) che assume in $x_0'$ gli stessi valori iniziali $(\eta_1, \eta_2,\dots, \eta_n)$. Scelto ora un numero $0<\alpha<1$ possiamo per quanto si è detto avanti scegliere un punto $\bar{x} \geqslant x_0'$, il medesimo per tutti i sistemi (28), e potrà pure trovarsi in conseguenza una unica costante $L$ che possa servire per tutti i sistemi (28) e perciò anche una unica costante $M$. Si ha così

$$|y_\lambda^{(m)}(x)| < M\alpha^\lambda \qquad x \geqslant x_0', \qquad m=1,\ 2,\ldots, \qquad \lambda=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

Dalle (30) segue che sarà pure

$$|y_\lambda(x)| \leqslant M\alpha^\lambda, \qquad \lambda=1,\ 2,\ldots,\ n, \qquad x \geqslant x_0'.$$

Il teorema IV è con ciò completamente dimostrato.

13. - *I teoremi V e VI.*

Abbiamo già osservato che il teorema V può ricondursi al teorema VI. Basta dunque dimostrare il teorema VI.

La dimostrazione del teorema VI può farsi tuttavia in modo perfettamente analogo alla dimostrazione del teorema IV. Basta soltanto far uso di un nostro Lemma dimostrato nel nostro precedente lavoro ([18]) e della seguente proposizione:

*Se* $\varrho(t)$ *è una funzione a variazione limitata in* $(0, \infty)$ *e* $v(t)$ *è la sua variazione totale in* $(0, t)$, *se* $R[\varrho(t)] \leqslant 0$ *e*

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(t) = i\,l, \qquad l \neq 0 \ \textit{reale},$$

*allora la funzione*

$$f(x) = e^{\int_0^x \varrho(t)\,dt} \int_0^x e^{-\int_0^x \varrho(t)\,dt}\,dx, \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

*è limitata in* $(0, \infty)$ *e il suo massimo modulo dipende soltanto da* $l$ *e* $v(t)$.

Possiamo per semplicità supporre $l>0$. Poniamo $\varrho(t)=q(t)+ip(t)$, $p$, $q$ reali, $q \leqslant 0$,

$$\lim_{t\to\infty} q(t)=0, \qquad \lim_{t\to\infty} p(t)=l, \qquad P(x)=\int_0^x p(t)\,dt.$$

È intanto

$$f(x)= e^{\int_0^x q(t)\,dt}\, e^{i\int_0^x p(t)\,dt} \int_0^x e^{-\int_0^x q(t)\,dt}\, e^{-i\int_0^x p(t)\,dt}\,dx =$$

$$= e^{\int_0^x q\,dt}\, e^{i\int_0^x p\,dt} \int_0^x e^{-\int_0^x q\,dt}\,[\cos P(x) - i \operatorname{sen} P(x)]\,dx.$$

---

([18]) L. CESARI, loc. cit. in ([6]), Lemma I, pag. 173.

Ma la funzione esponenziale sotto al segno di integrale è sempre crescente e quindi per il secondo teorema della media

$$f(x)=e^{i\int p\,dt}\int_{\xi}^{x}\cos P(x)\,dx+e^{\int_0^x q\,dt}\,e^{i\int_0^x p\,dt}\int_0^{\xi}\cos P(x)\,dx-$$

$$-\,i\,e^{i\int p\,dt}\int_{\xi_1}^{x}\operatorname{sen} P(x)\,dx-i\,e^{\int_0^x q\,dt}\,e^{i\int_0^x p\,dt}\int_0^{\xi_1}\operatorname{sen} P(x)\,dx.$$

Ma $q\leqslant 0$ onde gli esponenziali che contengono $q$ sono limitati mentre quelli che contengono $p$ sono di modulo 1 e perciò limitati. Basta perciò dimostrare che sono limitati gli integrali

$$\int_0^x \operatorname{sen} P(x)\,dx,\qquad \int_0^x \cos P(x)\,dx,$$

gli altri ottenendosi per differenza. Occupiamoci del primo integrale.

Sia $0<\varepsilon<\frac{l}{2}$ un numero arbitrario e osserviamo che esisterà un $\bar{x}$ tale che per ogni $x\geqslant\bar{x}$

$$l-\varepsilon\leqslant p(x)\leqslant l+\varepsilon.$$

Ne segue

$$(l-\varepsilon)x\leqslant P(x)-P(\bar{x})\leqslant(l+\varepsilon)x.$$

Possiamo sempre ritenere che in $\bar{x}$ sia $P(x)\equiv 0$ (mod. $\pi$). Basta che ci occupiamo dell'integrale

$$\int_{\bar{x}}^{x}\operatorname{sen} P(x)dx,\qquad P(x)=\int_{\bar{x}}^{x}p(x)dx,$$

la nuova funzione $P(x)$ differendo dalla precedente per un multiplo di $\pi$.

Diciamo $a_0=\bar{x}$, $a_1$, $a_2$, $a_3$,.... quei punti consecutivi e certo distinti nei quali

$$P(x)=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,....$$

È poi $k\pi\leqslant P(x)\leqslant(k+1)\pi$ per $a_k\leqslant x\leqslant a_{k+1}$, $k=0,\ 1,\ 2,.....$

Poniamo

$$-\varepsilon_k=\underset{a_k\leqslant x\leqslant a_{k+1}}{\text{estr. inf.}}[p(x)-l],\qquad \eta_k=\underset{a_k\leqslant x\leqslant a_{k+1}}{\text{estr. sup.}}[p(x)-l],\qquad \underset{k=0,1,2,...}{0\leqslant\varepsilon_k,\ \eta_k\leqslant\varepsilon}$$

È allora anche

$$(l-\varepsilon_k)\,(x-a_k) \leqslant P(x)-k\pi \leqslant (l+\eta_k)\,(x-a_k), \qquad a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1},$$

$$\frac{2\pi}{l+\eta_k} = \int_{a_k}^{a_k+\frac{\pi}{l+\eta_k}} |\operatorname{sen}(l+\eta_k)(x-a_k)|\,dx \leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\operatorname{sen} P(x)|\,dx \leqslant \int_{a_k}^{a_k+\frac{\pi}{l-\varepsilon_k}} |\operatorname{sen}(l-\varepsilon_k)(x-a_k)|\,dx = \frac{2\pi}{l-\varepsilon_k},$$

cioè

$$\frac{2\pi}{l+\eta_{k+1}} - \frac{2\pi}{l-\varepsilon_k} \leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} \operatorname{sen} P(x)\,dx + \int_{a_{k+1}}^{a_{k+2}} \operatorname{sen} P(x)\,dx \leqslant \frac{2\pi}{l-\varepsilon_{k+1}} - \frac{2\pi}{l+\eta_k},$$

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+2}} \operatorname{sen} P(x)\,dx\right| \leqslant \frac{8\pi}{l^2} \max\left[\,|\eta_k+\varepsilon_{k+1}|,\ |\eta_{k+1}+\varepsilon_k|\,\right],$$

$$\left|\int_{\underline{x}}^{x} \operatorname{sen} P(x)\,dx\right| \leqslant \frac{8\pi}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\,|\eta_{2k}+\varepsilon_{2k+1}| + |\varepsilon_{2k}+\eta_{2k+1}|\,\right] + \frac{4\pi}{l} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\pi}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k+\varepsilon_k| + \frac{4\pi}{l} \leqslant \frac{8\pi}{l^2}\,v(\infty) + \frac{4\pi}{l}.$$

L'integrale $\int_0^x \operatorname{sen} P(x)\,dx$ è dunque limitato in $(0, \infty)$.

In modo analogo si proceda per l'integrale $\int_0^x \cos P(x)\,dx$.

14. - *Osservazione.* - Nei teoremi III e V si suppone che le radici $\sigma_\lambda$, $\lambda=1, 2, \ldots\, \nu$, dell'equazione algebrica

$$\varrho^n + a_1\,\varrho^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

siano a parte reale non positiva e quelle a parte reale nulla siano semplici. Questa condizione *equivale*, come è ben noto, a supporre che tutti gli integrali dell'equazione differenziale

$$z^{(n)} + a_1\,z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = 0$$

siano limitati.

Nei teoremi IV e VI si fanno sulle radici $\sigma_\lambda$, $\lambda=1, 2, \ldots, \nu$, dell'equazione algebrica

$$|a_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}\,\varrho| = 0 \tag{31}$$

le stesse ipotesi. Ma tali ipotesi *sono più restrittive* dell'altra che tutti gli integrali del sistema di equazioni differenziali

$$z_\lambda' = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\,z_\mu, \qquad \lambda=1, 2, \ldots, n, \tag{32}$$

siano limitati. Perchè tutti gli integrali del sistema (32) siano limitati occorre e basta infatti che le radici $\sigma_\lambda$ della (31) siano a parte reale non positiva e quelle, diciamole $\sigma_i$, a parte reale nulla abbiano molteplicità uguale alla nullità del corrispondente determinante

$$| a_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}\, \sigma_i |,$$

condizione questa che è sempre soddisfatta se dette radici sono semplici.

Si potrebbe pensare che per i teoremi IV e VI la condizione ammessa sia troppo restrittiva. Orbene ciò non è.

Consideriamo intanto l'equazione

$$(33) \qquad | a_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}(x) - \delta_{\lambda\mu}\, \varrho(x) | = 0$$

ove $f_{\lambda\mu}(x)$ sono funzioni tendenti a zero per $x \to \infty$ e a variazione limitata in $(x_0, \infty)$ e osserviamo che l'ipotesi che le radici $\sigma_i$ a parte reale nulla della (31) siano semplici implica che le radici $\varrho_i(x)$ della (33), che tendono verso le radici $\sigma_i$, sono a variazione limitata in un opportuno intervallo $(x_1, \infty)$, $(x_1 \geqslant x_0)$, fatto questo essenziale in tutte le nostre dimostrazioni. Ciò non avviene più se $\sigma_i$ anzichè essere supposta semplice, è supposta multipla, sia pure con molteplicità pari alla nullità del relativo determinante. Infatti posto

$$A \equiv \| a_{\lambda\mu} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A(x) \equiv \| a_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}(x) \| = \begin{Vmatrix} 0 & -\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \\ \dfrac{1}{\lg^2 x} & 0 \end{Vmatrix}$$

si ha

$$\varrho(x) = \pm\, i\, \frac{\operatorname{sen} x}{x \lg x}$$

e queste due funzioni non sono a variazione limitata in nessun intervallo $(x_1, \infty)$.

Ma noi vogliamo mostrare che i teoremi IV, V e VI cadono effettivamente nelle nuove ipotesi.

Consideriamo infatti il sistema

$$(34) \quad \begin{cases} y_1' = & -p(x) y_2 \\ y_2' = q(x) y_1 & \end{cases} \qquad p(x),\ q(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} q(x) = 0,$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = a_{n-1} + 2\pi n^2, \quad p(x) = \frac{1}{n}, \quad q(x) = \frac{1}{n^3}, \quad a_{n-1} \leqslant x \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

L'integrale $(y_1, y_2)$ del sistema (34) che assume per $x=0$ i valori iniziali $(0, -1)$ è dato dalle formule

$$\begin{cases} y_1(x) = n \operatorname{sen} \dfrac{x - a_{n-1}}{n^2} \\ y_2(x) = -\cos \dfrac{x - a_{n-1}}{n^2} \end{cases} \qquad a_{n-1} \leqslant x \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

e tale integrale manifestamente non è limitato.