ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

BASILIO MANIÀ

# Sopra una questione di compatibilità nel metodo variazionale

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 9, nº 2 (1940), p. 79-95
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_2_79_0>

# SOPRA UNA QUESTIONE DI COMPATIBILITÀ NEL METODO VARIAZIONALE

di BASILIO MANIÀ † (Milano) (*).

1. - In una conferenza al I° Congresso dell'Unione Matematica Italiana ([1]) M. PICONE ha esposto un metodo, che ha chiamato *metodo variazionale*, per la risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali che si presentano nella fisica matematica.

Tale metodo, benchè sia già stato applicato a calcoli approssimati, con risultati in buon accordo con quelli che si ottengono per altre vie, presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, non ha avuto finora una sistemazione teorica, e tutte le questioni di esistenza e di convergenza che in esso si presentano sono ancora insolute. Questo lavoro è un primo contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale.

---

(*) Ebbi il manoscritto di questa Memoria insieme con l'annunzio della tragica fine del suo Autore: annunzio che mi turbò e mi sconvolse. Perchè a BASILIO MANIÀ io ho voluto bene, come si vuol bene ad un allievo che si segue quasi come un figlio.

Di umili origini, Egli era un po' rozzo; era, potrei dire, un primitivo: impetuoso, violento; ma buono nel fondo dell'anima e generoso. Si infiammava per le grandi idee; voleva fare e strafare; voleva dimostrare agli altri ed anche a se stesso che neppure le sue disgraziate condizioni fisiche potevano essergli di ostacolo in ciò che Egli desiderava ardentemente. E nel gennaio dello scorso anno riuscì a partire volontario fra i legionari di Spagna; e benchè già professore nell'Università di Milano, volle combattere come semplice Camicia Nera.

Di ingegno fortissimo, pronto e tenace, si affermò rapidamente e brillantemente nell'Analisi Matematica. Dedicatosi in modo particolare alla teoria delle funzioni di variabili reali ed al Calcolo delle Variazioni, vi colse magnifici frutti: le sue ricerche sui problemi di Lagrange e di Mayer aprono un nuovo capitolo nella moderna teoria delle Variazioni. Ma anche altri studi lo attrassero; ed alla Filosofia ed all'Economia Politica dedicò ripetutamente le sue riflessioni ed alcune pregevoli pubblicazioni.

Il suo versatile ingegno lo avrebbe certamente condotto a più alte conquiste. Ma ora Egli non è più!

Mentre scrivo queste righe, sono pervaso da una profonda tristezza; e questa tristezza si impadronirà sempre di me tutte le volte che ripenserò a Lui.

LEONIDA TONELLI

([1]) V. *Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione*. Atti del I° Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

Nel metodo variazionale si costruisce una successione di *soluzioni approssimate in media* dell'equazione differenziale proposta, e occorre poi provare che tale successione converge a una soluzione esatta dell'equazione che si studia. Ma già nella determinazione delle soluzioni approssimate si presentano alcune questioni essenziali per la applicabilità del metodo.

Se, ad esempio, si considera l'equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q\Delta_2 u = F,$$

la soluzione approssimata $n$-esima si ottiene risolvendo un problema di minimo (assoluto) per un integrale in $n$ funzioni incognite la cui funzione integranda dipende dalle dette funzioni e dalle loro derivate seconde. Se si studia tale minimo per mezzo delle equazioni differenziali di EULERO con le condizioni ai limiti corrispondenti si presenta subito la questione della compatibilità del sistema delle equazioni di EULERO con le condizioni ai limiti, e, come M. PICONE osserva (2), nel caso di incompatibilità il metodo esposto cadrebbe in difetto. Si può aggiungere che anche ammessa la compatibilità del sistema di equazioni di EULERO e di condizioni ai limiti, resterebbe da verificare se una soluzione di esso fornisce effettivamente il minimo assoluto dell'integrale sopra indicato.

Procedendo coi metodi diretti, ampiamente studiati dalla Scuola italiana di Calcolo delle Variazioni, fondata da L. TONELLI, dimostro in questo lavoro che il minimo assoluto degli integrali che si presentano nel metodo variazionale del PICONE esiste sempre, e che le funzioni che forniscono tale minimo soddisfano il sistema delle equazioni di EULERO e delle condizioni ai limiti. In questo modo la questione di esistenza e di compatibilità che si presenta come pregiudiziale nel metodo variazionale è completamente risolta.

Per giungere a questo risultato dimostro, nel primo paragrafo, alcuni teoremi di esistenza per gli integrali del calcolo delle variazioni in campi illimitati, che anche per se stessi sono di un certo interesse.

## § 1. - Una classe di problemi di calcolo delle variazioni.

2. - In questo paragrafo ci proponiamo di stabilire l'esistenza dell'estremo assoluto di alcuni integrali del calcolo delle variazioni e dei risultati, qui ottenuti, faremo poi l'applicazione, nel paragrafo successivo, al metodo variazionale per la risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

Considereremo problemi variazionali di ordine $n \geqslant 1$ in una o più funzioni incognite, e per maggior chiarezza cominceremo dai casi più semplici, che tratteremo con maggiori dettagli, e per primo dimostreremo il seguente teorema.

(2) Loc. cit. p. 118.

TEOREMA. - *Sia*

$$f(x, y, y') = y'^2 + [a(x)y + b(x)]\, y' + c(x, y),$$

*con* $a(x)$, $b(x)$ *funzioni continue in un intervallo finito e chiuso* $\Delta$, *e* $c(x, y)$ *continua per* $x$ *appartenente a* $\Delta$ *e* $y$ *qualunque; esista una costante* $M \geqslant 0$ *tale che sia sempre*

$$f(x, y, y') > -M.$$

*Allora in ogni classe completa* $K$ *di curve assolutamente continue*

$$y = y(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

*ciascuna delle quali ha almeno un punto in un campo limitato* $B'$ *fisso, e per cui esiste l'integrale*

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

*esiste il minimo assoluto di* $I[y]$.

Per $(x, y)$ fissato,

$$u = y'^2 + [a(x)y + b(x)]\, y' + c(x, y),$$

è, nel piano $(y', u)$, l'equazione di una parabola con l'asse parallelo all'asse delle $u$, il cui vertice ha l'ascissa

$$y_0' = -\frac{a(x)y + b(x)}{2},$$

e si verifica che è

$$f(x, y, y') - f(x, y, y_0') = (y' - y_0')^2,$$

e perciò, per una qualunque curva assolutamente continua

$$y = y(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

per la quale esiste finito $I[y]$, posto

$$y_0'(x) = -\frac{a(x)y(x) + b(x)}{2}$$

è

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y_0')\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (y' - y_0')^2\, dx,$$

e quindi

$$\int_{x_1}^{x_2} (y' - y_0')^2\, dx = I[y] - \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y_0')\, dx.$$

Posto

$$y'(x)-y_0'(x)=\delta(x),$$

ne viene

$$y'(x)=-\frac{a(x)y(x)+b(x)}{2}+\delta(x) \tag{1}$$

con

$$\int_{x_1}^{x_2}\delta^2(x)dx\leq|I[y]|+M(x_2-x_1). \tag{2}$$

Dalla (1) segue, applicando la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari:

$$y(x)=\exp\left(-\int_\xi^x\frac{a(x)}{2}dx\right)\left\{y(\xi)-\int_\xi^x\left[\frac{b(x)}{2}-\delta(x)\right]\exp\left(\int_\xi^x\frac{a(x)}{2}dx\right)dx\right\}, \tag{3}$$

essendo $\xi$ un qualunque punto dell'intervallo $(x_1, x_2)$ e perciò:

$$|y(x)|\leq\exp\left(\int_\Delta\frac{|a(x)|}{2}dx\right)\left\{|y(\xi)|+\exp\left(\int_\Delta\frac{|a(x)|}{2}dx\right)\left[\int_\Delta\frac{|b(x)|}{2}dx+\int_{x_1}^{x_2}|\delta(x)|dx\right]\right\}\leq \tag{4}$$

$$\leq\exp\left(\int_\Delta\frac{|a(x)|}{2}dx\right)\left\{y(\xi)+\exp\left(\int_\Delta\frac{|a(x)|}{2}dx\right)\left[\int_\Delta\frac{|b(x)|}{2}dx+\Delta^{\frac{1}{2}}(I[y]+M(x_2-x_1))^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

Di qui si deduce che le curve della classe $K$ per le quali $I[y]$ resta inferiore a un numero fisso $\lambda$, appartengono a una parte limitata del piano $(x, y)$. Basta infatti che il punto $\xi$ della (4) sia scelto in modo che $(\xi, y(\xi))$ appartenga a $B'$, affinchè il secondo membro della (4) resti inferiore a un numero fisso $A$ dipendente da $\lambda$.

Detto $i$ il limite inferiore di $I[y]$ nella classe $K$, sia

$$y=y_k(x), \qquad x_1^{(k)}\leq x\leq x_2^{(k)}, \qquad (k=1, 2,...., n,....),$$

una successione di curve di $K$ tale che

$$I[y_k]\leq i+\frac{1}{k}.$$

Queste curve, per quanto ora si è visto, appartengono a una regione limitata del piano $(x, y)$, e per le (1) e (2) esiste un numero $N>0$ tale che

$$\int_{x_1^{(k)}}^{x_2^{(k)}}y_k'^2(x)dx<N, \qquad (k=1, 2,...., n,....),$$

e quindi le dette curve risultano equiassolutamente continue ed ammettono almeno una curva di accumulazione:

$$y = y_0(x), \qquad x_1^{(0)} \leqslant x \leqslant x_2^{(0)},$$

assolutamente continua. Dalla completezza della classe $K$ e dalla semicontinuità inferiore di $I[y]$ segue allora che tale curva appartiene a $K$ ed è: $I[y_0] = i$.

OSSERVAZIONE I. - Nel teorema dimostrato si può supporre

$$f(x, y, y') = p(x)y'^2 + [a(x)y + b(x)]\,y' + c(x, y),$$

con $p(x)$ continua e positiva nell'intervallo $\Delta$, o integrabile e sempre maggiore di un numero positivo fisso.

OSSERVAZIONE II. - Invece della continuità delle funzioni $a(x)$ e $b(x)$ basta ammettere la integrabilità (nel senso di LEBESGUE) dei loro quadrati; e per $c(x, y)$ basta ammettere che sia continua in $y$, misurabile in $x$, e, per $y$ limitato, in valore assoluto inferiore a una funzione di $x$ integrabile in $\Delta$.

3. - Passiamo ora al caso più semplice che si presenta nel metodo variazionale per la risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

TEOREMA. - *Sia*

$$f(x, y, y', y'') = y''^2 + [a(x)y + b(x)]\,y'' + c(x, y, y')$$

*con* $a(x)$, $b(x)$ *funzioni continue in un intervallo finito e chiuso* $\Delta$ *e* $c(x, y, y')$ *funzione continua per* $x$ *appartenente a* $\Delta$ *e* $y$, $y'$ *qualunque*; *esista una costante* $M \geqslant 0$ *tale che sia sempre*:

$$f(x, y, y', y'') \geqslant -M.$$

*Allora in ogni classe completa* $K$ *di curve*

$$y = y(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

*con* $y(x)$, $y'(x)$ *assolutamente continue, per cui esiste finito l'integrale*

$$I_2[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'')\,dx,$$

*e tali che vi sia almeno un punto* $\xi$ *di* $(x_1, x_2)$ *per cui* $[\xi, y(\xi), y'(\xi)]$ *appartiene a una regione limitata* $B'$ *dello spazio* $(x, y, y')$ *esiste il minimo assoluto di* $I_2[y]$.

Per $(x, y, y')$ fissato:

$$u = y''^2 + [a(x)y + b(x)]\,y'' + c(x, y, y')$$

è, nel piano $(y'', u)$, l'equazione di una parabola con l'asse parallelo all'asse delle $u$ il cui vertice ha l'ascissa:

$$y_0'' = -\frac{a(x)y + b(x)}{2}$$

e si ha

$$f(x, y, y', y'') - f(x, y, y' y_0'') = (y'' - y_0'')^2.$$

Se

$$y = y(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

è una qualunque curva di $K$

$$I_2[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y_0'')dx + \int_{x_1}^{x_2} (y'' - y_0'')^2\, dx,$$

con

$$y_0''(x) = -\frac{a(x)y(x) + b(x)}{2}$$

e posto:

$$\delta(x) = y''(x) - y_0''(x)$$

risulta quindi

$$y''(x) = -\frac{a(x)y(x) + b(x)}{2} + \delta(x)$$

con

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta^2(x)dx \leqslant |I_2[y]| + M(x_2 - x_1).$$

Essendo $\xi$ un punto dell'intervallo $(x_1, x_2)$ soddisfacente la condizione dell'enunciato poniamo

$$z(x) = y(\xi) + y'(\xi)(x - \xi) + \int_\xi^x d\sigma \int_\xi^\sigma \delta(\varrho)d\varrho,$$

$$t(x) = y(x) - z(x).$$

È allora

$$t''(x) = -\frac{a(x)}{2}\, t(x) - \frac{a(x)z(x) + b(x)}{2},$$

$$t(\xi) = t'(\xi) = 0.$$

Indicato con $A$ un limite superiore per $\frac{1}{2}|a(x)|$ e $\frac{1}{2}|a(x)z(x) + b(x)|$, considerate le funzioni $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ determinate dalle condizioni:

$$Y_1''(x) = A\,Y_1(x) + A, \qquad Y_1(\xi) = 1, \qquad Y_1'(\xi) = 0,$$
$$Y_2''(x) = A\,Y_2(x) - A, \qquad Y_2(\xi) = -1, \qquad Y_2'(\xi) = 0,$$

da cui segue

$$Y_2(x) = -Y_1(x), \qquad Y_1(\xi+\eta) = Y_1(\xi-\eta), \qquad Y_1'(\xi+\eta) = -Y_1'(\xi-\eta),$$

è

$$-Y_1(x) < t(x) < Y_1(x),$$
$$-Y_1'(x) \leq t'(x) \leq Y_1'(x),$$

per $x \geqslant \xi$, e

$$-Y_1(x) < t(x) < Y_1(x),$$
$$Y_1'(x) \leq t'(x) \leq -Y_1'(x),$$

per $x \leqslant \xi$, e quindi sempre

$$|t(x)| < Y_1(x), \qquad |t'(x)| \leq |Y_1'(x)|.$$

Ma

$$Y_1(x) = e^{\sqrt{A}(x-\xi)} + e^{-\sqrt{A}(x-\xi)} - 1$$

e quindi ad ogni numero $\lambda > 0$ si può far corrispondere un numero $\Lambda > 0$ tale che per tutte le curve della classe $K$ per le quali $|I_2[y]| < \lambda$, sia

$$|y(x)| < \Lambda, \qquad |y'(x)| < \Lambda, \qquad \int_{x_1}^{x_2} y''^2(x)dx < \Lambda.$$

Ne viene che indicato con $i$ il limite inferiore di $I_2[y]$ in $K$ (limite inferiore che risulta finito) se

$$y = y_k(x), \qquad x_1^{(k)} \leq x \leq x_2^{(k)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

è una successione di curve di $K$ tale che

$$I_2[y_k] < i + \frac{1}{k},$$

le funzioni $y_k(x)$, $y_k'(x)$ risultano equilimitate ed equiassolutamente continue. Esiste perciò una funzione

$$y = y_0(x), \qquad x_1^{(0)} \leq x \leq x_2^{(0)}$$

con $y_0'(x)$ assolutamente continua e una successione parziale $\bar{y}_h(x)$ tratta dalla $\{y_k(x)\}$ tale che $\{\bar{y}_h(x)\}$ converge uniformemente a $y_0(x)$ e $\{\bar{y}_h'(x)\}$ converge uniformemente a $y_0'(x)$. Allora dalla completezza della classe $K$ e dalla semicontinuità inferiore di $I_2[y]$, segue

$$I_2[y_0] = i.$$

OSSERVAZIONE I. - Anche qui si può supporre

$$f(x, y, y', y'') = p(x)y''^2 + [a(x)y + b(x)]y'' + c(x, y, y')$$

con $p(x)$ funzione continua e positiva nell'intervallo $\varDelta$, o integrabile e sempre maggiore di un numero positivo fisso.

OSSERVAZIONE II. - Nel teorema precedente basta supporre che $a(x)$, $b(x)$ siano a quadrato integrabile e che $c(x, y, y')$ sia continua in $(y, y')$, misurabile in $x$, e, per $(y, y')$ limitato, in valore assoluto inferiore a una funzione integrabile in $\varDelta$.

Per quanto riguarda $c(x, y, y')$ ciò è evidente; per quanto riguarda $a(x)$, $b(x)$, basta sostituire nella dimostrazione precedente la costante $A$ con una funzione $A(x)$ positiva, a quadrato integrabile in $\varDelta$ e tale che, per tutte le curve di $K$ per cui $I_2[y]$ resta inferiore a un numero fisso, sia

$$\frac{1}{2}\,|\,a(x)\,|<A(x), \qquad \frac{1}{2}\,|\,a(x)z(x)+b(x)\,|<A(x).$$

4. - In modo essenzialmente identico si dimostra il seguente teorema più generale che ci limitiamo ad enunciare.

TEOREMA - *Sia*

$$f(x, y, y',\dots, y^{(n)})=p(x)y^{(n)2}+\Big[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)y^{(i)}+b(x)\Big]y^{(n)}+c(x, y, y',\dots, y^{(n-1)}),$$

*con* $p(x)$ *continua e positiva in un intervallo finito e chiuso* $\varDelta$, *le* $a_i(x)$, $b(x)$ *a quadrato integrabile in* $\varDelta$, $c(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *misurabile in* $x$, *e continua in* $(y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *per* $x$ *appartenente a* $\varDelta$ *e* $(y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *qualunque, e, per* $(y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *limitato, inferiore in valore assoluto a una funzione integrabile in* $\varDelta$; *esista una costante* $M>0$ *tale che sia sempre*:

$$f(x, y, y',\dots, y^{(n)})>-M.$$

*Allora in ogni classe completa* $K$ *di curve*

$$y=y(x), \qquad x_1\leqslant x\leqslant x_2,$$

*con* $y(x)$, $y'(x),\dots, y^{(n-1)}(x)$ *assolutamente continue, per cui esiste finito l'integrale*

$$I_n[y]=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y',\dots, y^{(n)})dx,$$

*e tali che vi sia almeno un punto* $\xi$ *di* $(x_1, x_2)$ *per cui* $[\xi, y(\xi),\dots, y^{(n-1)}(\xi)]$ *appartiene a una regione limitata* $B'$ *dello spazio* $(x, y,\dots, y^{(n-1)})$, *esiste il minimo assoluto di* $I_n[y]$.

5. - Passiamo ora a considerare il caso delle curve nello spazio, cioè il caso di integrali dipendenti da due o più funzioni e dalle loro derivate fino ad un certo ordine. Per semplicità di scrittura ci limiteremo a studiare in dettaglio il caso degli integrali dipendenti da due funzioni e con una funzione integranda

del tipo che si presenterà nel paragrafo successivo nell'applicazione al metodo variazionale. Le generalizzazioni a cui accenneremo non presentano difficoltà.

TEOREMA. - *Sia*

$$f(x, y, z, y', z', y'', z'') = y''^2 + z''^2 + [a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)z]\,y'' + \\ + [b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)z]\,z'' + c(x, y, z, y', z')$$

*con* $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b_0(x)$, $b_1(x)$,$b_2(x)$, $c(x, y, z, y', z')$ *funzioni continue per* $x$ *appartenente a un intervallo finito e chiuso* $\Delta$, *e* $(y, z, y', z')$ *qualunque; esista una costante positiva* $M$ *tale che sia sempre*

$$f(x, y, z, y', z', y'', z'') > -M.$$

*Allora in ogni classe completa* $K$ *di curve*

$$y = y(x), \qquad z = z(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

*con* $y(x)$, $z(x)$, $y'(x)$, $z'(x)$ *assolutamente continue, per cui esiste finito l'integrale*

$$I_2[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z', y'', z'')\,dx,$$

*e tale che vi sia almeno un punto* $\xi$ *dell'intervallo* $(x_1, x_2)$ *per il quale* $[\xi, y(\xi), z(\xi), y'(\xi), z'(\xi)]$ *appartiene a una regione limitata* $B'$ *dello spazio* $(x, y, z, y', z')$, *esiste il minimo assoluto di* $I_2[y, z]$.

L'equazione

$$u = f(x, y, z, y', z', y'', z'')$$

rappresenta, per $(x, y, z, y', z')$ fissato, un paraboloide ellittico dello spazio $(y'', z'', u)$ con l'asse parallelo all'asse delle $u$ e il vertice dato da:

$$\begin{cases} y_0'' = -\dfrac{a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)z}{2} \\ z_0'' = -\dfrac{b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)z}{2} \end{cases}$$

e si verifica facilmente che è

$$f(x, y, z, y', z', y'', z'') - f(x, y, z, y', z', y_0'', z_0'') = (y'' - y_0'')^2 + (z'' - z_0'')^2,$$

donde segue, per una qualunque curva

$$y = y(x), \qquad z = z(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

della classe $K$,

$$I_2[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z', y'', z'')\,dx = \\ = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z', y_0'', x_0'')\,dx + \int_{x_1}^{x_2} [(y'' - y_0'')^2 + (z'' - z_0'')^2]\,dx,$$

e quindi

$$\int_{x_1}^{x_2} [(y''-y_0'')^2+(z''-z_0'')^2]dx \leq |I_2[y, z]| + M(x_2-x_1).$$

Posto per la curva considerata

$$y''(x)-y_0''(x)=\delta_1(x), \qquad z''(x)-z_0''(x)=\delta_2(x),$$

e

$$y''=-\frac{a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)z}{2}+\delta_1(x)$$

$$z''=-\frac{b_0(x)+b_1(x)y+b_2(x)z}{2}+\delta_2(x),$$

e per le funzioni

$$\bar{y}(x)=y(\xi)+(x-\xi)y'(\xi)+\int_\xi^x d\sigma \int_\xi^\sigma \delta_1(\varrho)d\varrho,$$

$$\bar{z}(x)=z(\xi)+(x-\xi)z'(\xi)+\int_\xi^x d\sigma \int_\xi^\sigma \delta_2(\varrho)d\varrho,$$

$$y_1(x)=y(x)-\bar{y}(x), \qquad z_1(x)=z(x)-\bar{z}(x),$$

risulta

$$\begin{cases} y_1''=-\dfrac{a_1(x)y_1+a_2(x)z_1}{2}-\dfrac{a_0(x)+a_1(x)\bar{y}(x)+a_2(x)\bar{z}(x)}{2} \\ z_1''=-\dfrac{b_1(x)y_1+b_2(x)z_1}{2}-\dfrac{b_0(x)+b_1(x)\bar{y}(x)+b_2(x)\bar{z}(x)}{2} \end{cases}$$

$$y_1(\xi)=y_1'(\xi)=z_1(\xi)=z_1'(\xi)=0.$$

Allora, assegnato $\lambda>0$, si può determinare una funzione $A(x)$ a quadrato integrabile in $\Delta$ e che sia sempre maggiore di

$$\frac{1}{2}|a_1(x)|, \qquad \frac{1}{2}|a_2(x)|, \qquad \frac{1}{2}|b_1(x)|, \qquad \frac{1}{2}|b_2(x)|,$$

$$\frac{1}{2}|a_0(x)+a_1(x)\bar{y}(x)+a_2(x)\bar{z}(x)|, \qquad \frac{1}{2}|b_0(x)+b_1(x)\bar{y}(x)+b_2(x)\bar{z}(x)|.$$

Consideriamo quindi i sistemi lineari:

$$\begin{cases} Y_1''=A(x)(Y_1+Z_1+1) \\ Z_1''=A(x)(Y_1+Z_1+1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2''=A(x)(Y_2+Z_2-1) \\ Z_2''=A(x)(Y_2+Z_2-1) \end{cases}$$

con le condizioni

$$Y_1(\xi)=Z_1(\xi)=1, \qquad Y_1'(\xi)=Z_1'(\xi)=0,$$

$$Y_2(\xi)=Z_2(\xi)=-1, \qquad Y_2'(\xi)=Z_2'(\xi)=0,$$

dalle quali segue

$$Y_1(x) = Z_1(x) = -Y_2(x) = -Z_2(x),$$

e quindi

$$Y_1'' = A(x)(2Y_1 + 1).$$

Si vede facilmente che è:

$$\begin{aligned} -Y_1(x) &< y_1(x), & z_1(x) &< Y_1(x), \\ -Y_1'(x) &\leqslant y_1'(x), & z_1'(x) &\leqslant Y_1'(x), \end{aligned}$$

per $x \geqslant \xi$, e

$$\begin{aligned} -Y_1(x) &< y_1(x), & z_1(x) &< Y_1(x), \\ Y_1'(x) &< y_1'(x), & z_1'(x) &< -Y_1'(x), \end{aligned}$$

per $x \leqslant \xi$. Ne viene perciò che al numero $\lambda > 0$ si può far corrispondere un numero $\Lambda > 0$ tale che per tutte le curve della classe $K$ per cui

$$|I_2[y, z]| < \lambda,$$

sia

$$|y(x)| < \Lambda, \qquad |z(x)| < \Lambda, \qquad |y'(x)| < \Lambda, \qquad |z'(x)| < \Lambda$$

e

$$\int_{x_1}^{x_2} y''^2(x)dx < \Lambda.$$

Considerata quindi una successione $\{y_k(x), z_k(x)\}$ di curve di $K$, tale che sia

$$I_2[y_k, z_k] < i + \frac{1}{k},$$

essendo $i$ il limite inferiore, necessariamente finito di $I_2[y, z]$ in $K$, le funzioni $y_k(x)$, $z_k(x)$, $y_k'(x)$, $z_k'(x)$ risultano equilimitate ed equiassolutamente continue. Esiste perciò una curva

$$y = y_0(x), \qquad z = z_0(x), \qquad x_1^{(0)} \leqslant x \leqslant x_2^{(0)},$$

con $y_0(x)$, $z_0(x)$, $y_0'(x)$, $z_0'(x)$ assolutamente continue, e una successione parziale $\{\bar{y}_h(x), \bar{z}_h(x)\}$ tratta da $\{y_k(x), z_k(x)\}$, tale che le successioni $\{\bar{y}_h(x)\}$, $\{\bar{z}_h(x)\}$, $\{\bar{y}_h'(x)\}$, $\{\bar{z}_h'(x)\}$ convergono uniformemente a $y_0(x)$, $z_0(x)$, $y_0'(x)$, $z_0'(x)$.

Dalla completezza della classe $K$ e dalla semicontinuità inferiore di $I_2[y, z]$ segue che la curva

$$y = y_0(x), \qquad z = z_0(x), \qquad x_1^{(0)} \leqslant x \leqslant x_2^{(0)},$$

appartiene a $K$ ed è

$$I_2[y_0, z_0] = i.$$

OSSERVAZIONE. - Nel teorema ora dimostrato si può supporre che sia

$$\begin{aligned} f(x, y, z, y', z', y'', z'') &= p(x)y''^2 + 2r(x)y''z'' + q(x)z''^2 + \\ &+ [a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)z]\,y'' + [b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)z]\,z'' + \\ &+ c(x, y, z, y', z') \end{aligned}$$

essendo $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ funzioni a quadrato sommabile in $\Delta$ tali che esista un numero $m > 0$ per cui si abbia sempre

$$p(x)y''^2 + 2r(x)y''z'' + q(x)z''^2 \geqslant m(y''^2 + z''^2).$$

Infatti in questo caso l'equazione

$$u = f(x, y, z, y', z', y'', z''),$$

con $(x, y, z, y', z')$ fissato, rappresenta ancora un paraboloide ellittico con l'asse parallelo all'asse delle $u$, il cui vertice ha nel piano $(y'', z'')$ la proiezione $(y_0'', z_0'')$ soddisfacente le equazioni

$$\begin{cases} p(x)y_0'' + r(x)z_0'' = -\dfrac{a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)z}{2} \\ r(x)y_0'' + q(x)z_0'' = -\dfrac{b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)z}{2} \end{cases}$$

ed è:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, y', z', y'', z'') - f(x, y, z, y', z', y_0'', z_0'') &= \\ = p(x)(y'' - y_0'')^2 + 2r(x)(y'' - y_0'')(z'' - z_0'') + q(x)(z'' - z_0'')^2 &\geqslant \\ \geqslant m\,[(y'' - y_0'')^2 + (z'' - z_0'')^2]. \end{aligned}$$

Non resta quindi che modificare leggermente la dimostrazione fatta.

6. - Dopo ciò si può dimostrare senza difficoltà il seguente teorema che comprende tutti i precedenti e che ci limitiamo ad enunciare.

TEOREMA. - *Sia*

$$\begin{aligned} f(x, y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y'_m, \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_m^{(n)}) &= \\ = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij}(x) y_i^{(n)} y_j^{(n)} + \sum_{i=1}^{m} y_i^{(n)} A_i(x, y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)}) &+ \\ + c(x, y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)}) \end{aligned}$$

*con* $A_i(x, y_1, \ldots, y_m^{(n-1)})$ *funzione lineare in* $y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)}$ *a coefficienti a quadrato integrabile in* $\Delta$, $p_{ij}(x)$ *funzioni a quadrato sommabile in* $\Delta$, $c(x, y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)})$ *continua in* $(y_1, \ldots, y_m^{(n-1)})$ *e, per* $(y_1, \ldots, y_m^{(n-1)})$ *limitato, misurabile in* $x$ *e in valore assoluto inferiore a una funzione a quadrato sommabile*; *per la forma quadratica*

$$\sum_{i,j=1}^{m} p_{ij}(x) y_i^{(n)} y_j^{(n)},$$

*esiste una costante* $\tau > 0$ *tale che sia sempre*

$$\sum_{i,\,j=1}^{m} p_{ij}(x) y_i^{(n)} y_j^{(n)} \geqslant \tau \sum_{i=1}^{m} y_i^{(n)2}\,;$$

*esiste una costante* $M > 0$ *tale che sia*

$$f(x, y_1, \ldots, y_n^{(n)}) > -M.$$

*Allora in ogni classe completa* $K$ *di curve*

$$y = y_i(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

*con*

$$y_i^{(j)}(x), \qquad (i = 1, \ldots, m\,;\ j = 1, \ldots, n-1)$$

*assolutamente continue, per le quali esiste finito l'integrale*

$$I_n[y_1, \ldots, y_m] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, \ldots, y_m^{(n)})\,dx,$$

*e c'è almeno un punto* $\xi$ *di* $(x_1, x_2)$ *tale che* $[\xi, y_1(\xi), \ldots, y_m^{(n-1)}(\xi)]$ *appartenga a una regione limitata* $B'$ *dello spazio* $(x, y_1, \ldots, y_m^{(n-1)})$, *esiste il minimo assoluto di* $I_n[y_1, \ldots, y_m]$.

## § 2. - Applicazione al «medodo variazionale».

7. - Sia $B$ un campo in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni e consideriamo l'equazione differenziale nella funzione incognita $u = u(P, t)$, con $P$ punto variabile di $B$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(P, t)\Delta_P u = F(P, t), \tag{5}$$

con le condizioni ai limiti

$$u(P, t) = 0,$$

per $P$ appartenente al contorno $\Gamma$ di $B$,

$$u(P, 0) = f(P), \qquad u_t(P, 0) = g(P),$$

essendo $q(P, t)$, $F(P, t)$, $f(P)$, $g(P)$ funzioni continue per $P$ variabile nel campo $B$ e $t \geqslant 0$ qualunque.

Sia $\{\varphi_i(P)\}$ un sistema di funzioni ortogonali normalizzate nel campo $B$, soddisfacenti sul contorno $\Gamma$ la condizione

$$\varphi_i(P) = 0.$$

Fissato $T>0$, per $n$ intero positivo assegnato, consideriamo la funzione

$$u_n(P,\,t)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(t)\varphi_i(P) \tag{6}$$

dove le $\omega_i(t)$ sono delle funzioni indeterminate con le $\omega_i'(t)$ assolutamente continue in $(0,\,T)$ e tali che

$$\omega_i(0)=\int_B f(P)\varphi_i(P)dP, \qquad \omega_i'(0)=\int_B g(P)\varphi_i(P)dP. \tag{7}$$

Consideriamo quindi l'integrale

$$I_2[\omega_1,\dots,\omega_n]=\int_0^T\int_B\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}+q(P,\,t)\Delta_P u_n-F(P,\,t)\right]^2 dPdt=$$

$$=\int_0^T\int_B\Big[\sum_{i=1}^{n}\omega_i''(t)\varphi_i(P)+q(P,\,t)\sum_{i=1}^{n}\omega_i(t)\Delta\varphi_i(P)-F(P,\,t)\Big]^2 dPdt=$$

$$=\int_0^T\Big\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i''^2+2\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_j\int_B q(P,\,t)\varphi_i(P)\Delta\varphi_j(P)dP-\int_B F(P,\,t)\varphi_i(P)dP\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\int_B q^2(P,\,t)\Delta\varphi_i(P)\Delta\varphi_j(P)dP-$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\omega_i\int_B q(P,\,t)F(P,\,t)\Delta\varphi_i(P)dP+\int_B F^2(P,\,t)dP\Big\}\,dt.$$

Posto:

$$a_{ij}(t)=\int_B q(P,\,t)\varphi_i(P)\Delta\varphi_j(P)dP,$$

$$\beta_i(t)=\int_B F(P,\,t)\varphi_i(P)dP,$$

$$\gamma_{ij}(t)=\int_B q^2(P,\,t)\Delta\varphi_i(P)\Delta\varphi_j(P)dP,$$

$$\delta_i(t)=\int_B q(P,\,t)F(P,\,t)\Delta\varphi_i(P)dP,$$

$$\varrho(t)=\int_B F^2(P,\,t)dP,$$

$$f(t,\,\omega_1,\dots,\,\omega_n;\;\omega_1'',\dots,\,\omega_n'')=\sum_{i=1}^{n}\omega_i''^2+2\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\omega_j+\beta_i(t)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(t)\omega_i\omega_j-2\sum_{i=1}^{n}\delta_i(t)\omega_i+\varrho(t),$$

si può scrivere:

$$I_2[\omega_1,\ldots,\omega_n]=\int_0^T f(t,\,\omega_1,\ldots,\omega_n;\;\omega_1'',\ldots,\omega_n'')dt$$

e risultano soddisfatte tutte le condizioni per l'applicabilità dei risultati del paragrafo precedente, assumendo come classe $K$ la totalità delle curve

$$\omega_i=\omega_i(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T;\qquad (i=1,\ldots,n),$$

con $\omega_i(t)$, $\omega_i'(t)$ assolutamente continue in $(0,\,T)$ e $\omega_i''(t)$ ivi a quadrato sommabile, soddisfacenti le condizioni (7).

Esiste dunque in $K$ il minimo assoluto di $I_2[\omega_1,\ldots,\omega_n]$.

Determinata una $n$-upla di funzioni $\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t)$ che danno all'integrale il suo minimo valore, e sostituite queste funzioni nella (6) è giustificato chiamare la funzione $u_n(P,\,t)$ che ne risulta una *soluzione approssimata in media* dell'equazione (5) con le condizioni ai limiti assegnate.

Sorge a questo punto la domanda se la successione $\{u_n(P,\,t)\}$ o una successione parziale di essa converga a una soluzione esatta dell'equazione (5). Tale questione è ancora insoluta. Noi qui stabiliremo le equazioni differenziali di EULERO con le condizioni ai limiti atte a determinare i coefficienti $\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t)$ della soluzione approssimata $u_n(P,\,t)$. Dalla posta esistenza del minimo assoluto di $I_2[\omega_1,\ldots,\omega_n]$ e dalla considerazione che ora aggiungeremo risulterà in ogni caso la compatibilità delle dette equazioni di EULERO con le corrispondenti condizioni ai limiti.

8. - Consideriamo una $n$-upla di funzioni $\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t)$ che dà a $I_2[\omega_1,\ldots,\omega_n]$ il suo minimo valore, e sia $\eta(t)$ una funzione assolutamente continua in $(0,\,T)$ con $\eta'(t)$, tale che sia

$$\eta(0)=\eta'(0)=\eta'(T)=0,$$

e $\eta''(t)$ sia a quadrato integrabile.

Posto

$$J(\varepsilon)=\int_0^T f(t,\,\omega_1+\varepsilon\eta,\,\omega_2,\ldots,\omega_n;\;\omega_1''+\varepsilon\eta'',\,\omega_2'',\ldots,\omega_n'')dt$$

è

$$\left[\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\int_0^T (f_{\omega_1}\eta+f_{\omega_1''}\eta'')dt=0. \tag{8}$$

Ora, integrando per parti,

$$\int_0^T f_{\omega_1}\eta dt=\int_0^T\left(\eta'\int_t^T f_{\omega_1}d\tau\right)dt=-\int_0^T\left(\eta''\int_0^t\int_\sigma^T f_{\omega_1}d\tau d\sigma\right)dt=\int_0^T\eta''\left\{\int_0^t\int_0^\sigma f_{\omega_1}d\tau d\sigma-t\int_0^T f_{\omega_1}d\tau\right\}dt,$$

e perciò la (8) si può scrivere

$$\int_0^T \left\{ f_{\omega_1''} + \int_0^t \int_0^\sigma f_{\omega_1} d\tau d\sigma - t \int_0^T f_{\omega_1} d\tau \right\} \eta'' dt = 0.$$

Di qua, per un lemma fondamentale, segue che la quantità in parentesi doppia è quasi ovunque uguale a una costante $c$, cioè

$$f_{\omega_1''} + \int_0^t \int_0^\sigma f_{\omega_1} d\tau d\sigma = c + t \int_0^T f_{\omega_1} d\tau, \tag{9}$$

e, tenendo conto dell'espressione di $f(t, \omega_1, \ldots, \omega_n'')$,

$$(9^*) \qquad \omega_1'' + \sum_{i=1}^n a_{1i}(t)\omega_i + \beta_1(t) +$$
$$+ \int_0^t \int_0^\sigma \left\{ \sum_{i=1}^n (a_{i1}(t)\omega_i'' + \gamma_{1i}(t)\omega_i) - \delta_1(t) \right\} d\tau d\sigma = c + t \int_0^T f_{\omega_1} d\tau.$$

Partendo dalle funzioni $\omega_2, \ldots, \omega_n$ si ottengono altre $n-1$ equazioni e si ha così il sistema

$$(10) \qquad \omega_i'' + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\omega_i + \beta_i(t) +$$
$$+ \int_0^t \int_0^\sigma \left\{ \sum_{j=1}^n (a_{j1}(t)\omega_i'' + \gamma_{ij}(t)\omega_j) - \delta_i(t) \right\} d\tau d\sigma = c + t \int_0^T f_{\omega_i} d\tau,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Se supponiamo ora $q(P, t)$, $F(P, t)$ abbiano le derivate dei primi due ordini continue, e quindi abbiano continue le derivate dei primi due ordini anche le funzioni $a_{ij}(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_{ij}(t)$, $\delta_i(t)$, dalle (10) segue che le $\omega_i(t)$ hanno continue le derivate dei primi quattro ordini, e perciò il sistema (10) si può porre anche nella forma seguente:

$$(10^*) \qquad \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \omega_i'' + \sum_{j=1}^n a_{ij}\omega_i + \beta_i \right\} + \sum_{j=1}^n (a_{j1}\,\omega_i'' + \gamma_{ij}\,\omega_j) - \delta_i = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ha così un sistema di $n$ equazioni differenziali lineari del quarto ordine in $n$ funzioni incognite sottoposte alle condizioni iniziali (7).

Con tali condizioni il sistema (10*) è ancora indeterminato, ma due altre condizioni ai limiti si ottengono dalla condizione di trasversalità.

Infatti indicata con $\eta(t)$ una funzione qualunque assolutamente continua con $\eta'(t)$ nell'intervallo $(0, T)$ con $\eta''(t)$ a quadrato integrabile nel detto intervallo, e tale che $\eta(0)=\eta'(0)=0$, posto

$$J(\varepsilon)=\int_0^T f(t,\ \omega_1+\varepsilon\eta,\ \omega_2,\dots,\ \omega_n;\ \omega_1''+\varepsilon\eta'',\ \omega_2'',\dots,\ \omega_n'')dt$$

è

$$\left[\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\int_0^T (f_{\omega_1}\eta+f_{\omega_1''}\eta'')dt=0,$$

e tenendo conto della (9) derivata due volte rispetto a $t$, si ha

$$\int_0^T\left[f_{\omega_1''}\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2 f_{\omega_1''}}{dt^2}\right]dt=0.$$

Se applichiamo la formula di GREEN e teniamo conto delle condizioni $\eta(0)=\eta'(0)=0$, otteniamo

$$\left[f_{\omega_1''}\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{df_{\omega_1''}}{dt}\right]_{t=T}=0,$$

e poichè $\eta(T)$, $\eta'(T)$ sono completamente arbitrari

$$[f_{\omega_1''}]_{t=T}=0, \qquad \left[\frac{df_{\omega_1''}}{dt}\right]_{t=T}=0.$$

Ragionando analogamente per $\omega_2,\dots,\ \omega_n$ si ottengono le condizioni

$$(11)\qquad \begin{cases} \omega_i''(T)+\sum_{j=1}^n a_{ij}(T)\omega_j(T)+\beta_i(T)=0, \\ \left[\dfrac{d}{dt}\left(\omega_i''(t)+\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\omega_j(t)+\beta_i(t)\right)\right]_{t=T}=0, \qquad (i=1, 2,\dots, n). \end{cases}$$

Possiamo dunque concludere con la proposizione seguente:

*L'integrale $I_2[\omega_1,\dots,\ \omega_n]$ ammette sempre il minimo assoluto. Se le funzioni $q(P, t)$, $F(P, t)$ ammettono continue le derivate fino all'ordine $p\geqslant 2$, le funzioni $\omega_1(t),\dots,\ \omega_n(t)$ della n-upla minimante ammettono continue le derivate fino all'ordine $p+2$, e soddisfano il sistema* (10*) *con le condizioni* (7) *e* (11), *così che tale sistema con le dette condizioni risulta sempre compatibile.*