ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EMILIO BAIADA

Sopra un problema di Mayer

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 2 (1940), p. 109-141

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_2_109_0>

SOPRA UN PROBLEMA DI MAYER (*)

di EMILIO BAIADA (Pisa).

Introduzione.

Sia $F(x, y, x', y', u)$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del primo ordine rispetto a x', y', per ogni punto (x, y) di un dato campo A, per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli e per ogni u appartenente a un dato intervallo Δ_u finito o infinito. Supporremo inoltre che $F(x, y, x', y', u)$ sia, nel dominio indicato che chiameremo D, positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x', y', cioè che valga l'uguaglianza:

$$F(x, y, kx', ky', u) = k \cdot F(x, y, x', y', u), \quad \text{per ogni } k > 0.$$

Consideriamo una curva, continua, rettificabile, $\mathcal{C}$ appartenente al campo A e di equazioni parametriche: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ (dove s indica la lunghezza dell'arco della curva contata a partire dal suo primo punto terminale, se è aperta, da un punto qualunque fissato in precedenza, se la curva è chiusa, mentre L indica la lunghezza di tutta la curva).

Se nell'uguaglianza: $u' = F(x, y, x', y', u)$ si sostituiscono al posto di x, y le funzioni $x(s)$, $y(s)$ della curva $\mathcal{C}$ e al posto di x', y' le derivate $x'(s)$, $y'(s)$ là dove esistono (cioè quasi-dappertutto), e dove non esistono si mette $x' = 1$, $y' = 1$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\text{(a)} \qquad u'(s) = F[x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s)], \qquad 0 \leqslant s \leqslant L.$$

Se questa equazione ammette *quasi-dappertutto in* $(0, L)$ *una soluzione* $u(s)$ *assolutamente continua in tutto* $(0, L)$ *e soddisfacente alla condizione iniziale* $u(0) = a$ e tale inoltre che tutti i valori di $u(s)$ appartengano a Δ_u, allora la curva $\mathcal{C}$ la chiameremo *curva ordinaria relativa alla funzione* $F(x, y, x', y', u)$ *e all'elemento iniziale* a; se di più, fissato un suo valore la soluzione è anche unica, la curva la diremo *ordinaria normale.* E da notare che rispetto alle soluzioni assolutamente continue la (a) è equivalente alla:

$$\text{(a')} \qquad u(s) = a + \int_0^s F[x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s)]ds.$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Alta Matematica della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

La soluzione considerata dell'equazione precedente dipende tanto dalla curva $\mathcal{C}$ quanto dall'elemento iniziale α, e la indicheremo nel seguito con $U_{\mathcal{C}_\alpha}(s)$.

Sia data adesso un altra funzione $G(x, y, x', y', u, v)$, definita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine rispetto a x', y', per ogni punto (x, y, x', y', u) del campo D e per ogni v di un intervallo Δ_v, finito o infinito. La $G(x, y, x', y', u, v)$ la supporremo inoltre positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x', y'.

Se nell'eguaglianza $v' = G(x, y, x', y', u, v)$ si mettono al posto di x, y le $x(s)$, $y(s)$, al posto di x', y' le derivate $x'(s), y'(s)$ là dove esistono, e 1 là dove non esistono, e al posto di u si mette la $U_{\mathcal{C}_\alpha}(s)$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\text{(b)} \qquad v'(s) = G[x(s), y(s), x'(s), y'(s), U_{\mathcal{C}_\alpha}(s), v(s)], \qquad 0 \leq s \leq L.$$

Se, la $\mathcal{C}$ è una curva ordinaria relativa alla F e all'elemento iniziale α, e l'equazione differenziale (b) ha una soluzione che la verifichi quasi-dappertutto e soddisfi alla condizione iniziale $v(0) = \beta$, e se, inoltre, $v(s)$ è sempre appartenente all'intervallo Δ_v, allora la curva $\mathcal{C}$ si dirà *curva ordinaria relativamente alle funzioni F, G e agli elementi iniziali* α, β e la soluzione dell'equazione (b) si indicherà con $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}(s)$.

Notiamo anche qui che la (b) per quanto riguarda le soluzioni assolutamente continue può essere sostituita con la:

$$v(s) = \beta + \int_0^s G[x(s), y(s), x'(s), y'(s), U_{\mathcal{C}_\alpha}(s), v(s)]ds.$$

Osserviamo pure che $U_{\mathcal{C}_\alpha}(L)$, $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}(L)$ (che indicheremo spesso, se ciò non darà luogo a dubbi, con $U_{\mathcal{C}}$ e $V_{\mathcal{C}}$) sono funzioni di linea. Va rilevato che $V_{\mathcal{C}}$ è subordinato al comportamento di $U_{\mathcal{C}_\alpha}(s)$.

Il problema di cui ci occuperemo è il seguente:

Sia data una classe K di curve $\mathcal{C}$, ordinarie relativamente alle funzioni F, G e agli elementi iniziali α, β, le quali potranno inoltre soddisfare a certe condizioni ai limiti (per esempio, avere gli stessi estremi); *stacchiamo da questa la classe $\overline{K}$ delle curve $\mathcal{C}$ tali che*:

$$\text{(1)} \qquad U_{\mathcal{C}_\alpha}(L) = \bar{u},$$

dove $\bar{u}$ è un numero fissato appartenente a Δ_u. Se la classe $\overline{K}$ non è vuota, si tratta di studiare l'esistenza e le proprietà delle curve di questa classe che rendono minimo (o massimo) *il funzionale $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}(L)$.*

Un caso particolare del nostro problema si ha quando la G sia indipendente dalla v. Se, inoltre, tanto la F quanto la G non dipendono dalla u si ricade nel problema isoperimetrico del calcolo delle variazioni.

D'altra parte, se si considera la impostazione del problema di LAGRANGE come è stata data da G. A. BLISS, C. F. ROOS e L. GRAVES ([1]), si nota che questo problema può rientrarvi come caso particolare.

Il problema così impostato presenta molte difficoltà perchè è di natura isoperimetrica e difficilmente trattabile direttamente.

Se si toglie la condizione (1) si ottiene un problema libero più semplice. Questo caso è stato studiato da B. MANIÀ ed altri e si può chiamare problema di LAGRANGE o di MAYER libero; se invece si introduce la condizione $U_{\mathcal{C}_a} = \bar{u}$ si ottiene un problema di LAGRANGE o di MAYER isoperimetrico che fa parte dei problemi di LAGRANGE o di MAYER condizionati.

Volendo trattare il problema impostato sopra, risulta molto comodo utilizzare i risultati ottenuti per il problema di LAGRANGE o di MAYER libero. E perciò sarà di molta importanza assicurarci la semicontinuità dei funzionali $U_{\mathcal{C}_a}$ e $V_{\mathcal{C}_{a,\beta}}$.

Criteri per la semicontinuità dei funzionali che si presentano in queste questioni sono stati dati da B. MANIÀ ([2]), L. GRAVES ([3]) e poi in forma più generale, da L. TONELLI ([4]).

Fra tutti i criteri sarà di particolare utilità il seguente del TONELLI ([4]) (per gli altri rimandiamo ai lavori originali):

« Se la funzione $F(x, y, x', y', u)$ è sempre positiva nel dominio D e soddisfa inoltre alla condizione:

$$\text{(A)} \qquad \frac{F(x, y, x', y', u_1) - F(x, y, x', y', u_2)}{u_1 - u_2} \leqslant R$$

dove R è un numero positivo fissato, allora, se sul dominio D è sempre:

$$E(x, y, \bar{x}', \bar{y}', x', y', u) \equiv F(x, y, x', y', u) - \\ - [\bar{x}' F_{x'}(x, y, x', y', u) + \bar{y}' F_{y'}(x, y, x', y', u)] \geqslant 0,$$

considerata una classe K di curve ordinarie relativamente alla funzione $F(x, y, x', y', u)$ e all'elemento iniziale a, il funzionale $U_{\mathcal{C}_a}(s)$ *è uniformemente semicontinuo inferiormente* su ogni elemento della classe stessa.

Ammessa la semicontinuità di $U_{\mathcal{C}_a}(s)$ un analogo teorema vale per il fun-

---

([1]) C. F. ROOS: *Generalized Lagrange problems in the calculus of variations.* Transactions of the American Society, vol. 30 (1928), pp. 360-384. - L. GRAVES: *On a trasformation of the problem of Lagrange*, id., vol. 35, pp. 675-682.

([2]) B. MANIÀ: *Sul problema di Mayer.* R. A. Lincei, novembre 1933 e *Sui problemi di Mayer e Lagrange.* R. C. M. Palermo, t. LVIII, anno 1934.

([3]) L. GRAVES: *The existence of an extremum in the problem of Lagrange.* T. of A. M. Society, vol. 39, pp. 456-477.

([4]) L. TONELLI: *Sulla semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange.* Vol. XXIV dei R. A. N. Lincei, serie 6ª, dicembre 1936.

zionale $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}$ a condizione che la G soddisfi a una condizione analoga alla (A) e sia non decrescente rispetto a u.

Nel lavoro presente studieremo il problema come lo abbiamo impostato sopra, giungendo ad alcuni teoremi d'esistenza che estendouo quei teoremi che si danno nel problema isoperimetrico; stabiliremo anche un criterio che non ha riscontro in nessun di quelli noti per i problemi isoperimetrici, e infine, determineremo le equazioni delle estremanti col solito metodo elementare.

CAPITOLO I.

Teoremi preliminari.

1. - I° Teorema di convergenza.

Se $\{W_n\}$ *è un insieme di curve* $\mathcal{C}_n$ *ordinarie relativamente alle funzioni* F *e* G, *e agli elementi iniziali* α_n, β_n; *se la funzione* F *si suppone uniformemente lipschitziana* (5) *rispetto alla* u *e la* G *uniformemente lipschitziana rispetto alla* v; *se le successioni d'insiemi*:

$$\begin{array}{lll} \{W_1\}, & \{W_2\},...., & \{W_n\},.... \\ \{\alpha_1\}, & \{\alpha_2\},...., & \{\alpha_n\},.... \\ \{\beta_1\}, & \{\beta_2\},...., & \{\beta_n\},.... \end{array}$$

sono tali che, la prima tenda uniformemente ad una curva $\mathcal{C}_0$ *continua rettificabile, la seconda e la terza tendano rispettivamente ai due numeri* α_0, β_0; *allora, se gli insiemi* $\{L_n\}$ *formati con le lunghezze* L_n *delle curve* $\mathcal{C}_n$ *formano una successione* $\{L_1\}$, $\{L_2\}$,...., $\{L_n\}$,.... *che tende alla lunghezza* L_0 *di* $\mathcal{C}_0$, *se ne deduce che la curva* $\mathcal{C}_0$ *è ordinaria relativamente alle funzioni* F, G *e agli elementi iniziali* α_0, β_0, *e le successioni* $\{U_{\mathcal{C}_n, \alpha_n}(s)\}$, $\{V_{\mathcal{C}_n, \alpha_n, \beta_n}(s)\}$ *formate coi funzionali* $U_{\mathcal{C}_n, \alpha_n}(s)$, $V_{\mathcal{C}_n, \alpha_n, \beta_n}(s)$ *relativi alla curva* $\mathcal{C}_n$ *e agli elementi iniziali* α_n, β_n, *tendono uniformemente e rispettivamente a* $U_{\mathcal{C}_0, \alpha_0}(s)$, $V_{\mathcal{C}_0, \alpha_0, \beta_0}(s)$.

Occupiamoci del funzionale $U_{\mathcal{C}}$ e facciamo una dimostrazione per approssimazioni successive con il metodo che il PICARD (6) adopera in questioni molto analoghe.

Supporremo adesso $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = ... = \alpha_0 = \alpha$; la dimostrazione nel caso generale non presenta difficoltà essenziali, mentre complica le notazioni.

Prima di tutto estendiamo la definizione di F anche fuori di Δ_u. Siano a

(5) Cioè: $|F(x, y, x', y', u_1) - F(x, y, x', y', u_2)| \leq R|u_1 - u_2|$ con R costante.

(6) E. PICARD: *Traité d'Analyse*. Gauthier-Villars, 3e édition (1936), t. II, p. 368 e seg.

e b i due estremi di Δ_u [se è finito, un solo estremo se Δ_u è infinito da una sola parte, nessun estremo se $\Delta_u=(-\infty, +\infty)$]. Porremo:

$$F(x, y, x', y', u)=F(x, y, x', y', a) \quad \text{per} \quad u<a$$
$$F(x, y, x', y', u)=F(x, y, x', y', b) \quad \text{per} \quad u>b.$$

$\mathcal{C}_n$ essendo curva ordinaria, $U_{\mathcal{C}_n, a}(s)$ è ottenibile come limite per $m\rightarrow\infty$ delle funzioni:

$$U^{(m)}_{\mathcal{C}_n, a}(s)=\int_0^s F(x_n, y_n, x_n', y_n', U^{(m-1)}_{\mathcal{C}_n}(s))ds+a$$

dove

$$U^{(0)}_{\mathcal{C}_n}=a, \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_n: x=x_n(s);\ y=y_n(s),$$

limite che esiste finito, avendo supposto la F lipschitziana.

Analogamente possiamo considerare il limite $U_{\mathcal{C}_0, a}(s)$ delle funzioni:

$$U^{(m)}_{\mathcal{C}_0, a}(s)=\int_0^s F(x_0, y_0, x_0', y_0', U^{(m-1)}_{\mathcal{C}_0}(s))ds+a$$

dove

$$U^{(0)}_{\mathcal{C}_0}=a \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_0: x=x_0(s);\ y=y_0(s),$$

questa funzione $U_{\mathcal{C}_0, a}(s)$ soddisfa quasi-dappertutto all'equazione differenziale $u'=F(x, y, x', y', u)$, così che basta dimostrare che $U_{\mathcal{C}_0, a}(s)$ è contenuto in Δ_u per provare che $\mathcal{C}_0$ è curva ordinaria.

Consideriamo una curva $\mathcal{C}_n$ qualunque e indichiamo con s_n e s le lunghezze degli archi generici delle $\mathcal{C}_n$ e $\mathcal{C}_0$ rispettivamente, contati a partire dai primi estremi delle curve. Avremo le due rappresentazioni analitiche:

$$\mathcal{C}_n \equiv x=x_n(s_n);\ y=y_n(s_n), \qquad (0 \leq s_n \leq L_n),$$
$$\mathcal{C}_0 \equiv x=x_0(s);\ y=y_0(s), \qquad (0 \leq s \leq L_0)$$

e facendo la trasformazione $s_n=\frac{L_n}{L_0}s$, avremo la rappresentazione analitica simultanea:

$$\mathcal{C}_n \equiv x=f_n(s);\ y=g_n(s),$$
$$\mathcal{C}_0 \equiv x=x_0(s);\ y=y_0(s), \qquad (0, L).$$

Dimostreremo ora che, preso un ε positivo ad arbitrio, si può determinare un $\overline{n}$ tale che per $n>\overline{n}$, e per ogni m si abbia:

$$|U^{(m)}_{\mathcal{C}_n}(s)-U^{(m)}_{\mathcal{C}_0}(s)|<\varepsilon, \tag{1}$$

dove

$$U_{\mathcal{C}_n}^{(m)}(s)=\int_0^s F(f_n(s),\, g_n(s),\, f_n'(s),\, g_n'(s),\, U_{\mathcal{C}_n}^{(m-1)}(s))ds+\alpha,$$

e

$$U_{\mathcal{C}_0}^{(m)}(s)=\int_0^s F(x_0(s),\, y_0(s),\, x_0'(s),\, y_0'(s),\, U_{\mathcal{C}_0}^{(m-1)}(s))ds+\alpha,$$

con

$$U_{\mathcal{C}_n}^{(0)}(s)=\alpha, \qquad U_{\mathcal{C}_0}^{(0)}(s)=\alpha, \qquad 0\leqslant s\leqslant L_0,$$

la disuguaglianza (1) valendo per ogni s di $(0, L_0)$. Essa è evidente per $m=0$; per $m=1$ si ha:

$$U_{\mathcal{C}_n}^{(1)}(s)-U_{\mathcal{C}_0}^{(1)}(s)=\int_0^s \{F(f_n,\, g_n,\, f_n',\, g_n',\, U_{\mathcal{C}_n}^{(0)})-F(x_0,\, y_0,\, x_0',\, y_0',\, U_{\mathcal{C}_0}^{(0)})\}\, ds.$$

Ora la F essendo continua rispetto ai suoi argomenti e poichè le lunghezze L_n tendono a L_0 si sa per teoremi noti (7) che $f_n(s)$, $g_n(s)$ tendono uniformemente a $x_0(s)$, $y_0(s)$ e $f_n'(s)$, $g_n'(s)$ convergono approssimativamente alle x_0', y_0'. Dunque, preso un $\eta>0$, possiamo determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $n\geqslant\bar{n}$ si abbia:

$$\left|\int_0^s \{F(f_n,\, g_n,\, f_n',\, g_n',\, t)-F(x_0,\, y_0,\, x_0',\, y_0',\, t)\}\, ds\right|<\eta$$

per ogni t appartenente ad un intervallo finito (μ_1, μ_2) che contiene tutti i valori di $U_{\mathcal{C}_0}^{(m)}(s)$. (Che questo intervallo risulti finito e chiaro se si pensa che $U_{\mathcal{C}_0}^{(m)}(s)$ tende a $U_{\mathcal{C}_0}(s)$).

Sarà così: $|U_{\mathcal{C}_n}^{(1)}(s)-U_{\mathcal{C}_0}^{(1)}(s)|<\eta$ per ogni $n>\bar{n}$.

Si ottiene poi successivamente:

$$\begin{aligned}U_{\mathcal{C}_n}^{(2)}(s)-U_{\mathcal{C}_0}^{(2)}(s)&=\int_0^s \{F(f_n,\, g_n,\, f_n',\, g_n',\, U_{\mathcal{C}_n}^{(1)})-F(x_0,\, y_0,\, x_0',\, y_0',\, U_{\mathcal{C}_0}^{(1)})\}\, ds=\\ &=\int_0^s \{F(f_n,\, g_n,\, f_n',\, g_n',\, U_{\mathcal{C}_n}^{(1)})-F(f_n,\, g_n,\, f_n',\, g_n',\, U_{\mathcal{C}_0}^{(1)})\}\, ds+\\ &+\int_0^s \{F(f_n,\, g_n,\, f_n',\, g_n',\, U_{\mathcal{C}_0}^{(1)})-F(x_0,\, y_0,\, x_0',\, y_0',\, U_{\mathcal{C}_0}^{(1)})\}\, ds\end{aligned}$$

---

(7) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Zanichelli, t. I, n.° 29.

il secondo integrale, per $n > \bar{n}$, risulta minore di η in valore assoluto, per quanto abbiamo visto precedentemente; e dunque per la condizione di LIPSCHITZ risulta:

$$|U_{\mathcal{C}_n}^{(2)}(s) - U_{\mathcal{C}_0}^{(2)}(s)| \leq R \int_0^s |U_{\mathcal{C}_n}^{(1)}(s) - U_{\mathcal{C}_0}^{(1)}(s)|\, ds + \eta \leq R\eta s + \eta,$$

analogamente:

$$|U_{\mathcal{C}_n}^{(3)}(s) - U_{\mathcal{C}_0}^{(3)}(s)| \leq R \int_0^s |U_{\mathcal{C}_n}^{(2)}(s) - U_{\mathcal{C}_0}^{(2)}(s)|\, ds + \eta \leq R^2\eta \frac{s^2}{2} + R\eta s + \eta,$$

e in generale:

$$|U_{\mathcal{C}_n}^{(m)}(s) - U_{\mathcal{C}_0}^{(m)}(s)| \leq \eta \left[1 + \frac{Rs}{1} + \frac{R^2 s^2}{2!} + \dots + \frac{(Rs)^{m-1}}{(m-1)!}\right]$$

ossia:

$$|U_{\mathcal{C}_n}^{(m)}(s) - U_{\mathcal{C}_0}^{(m)}(s)| < \eta \sum_0^\infty \frac{(Rs)^m}{m!} = \eta e^{Rs} \leq \eta e^{RL_0},$$

e allora prendendo $\eta < \frac{\varepsilon}{e^{RL_0}}$ si ottiene la (1) per $n > \bar{n}$.

Ora siccome sappiamo che:

$$\lim_{n \to \infty} U_{\mathcal{C}_n}^{(m)}(s) = U_{\mathcal{C}_n, a}(s), \qquad \lim_{n \to \infty} U_{\mathcal{C}_0}^{(m)}(s) = U_{\mathcal{C}_0, a}(s),$$

se ne ricava che

$$\lim_{n \to \infty} U_{\mathcal{C}_n, a}(s) = U_{\mathcal{C}_0, a}(s).$$

Infatti, preso un $\varepsilon > 0$ si può, per ogni $n > \bar{n}$, determinare un $\bar{m}$ per cui:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} |U_{\mathcal{C}_n}^{(\bar{m})}(s) - U_{\mathcal{C}_n, a}(s)| < \varepsilon \\ |U_{\mathcal{C}_0}^{(\bar{m})}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s)| < \varepsilon \end{cases}$$

qualunque sia s in $(0, L_0)$, a causa della convergenza uniforme delle approssimazioni del PICARD. Ma allora combinando (2) con la (1) si ha:

$$|U_{\mathcal{C}_n, a}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s)| < 3\varepsilon \quad \text{per ogni } n > \bar{n} \text{ e per ogni } s \text{ in } (0, L_0).$$

Ne segue che $U_{\mathcal{C}_0, a}(s)$ appartiene all'intervallo Δ_u e il teorema sarebbe così dimostrato.

Il teorema risulta così definitivamente dimostrato.

Per il funzionale $V_{\mathcal{C}}$ il teorema si dimostra in modo perfettamente analogo poichè la $U_{\mathcal{C}}(s)$ viene ad essere una nuova variabile di cui si conosce già il comportamento.

2. - II° Teorema di convergenza.

Nell'enunciato precedente togliamo la condizione di LIPSCHITZ e sostituiamola con la seguente:
$$\frac{F(x, y, x', y', u_1) - F(x, y, x', y', u_2)}{u_1 - u_2} \leq R$$
con $u_1 \neq u_2$ e (x, y, x', y', u) in D, R potendosi supporre positivo ([8]). Supponiamo inoltre il funzionale $U_{\mathcal{C}}(s)$ semicontinuo inferiormente e la funzione $F(x, y, x, y, u)$ limitata nel suo campo di definizione. Estesa la definizione di F per tutti gli u, come nel numero precedente, per il teorema d'esistenza di PEANO per le equazioni differenziali esiste $U_{\mathcal{C}_0, a_0}(s)$. Basta anche qui dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \{U_{\mathcal{C}_n, a_n}(s)\} = U_{\mathcal{C}_0, a_0}(s)$ perchè $\mathcal{C}_0$ sia anche curva ordinaria.

Bisogna dimostrare che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, si può determinare un $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ si abbia $|U_{\mathcal{C}_n, a_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a_0}(s)| < \varepsilon$ qualunque sia s in $(0, L_0)$.

Siccome il funzionale è semicontinuo inferiormente e le $\mathcal{C}_n$ tendono uniformemente verso la $\mathcal{C}_0$, basterà dimostrare che, comunque si fissi ε positivo, si può determinare un $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$ sia $U_{\mathcal{C}_n, a_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a_0}(s) < \varepsilon$ qualunque sia s. (Si immagina anche qui eseguita la sostituzione $s_n = \frac{L_n}{L_0} s$, in modo da ottenere una rappresentazione analitica simultanea delle curve in questione).

Anche qui, per semplicità, supporremo $a_n = a_0 = a$; sarà:
$$U_{\mathcal{C}_n, a}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) = \int_0^s \{F(f_n, g_n, f_n', g_n', U_{\mathcal{C}_n, a}) - F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0, a})\} ds$$

Osserviamo subito che se $U_{\mathcal{C}_n, a}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s)$ fosse sempre negativo la cosa sarebbe dimostrata. Ora, se nel secondo membro si mette al posto di $U_{\mathcal{C}_n, a}$ una funzione $U^*_{\mathcal{C}_n}(s)$ uguale a $U_{\mathcal{C}_0, a}(s)$ per ogni s per cui $U_{\mathcal{C}_n, a}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) < 0$, e uguale a $U_{\mathcal{C}_n, a}(s)$ per ogni altro s, si produce un alterazione dell'integrale, che possiamo, scegliendo $\bar{n}$ abbastanza grande, rendere minore di un ε, prefissato. (Questo, sempre in virtù della semicontinuità inferiore uniforme, della uniforme convergenza delle $\mathcal{C}_n$ alla $\mathcal{C}_0$ e della continuità della F rispetto ai suoi argomenti).

([8]) Per la G e $V_{\mathcal{C}}(s)$ sono richieste delle condizioni analoghe a quelle poste per F e $U_{\mathcal{C}}(s)$.

Si avrà così:

$$U_{\mathcal{C}_n, a}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \leq$$
$$\leq \int_0^s \{ F(f_n, g_n, f_n', g_n', U^*_{\mathcal{C}_n}(s)) - F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0, a}(s)) \} ds + \varepsilon_1$$

o ancora,

$$\leq \int_0^s \{ F(f_n, g_n, f_n', g_n', U^*_{\mathcal{C}_n}(s)) - F(f_n, g_n, f_n', g_n', U_{\mathcal{C}_0, a}(s)) \} ds +$$
$$+ \int_0^s \{ F(f_n, g_n, f_n', g_n', U_{\mathcal{C}_0, a}(s)) - F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0, a}(s)) \} ds + \varepsilon_1 .$$

Per un teorema noto sugli integrali dipendenti da una curva (9) il secondo integrale scegliendo $\bar{n}$ sufficientemente grande, si può rendere minore di ε_1.

A causa delle ipotesi fatte sulla F, si ha dunque:

$$U_{\mathcal{C}_n, a}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \leq R \int_0^s \{ U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \} ds + 2\varepsilon_1 ,$$

e quindi anche essendo sempre:

$$U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \geq 0,$$

$$U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \leq R \int_0^s \{ U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \} ds + 2\varepsilon_1 ,$$

e sostituendo più volte sotto l'integrale, $U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s)$ con il secondo membro dell'eguaglianza stessa si ottiene:

$$U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0}(s) \leq$$
$$\leq R^m \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds'' \dots \int_0^{s^{(m-1)}} \{ U^*_{\mathcal{C}_n}(s^{(m)}) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s^{(m)}) \} ds^{(m)} + 2\varepsilon_1 \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(Rs)^r}{r!} .$$

Per la supposta limitatezza della F, viene:

$$U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0}(s) \leq R^m M \frac{s^m}{m!} + 2\varepsilon_1 \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(Rs)^r}{r!} \leq R^m M \frac{L_0^m}{m!} + 2\varepsilon_1 \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(RL_0)^r}{r!} ,$$

da cui scegliendo contemporaneamente m sufficientemente grande e ε_1 sufficientemente piccolo, si può fare in modo che:

$$U_{\mathcal{C}_n, a}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \leq U^*_{\mathcal{C}_n}(s) - U_{\mathcal{C}_0, a}(s) \leq \varepsilon .$$

Il teorema è così dimostrato.

3. - Dai teoremi di convergenza dei n.i 1 e 2 discende il seguente:

TEOREMA: *Ammesse soddisfatte le ipotesi di uno dei due teoremi di convergenza I o II, e considerata una curva* $\mathcal{C}_0$ *ordinaria relativamente alle funzioni* F *e* G *e agli elementi iniziali* α_0, β_0 *rispettivamente appartenenti a* Δ_u *e* Δ_v *e scelto ad arbitrio un numero* $\varepsilon > 0$, *è possibile determinare altri due numeri* δ *e* ϱ *positivi, tali che, per ogni curva ordinaria* $\mathcal{C}$ *relativamente alle* F, G *e agli elementi iniziali* α, β *appartenente ordinatamente all'intorno* (ϱ) *di* $\mathcal{C}_0$ *e soddisfacente alle:*

$$L - L_0 \leqslant \delta, \qquad |\alpha - \alpha_0| \leqslant \varrho, \qquad |\beta - \beta_0| \leqslant \varrho \tag{1}$$

(dove L, L_0 sono le lunghezze di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_0$)

sia:

$$|U_{\mathcal{C}_\alpha}(L) - U_{\mathcal{C}_0}(L_0)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}(L) - V_{\mathcal{C}_0, \alpha_0, \beta_0}(L_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

La dimostrazione è la stessa di quella d'un noto teorema ([9]). Osserviamo inoltre che la scelta di δ e ϱ si può fare in modo che le (2) valgano uniformemente su tutto l'intervallo $(0, L_0)$, ridotto che sia il secondo funzionale al parametro s.

4. - Cerchiamo d'invertire il teorema del n.o 3. Perciò premettiamo la

OSSERVAZIONE: *Sia data una funzione* $\alpha(s)$ *continua nell'intervallo* $(0, L_0)$ *e tale che* $\alpha(s)$ *appartenga sempre a* Δ_u. *Fissata una curva* $\mathcal{C}_0$ *ordinaria relativamente alla funzione* F *e indicando con* $\mathcal{C}_0(s)$ *la porzione di curva che va dal punto di parametro* s *al secondo punto terminale, si può, preso un* $\varepsilon > 0$, *determinare un* $\varrho > 0$, *tale che, per qualunque curva ordinaria* $\mathcal{C}$ *appartenente ordinatamente all'intorno* (ϱ) *di* $\mathcal{C}_0(s)$ *si abbia:*

$$U_{\mathcal{C}_0} - U_{\mathcal{C}_{0(s)}} > -\varepsilon$$

dove i funzionali sono calcolati ed esistenti per lo stesso valore iniziale $\alpha(s)$, *e la disuguaglianza valendo uniformemente qualunque sia* s *in* $(0, L_0)$.

Infatti, sappiamo che per un particolare s, che indichiamo con $\bar{s}$ è possibile determinare un $\varrho_1 > 0$ che goda della proprietà detta, ciò in forza della semicontinuità. Ora, siccome $\alpha(s)$ è funzione continua si può determinare un $\eta > 0$ tale che, su qualunque intervallo di $(0, L_0)$ minore di η, l'oscillazione di $\alpha(s)$, risulti minore di $\frac{\varrho_1}{2}$. Allora indicando con ϱ_2 il minore dei due numeri $\frac{\varrho_1}{2}$ e η, preso un s dell'intervallo di centro $\bar{s}$ e ampiezza ϱ_2, si ha che qualunque curva $\mathcal{C}$

([9]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo I, pp. 312-315.

appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ_2) di $\mathcal{C}_0(s)$, appartiene ordinatamente all'intorno (ϱ_1) di $\mathcal{C}_0(\bar{s})$, ed è dunque:

$$U_{\mathcal{C}} - U_{\mathcal{C}_{0(\bar{s})}} > -\varepsilon,$$

poichè anche i valori iniziali differiscono per meno di ϱ_1. Ma η si può scegliere tanto piccolo che:

$$|U_{\mathcal{C}_{0(\bar{s})}} - U_{\mathcal{C}_{0(s)}}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a causa della continuità della soluzione di una equazione differenziale rispetto all'elemento iniziale. E quindi:

$$|U_{\mathcal{C}} - U_{\mathcal{C}_{0(s)}}| > -\frac{3}{2}\varepsilon;$$

possiamo così dire che, ad ogni s di $(0, L_0)$ corrisponde un intervallo per cui vale la disuguaglianza precedente. Per il teorema di PINCHERLE-BOREL si possono trovare degli intervalli in numero finito che ricoprono $(0, L_0)$ e per i quali vale la proprietà precedente. Prendendo allora il più piccolo dei ϱ così ottenuti si ha quanto si voleva dimostrare.

Questa osservazione ci mette in grado d'enunciare il seguente:

5. - TEOREMA: *Se la funzione F, positiva in D, è tale che la relativa funzione di Weierstrass*: $E(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\bar{\theta}, \operatorname{sen}\bar{\theta}, u)$ *risulti positiva qualunque sia (x, y) in A, u in Δ_u e per $\theta-\bar{\theta}$ diverso da 0 e da un multiplo qualunque di 2π, allora scelti due numeri a_0 e $\delta > 0$, e una curva ordinaria normale, $\mathcal{C}_0$ del campo A, relativamente alla funzione F e agli elementi iniziali a_0, è sempre possibile determinare due numeri positivi ε e ϱ, tali che, per ogni curva $\mathcal{C}$, ordinaria relativamente alla F e all'elemento iniziale a, appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di $\mathcal{C}_0$ e soddisfacente alle disuguaglianze*:

$$M > L, \qquad L - L_0 > \delta, \qquad |a - a_0| < \varrho$$

(L, L_0 indicano le lunghezze rispettive di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ ed M è un numero fisso positivo) sia

$$U_{\mathcal{C}_a}(L) - U_{\mathcal{C}_0, a_0}(L_0) > \varepsilon,$$

supposto che $U_{\mathcal{C}_0, a_0}(L_0)$ non sia il secondo estremo di Δ_u.

Facciamo osservare che le ipotesi fatte sulla F ci permettono d'affermare che il funzionale $U_{\mathcal{C}_a}$ è semicontinuo inferiormente e uniformemente su qualunque curva ordinaria del campo A ([10]).

([10]) L. TONELLI loc. cit. nell'introduzione.

Siano
$$\mathcal{C}: \quad x=x(s'), \qquad y=y(s'), \qquad 0\leqslant s'\leqslant L,$$
$$\mathcal{C}_0: \quad x=x_0(s), \qquad y=y_0(s), \qquad 0\leqslant s\leqslant L_0.$$

per semplicità supponiamo i valori iniziali uguali e rammentiamo l'ipotesi $L<M$ allora:

$$(1) \qquad U_{\mathcal{C}}(L)-U_{\mathcal{C}_0}(L_0)=$$
$$=\int_0^{L_0}\left\{F\left(x,\,y,\,\frac{L}{L_0}x',\,\frac{L}{L_0}y',\,U_{\mathcal{C}}(s)\right)-F\left(x,\,y,\,\frac{L}{L_0}x',\,\frac{L}{L_0}y',\,U_{\mathcal{C}_0}(s)\right)\right\}ds+$$
$$+\int_0^{L_0}\left\{F\left(x,\,y,\,\frac{L}{L_0}x',\,\frac{L}{L_0}y',\,U_{\mathcal{C}_0}(s)\right)-F(x_0,\,y_0,\,x_0',\,y_0',\,U_{\mathcal{C}_0}(s))\right\}ds,$$

e sappiamo dal calcolo sui funzionali che si presentano nel calcolo delle variazioni ([11]) che preso un $\delta>0$ si può trovare un ϱ_1 tale che, per ogni curva $\mathcal{C}$ appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ_1) di $\mathcal{C}_0$ e di lunghezza $L>L_0+\delta$, il secondo integrale risulti maggiore di $\varepsilon_1>0$, ε_1 essendo un numero che si può determinare in corrispondenza del δ.

Dimostriamo che si può trovare un $\bar{\varepsilon}>0$, abbastanza piccolo, ed un $\bar{\varrho}>0$ tali che, per ogni curva $\mathcal{C}$ appartenente ordinatamente all'intorno $(\bar{\varrho})$ di $\mathcal{C}_0$ e di lunghezza $L\geqslant L_0+\delta$, esista almeno un valore s^* del parametro s per cui:

$$(2) \qquad U_{\mathcal{C}}\left(\frac{L}{L_0}\,s^*\right)-U_{\mathcal{C}_0}(s^*)>\bar{\varepsilon}.$$

Ragioniamo per assurdo, cioè supponiamo che, comunque piccoli si scelgano $\bar{\varepsilon}<\frac{\varepsilon_1}{4}$ e $\bar{\varrho}$ positivi, si possa sempre trovare una curva $\mathcal{C}$ ordinaria appartenente ordinatamente all'intorno $(\bar{\varrho})$ della curva $\mathcal{C}_0$, soddisfacente alla $L-L_0\geqslant\delta$, per cui non esista nessun s per cui valga la (2). Scegliamo $\bar{\varepsilon}$ così piccolo in modo da fare che

$$\left|\int_0^{L_0}\left\{F\left(x,\,y,\,\frac{L}{L_0}x',\,\frac{L}{L_0}y',\,U_{\mathcal{C}}\left(\frac{L}{L_0}(s)\right)\right)-F\left(x,\,y,\,\frac{L}{L_0}x',\,\frac{L}{L_0}y',\,U_{\mathcal{C}_0}(s)\right)\right\}ds\right|<\frac{\varepsilon_1}{4},$$

cosa che si può sempre fare in virtù della nostra ipotesi, della semicontinuità del funzionale $U_{\mathcal{C}}$ (sempre prendendo $(\bar{\varrho})$ sufficientemente piccolo), e della continuità della F. Per ciò, per quanto s'è detto per la (1), verrebbe:

$$U_{\mathcal{C}}(L)-U_{\mathcal{C}_0}(L_0)\geqslant\frac{3\varepsilon_1}{4},$$

che contraddice l'ipotesi. Dunque:

([11]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo I, n.i 115-121 specialmente n.o 118.

Qualunque sia $\delta > 0$, si può determinare un $\bar{\varepsilon}$ e un $\bar{\varrho}$ positivi, tali che, per qualunque curva ordinaria appartenente ordinatamente all'intorno $(\bar{\varrho})$ di $\mathcal{C}_0$ e di lunghezza $L < M$, $L - L_0 > \delta$, esista un s^* di $(0, L_0)$ per cui valga la (2).

Ora, considerata la curva $\mathcal{C}_0$ e essendo $\bar{s}$ il parametro relativo a un suo punto P, se consideriamo la soluzione $\bar{U}_{\mathcal{C}_0}$ dell'equazione differenziale (a) relativa alla curva $\mathcal{C}_0$ e che assume in P il valore $\alpha = U_{\mathcal{C}_0}(\bar{s}) + \bar{\varepsilon}$, sarà, per l'ammessa unicità della soluzione, $\bar{U}_{\mathcal{C}_0}(L_0) > U_{\mathcal{C}_0}(L_0)$. Poichè al variare con continuità di P sulla $\mathcal{C}_0$ varia con continuità $\bar{U}_{\mathcal{C}_0}(L_0)$, esisterà un ε', tale che, qualunque sia P, sia:

(3) $$\bar{U}_{\mathcal{C}_0}(L_0) - U_{\mathcal{C}_0}(L_0) \geqslant 2\varepsilon'.$$

Ora per l'osservazione fatta in principio, preso ε' si può determinare un $\varrho' > 0$ in modo che, per ogni curva $\mathcal{C}$, appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ') di $\mathcal{C}_0(s)$ sia:

(4) $$U_{\mathcal{C}} - U_{\mathcal{C}_0(s)}(L_0) > -\varepsilon',$$

questo qualunque sia s, e dove si sia fatto $\alpha(s) = U_{\mathcal{C}_0}(s) + \bar{\varepsilon}$.

Sia $\mathcal{C}'$ una curva ordinaria qualunque appartenente all'intorno (ϱ') di $\mathcal{C}_0$, si riducano $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}_0$ a una rappresentazione analitica simultanea con la sostituzione $s' = \frac{L'}{L_0} s$, esisterà certamente un s^* per cui:

(5) $$U_{\mathcal{C}'}(s^*) - U_{\mathcal{C}_0}(s^*) = \bar{\varepsilon},$$

se non, il teorema sarebbe dimostrato (confrontare con la (2)).

Nella (4) si prenda per s questo s^*, sarà così:

$$U_{\mathcal{C}} - U_{\mathcal{C}_0(s^*)}(L_0) > -\varepsilon';$$

ma $\mathcal{C}'(s^*)$ è una curva che appartiene ordinatamente all'intorno (ϱ') di $\mathcal{C}_0(s^*)$ e dunque:

$$U_{\mathcal{C}'(s^*)} - U_{\mathcal{C}_0(s^*)}(L_0) > -\varepsilon,$$

dove essendo il valore iniziale $\alpha(s) = U_{\mathcal{C}_0}(\bar{s}) + \bar{\varepsilon}$ è anche:

$$U_{\mathcal{C}_0(s^*)}(L_0) = \bar{U}_{\mathcal{C}_0}(L_0);$$

perciò:

$$U_{\mathcal{C}'(s^*)} - \bar{U}_{\mathcal{C}_0}(L_0) > -\varepsilon'.$$

Ora se invece di ϱ' si prende ϱ'', il minore dei due numeri ϱ' e $\bar{\varrho}$ vale anche la (3), per cui:

$$U_{\mathcal{C}'(s^*)} - U_{\mathcal{C}_0}(L_0) > \varepsilon'.$$

Ma per l'ipotesi (5) è evidentemente

$$U_{\mathcal{C}'(s^*)} = U_{\mathcal{C}'}\,.$$

Il teorema è così dimostrato.

Naturalmente esso ammette le stesse estensioni del teorema di calcolo funzionale su cui la dimostrazione si appoggia inizialmente ([12]).

OSSERVAZIONE. - Abbiamo sempre ammesso nei teoremi precedenti che le lunghezze delle curve fossero limitate. Spesso questa condizione si può togliere; per esempio: se $U_{\mathcal{C}}$, è tale che, data una successione di curve che converge alla $\mathcal{C}_0$, le cui lunghezze crescono oltre ogni limite, anche $U_{\mathcal{C}_n}$, cresce oltre ogni limite. Ciò avviene se F nel campo di definizione, risulta maggiore d'un numero m positivo.

Per il funzionale $V_{\mathcal{C}}$ valgono teoremi analoghi a quelli dati per $U_{\mathcal{C}}$, ci limiteremo a dare il seguente:

6. - TEOREMA: *Se per la F e il funzionale $U_{\mathcal{C}}$ vale il teorema dato nel numero 5 e se la funzione $G(x, y, x', y', u, v)$ è non decrescente rispetto alla u, sempre positiva e tale che la sua funzione di Weierstrass $E_G(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\bar{\theta}, \operatorname{sen}\bar{\theta}, u, v)$ sia positiva per tutti i valori di (x, y) in A, con $\theta-\bar{\theta}$ diverso da 0 e da un multiplo intero qualunque di 2π; allora considerata una curva $\mathcal{C}_0$ ordinaria normale rispetto a F, G e agli elementi iniziali α e β di A e preso un $\delta>0$ si può determinare un ε e un ϱ positivi tali che per qualunque curva $\mathcal{C}$ ordinaria rispetto a F, G e agli elementi iniziali α, β appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di $\mathcal{C}_0$, di lunghezza L minore d'un certo M comunque fissato e soddisfacente alla disuguaglianza $L-L_0>\delta$ sia:*

$$V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}} - V_{\mathcal{C}_{0\alpha,\beta}} > \varepsilon.$$

Infatti si può scrivere:

$$V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}} - V_{\mathcal{C}_{0\alpha,\beta}} = \int_{\mathcal{C}} G(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_\alpha}, V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}})\,ds - \int_{\mathcal{C}_0} G(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_{0\alpha}}, V_{\mathcal{C}_{0\alpha,\beta}})\,ds$$

([12]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo I, n.i 119-121.

ossia:

$$V_{\mathcal{C}_\alpha,\beta}-V_{\mathcal{C}_{0}\alpha,\beta}=\int_0^{L_0}\Big[G\Big(x,y,\frac{L}{L_0}x',\frac{L}{L_0}y',U_{\mathcal{C}_\alpha}\Big(\frac{L}{L_0}s\Big),V_{\mathcal{C}_\alpha,\beta}\Big(\frac{L}{L_0}s\Big)\Big)-$$
$$-G\Big(x,y,\frac{L}{L_0}x',\frac{L}{L_0}y',U_{\mathcal{C}_\alpha}\Big(\frac{L}{L_0}s\Big),V_{\mathcal{C}_{0}\alpha,\beta}(s)\Big)\Big]ds+$$
$$+\int_0^{L_0}\Big[G\Big(x,y,\frac{L}{L_0}x',\frac{L}{L_0}y',U_{\mathcal{C}_\alpha}\Big(\frac{L}{L_0}s\Big),V_{\mathcal{C}_{0}\alpha,\beta}(s)\Big)-$$
$$-G\Big(x,y,\frac{L}{L_0}x',\frac{L}{L_0}y',U_{\mathcal{C}_{0}\alpha}(s),V_{\mathcal{C}_{0}\alpha,\beta}(s)\Big)\Big]ds+$$
$$+\int_0^{L_0}\Big[G\Big(x,y,\frac{L}{L_0}x',\frac{L}{L_0}y',U_{\mathcal{C}_{0}\alpha}(s),V_{\mathcal{C}_{0}\alpha,\beta}(s)\Big)-$$
$$-G(x_0,y_0,x_0',y_0',U_{\mathcal{C}_{0}\alpha}(s),V_{\mathcal{C}_{0}\alpha,\beta}(s))\Big]ds.$$

Osserviamo che per la semicontinuità del funzionale $U_{\mathcal{C}_\alpha}(s)$ e la non decrescenza della G rispetto alla u il secondo integrale del secondo membro si può rendere maggiore d'un numero negativo di modulo piccolo a piacere. Infatti comunque preso un $\frac{\varepsilon_1}{2}>0$ si può determinare un $\sigma_1>0$ tale che se $|U_{\mathcal{C}_\alpha}\Big(\frac{L}{L_0}s\Big)-U_{\mathcal{C}_\alpha}(s)|<\sigma_1$ il secondo integrale viene a risultare minore in modulo di $\frac{\varepsilon_1}{2}$. Ora se per qualche valore s^* di s è invece $U_{\mathcal{C}_\alpha}\Big(\frac{L}{L_0}s^*\Big)-U_{\mathcal{C}_{0}\alpha}(s^*)>\sigma_1$ in virtù della non decrescenza della G rispetto a u alterando nell'integrale il valore di $U_{\mathcal{C}_\alpha}\Big(\frac{L}{L_0}s^*\Big)$ e mettendoci invece quello di $U_{\mathcal{C}_{0}\alpha}(s^*)$ si viene così al massimo a diminuire il valore dell'integrale e dunque il secondo integrale riuscirebbe maggiore di $-\frac{\varepsilon_1}{2}$. Per il terzo integrale vale un noto teorema di calcolo funzionale ([13]), preso un $\delta>0$ si può determinare $\varepsilon_1>0$, e $\varrho_1>0$ tale che per qualunque curva ordinaria $\mathcal{C}$ appartenente all'intorno (ϱ_1) di $\mathcal{C}_0$ e di lunghezza $M>L>L_0+\delta$ il valore dell'integrale risulti maggiore di $2\varepsilon_1$. Quanto al primo integrale vale lo stesso ragionamento fatto nel numero 5 e vale la stessa conclusione. Per ciò il teorema si ritiene dimostrato.

7. - I risultati precedenti permettono d'enunciare il seguente:

TEOREMA: *Le funzioni F, G soddisfino alle condizioni del teorema di convergenza I (o II) e a quelle dei teoremi dei numeri 5 e 6; la successione $\{\mathcal{C}_n\}$ di curve ordinarie $\mathcal{C}_n$ rispetto a F, G e agli elementi iniziali α_n, β_n appartenenti rispettivamente a Δ_u e Δ_v converga uniformemente*

([13]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, loc. cit. al n.° 5.

a una curva ordinaria e normale $\mathcal{C}_0$ *relativamente a* F, G *e agli elementi iniziali* α_0, β_0; *e gli* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *convergano rispettivamente a* α_0, β_0. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè gli insiemi formati con* $U_{\mathcal{C}_n\alpha_n}$, $V_{\mathcal{C}_n\alpha_n,\,\beta_n}$ *convergano rispettivamente a* $U_{\mathcal{C}_0\alpha_0}$, $V_{\mathcal{C}_0\alpha_0,\,\beta_0}$ *è che indicata con* L_n *la lunghezza di* $\mathcal{C}_n$, *la successione degli insiemi* $\{L_1\}$, $\{L_2\}$,...., $\{L_n\}$,.... *converga alla lunghezza* L_0 *di* $\mathcal{C}_0$.

La condizione sufficiente coincide con il teorema di convergenza già dimostrato. Dimostriamo la condizione necessaria; cioè supponiamo che $U_{\mathcal{C}_n\alpha_n}$ tenda a $U_{\mathcal{C}_0\alpha_0}$, preso un $\delta>0$ si può determinare un ε e un ϱ positivi tali che per ogni curva ordinatamente all'intorno (ϱ) di $\mathcal{C}_0$ e soddisfacente alla $|U_{\mathcal{C}_\alpha}-U_{\mathcal{C}_0\alpha_0}|<\varepsilon$ con $|\alpha-\alpha_0|<\varrho$, sia verificata la disuguaglianza $|L-L_0|\leq\delta$. Infatti se questa non fosse verificata sarebbe certamente $L-L_0>\delta$, a causa della semicontinuità inferiore della lunghezza d'una curva, ma in questo caso si potrebbero scegliere ε e ϱ in modo che $U_{\mathcal{C}_\alpha}-U_{\mathcal{C}_0\alpha_0}>\varepsilon$, questo in virtù del teorema precedente e ciò è assurdo.

Analoghi ragionamenti valgono per il funzionale $V_{\mathcal{C}}$.

8. - Vediamo adesso di mettere in relazione, quando esistono, $\lim\limits_{n\to\infty}\{U_{\mathcal{C}_n}\}$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\{V_{\mathcal{C}_n}\}$; supporremo le funzioni F e G legate: si otterranno così dei *teoremi di confronto*.

Più precisamente facciamo l'ipotesi:

$$G(x, y, x', y', u, v)=f(x, y)\cdot F(x, y, x', y', u),$$

ossia:

$$V_{\mathcal{C}_\alpha,\,\beta}=\beta+\int_{\mathcal{C}} f(x, y)\cdot F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_\alpha}(s))\,ds$$

con $f(x, y)$ funzione definita e continua in A e $F(x, y, x', y', u)$ positiva o nulla in D.

TEOREMA: *Se il funzionale* $U_{\mathcal{C}_\alpha}$ *è semicontinuo inferiormente su ogni curva di una classe* K *di curve ordinarie relativamente a* F *e* G *appartenenti al campo* A; *data una successione* $\{\mathcal{C}_1\}$, $\{\mathcal{C}_2\}$,...., $\{\mathcal{C}_n\}$,.... *d'insiemi di curve della classe* K *tendente uniformemente ad una curva* $\mathcal{C}_0$ *ordinaria e normale rispetto a* F, *allora: ammessa l'esistenza del limite finito per* $n\to\infty$ *dei funzionali* $U_{\mathcal{C}_n}$, $V_{\mathcal{C}_n}$ *calcolati sulle curve della successione data e con gli elementi iniziali* α_n, β_n *di* Δ_u, Δ_v *tendenti ai numeri* α_0, β_0, *è*:

$$\lim_{n\to\infty}\{V_{\mathcal{C}_n\alpha_n,\,\beta_n}\}-V_{\mathcal{C}_0\alpha_0,\,\beta_0}=f(x_0, y_0)\cdot[\lim\{U_{\mathcal{C}_n\alpha_n}\}-U_{\mathcal{C}_0\alpha_0}],$$

dove (x_0, y_0) *indica un punto della curva* $\mathcal{C}_0$.

Supporremo $\alpha_n=\alpha_0$, $\beta_n=\beta_0$ e li ometteremo nella scrittura. Preso un $\varepsilon>0$ arbitrario si divida la curva in m parti. $\mathcal{C}_0^{(1)}, \mathcal{C}_0^{(2)},\ldots, \mathcal{C}_0^{(m)}$, in modo che su ciascuna di esse l'oscillazione della $f(x, y)$ risulti minore di ε, e considerata una legge la quale ponga una corrispondenza Ω ([14]), tale che la massima distanza tra due punti corrispondenti tenda a 0 come $\frac{1}{n}$, siano: $\mathcal{C}_n^{(1)}, \mathcal{C}_n^{(2)},\ldots, \mathcal{C}_n^{(m)}$, gli archi di $\mathcal{C}_n$ corrispondenti a quelli di $\mathcal{C}_0$. Avremo:

$$V_{\mathcal{C}_n}-V_{\mathcal{C}_0}=\sum_1^m{}_r\left[\int_{\mathcal{C}_n^{(r)}} f(x, y)\cdot F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_n^{(r)}})\,ds-\right.$$
$$\left.-\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} f(x_0, y_0)\cdot F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})\,ds\right],$$

dove con $U_{\mathcal{C}_n^{(r)}}$, $U_{\mathcal{C}_0^{(r)}}$ si è indicato i valori presi da $U_{\mathcal{C}_n}$, $U_{\mathcal{C}_0}$ sull'arco r^{esimo}.

Applicando agli integrali qui scritti il teorema della media abbiamo:

$$V_{\mathcal{C}_n}-V_{\mathcal{C}_0}=\sum_1^m{}_r\left[f_{n,r}\int_{\mathcal{C}_n^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_n^{(r)}})\,ds-f_{0,r}\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})\,ds\right],$$

dove $f_{n,r}$, $f_{0,r}$ sono valori di $f(x, y)$ in determinati punti di $\mathcal{C}_n^{(r)}$, $\mathcal{C}_0^{(r)}$; onde:

$$V_{\mathcal{C}_n}-V_{\mathcal{C}_0}=\sum_1^m{}_r f_{n,r}\left[\int_{\mathcal{C}_n^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_n^{(r)}})\,ds\right]-\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})\,ds+$$
$$+\sum_1^m (f_{n,r}-f_{0,r})\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})\,ds,$$

ossia ancora:

$$V_{\mathcal{C}_n}-V_{\mathcal{C}_0}=\sum_1^m{}_r f_{n,r}\left[\int_{\mathcal{C}_n^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_n^{(r)}})\,ds-\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})\,ds+\frac{\varepsilon}{m}\right]+$$
$$+\sum_1^m{}_r (f_{n,r}-f_{0,r})\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})\,ds-\frac{\varepsilon}{m}\sum_1^m{}_r f_{n,r}.$$

Ora, preso $\frac{\varepsilon}{m}$, si può sempre determinare un intero $\overline{n}$, tale che per $n>\overline{n}$ sia:

$$\int_{\mathcal{C}_n^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_n^{(r)}})\,ds-\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})\,ds>-\frac{\varepsilon}{m};$$

([14]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo I, n.° 72.

ciò in forza della semicontinuità inferiore del funzionale $U_{\mathcal{C}}$: Infatti i valori iniziali sono i valori di $U_{\mathcal{C}_n^{(r)}}$ e $U_{\mathcal{C}_0^{(r)}}$ calcolati sul primo estremo dell'arco r^{esimo}, e questi per n sufficientemente grande sono tali che, o $|U_{\mathcal{C}_n^{(r)}} - U_{\mathcal{C}_0^{(r)}}| < \varrho$, e allora è vero l'asserto, oppure è $U_{\mathcal{C}_n^{(r)}} - U_{\mathcal{C}_0^{(r)}} > \varrho$ e a causa dell'unicità della soluzione dell'equazione differenziale, è ancora vera la disuguaglianza di sopra. Si noti che $\bar{n}$ si può scegliere in modo che la disuguaglianza scritta valga qualunque sia r.

Applicando di nuovo il teorema della media alla prima sommatoria viene:

$$V_{\mathcal{C}_n} - V_{\mathcal{C}_0} = f_n(U_{\mathcal{C}_0} - U_{\mathcal{C}_n}) + \sum_1^m {}_r (f_{n,r} - f_{0,r}) \int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}}) ds - \frac{\varepsilon}{m} \sum_1^m {}_r f_{n,r} + \varepsilon f_n,$$

dove f_n è un certo valore intermedio ai diversi $f_{n,r}$ ed è dunque il valore di $f(x, y)$ calcolato in un punto conveniente di $\mathcal{C}_n$. Ora per ipotesi si può determinare un intero $\bar{\bar{n}} > \bar{n}$, tale che per $n > \bar{\bar{n}}$, sia:

$$\left| \lim_{n\to\infty} \{ V_{\mathcal{C}_n} \} - V_{\mathcal{C}_0} \right| < \varepsilon,$$
$$\left| \lim_{n\to\infty} \{ U_{\mathcal{C}_n} \} - U_{\mathcal{C}_0} \right| < \varepsilon,$$

e sarà dunque anche, combinando coll'uguaglianza precedente:

$$\text{(I)} \qquad \left| [\lim_{n\to\infty} \{ V_{\mathcal{C}_n} \} - V_{\mathcal{C}_0}] - f_n [\lim_{n\to\infty} \{ U_{\mathcal{C}_n} \} - U_{\mathcal{C}_0}] \right| <$$
$$< \sum_1^m {}_r |f_{n,r} - f_{0,r}| \cdot \int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x, y, x', y', U_{\mathcal{C}_0^{(r)}}) ds - \frac{\varepsilon}{m} \sum_1^m {}_r f_{n,r} + 2\varepsilon |f_n| + \varepsilon;$$

e siccome m si è scelto in modo che l'oscillazione della $f(x, y)$ su un qualunque arco sia minore di ε, scegliendo $\bar{\bar{n}}$ sufficientemente grande si può fare in modo che:

$$|f_{n,r} - f_{0,r}| < 2\varepsilon,$$

e così il primo membro della disuguaglianza (I) viene minore di:

$$3\varepsilon \bar{f} + 2\varepsilon U_{\mathcal{C}_0} + \varepsilon = \varepsilon(1 + 3\bar{f} + 2U_{\mathcal{C}_0}),$$

dove $\bar{f}$ indica il massimo, finito, di $|f(x, y)|$ in un conveniente intorno di $\mathcal{C}_0$. Se ne deduce, per l'arbitrarietà di ε:

$$\lim_{n\to\infty} \{ V_{\mathcal{C}_n} \} - V_{\mathcal{C}_0} = \lim_{n\to\infty} [f_n(\lim_{n\to\infty} \{ U_{\mathcal{C}_n} \} - U_{\mathcal{C}_0})].$$

Supponiamo ora $\lim_{n\to\infty} \{ U_{\mathcal{C}_n} \} - U_{\mathcal{C}_0} = 0$, deve essere allora nullo anche il primo membro; il teorema è allora verificato prendendo per (x_0, y_0) un punto qualunque di $\mathcal{C}_0$. Se invece $\lim_{n\to\infty}\{U_{\mathcal{C}_n}\}-U_{\mathcal{C}_0}$ è diverso da zero, sarà certamente positivo a causa della semicontinuità inferiore, dovrà allora esistere il limite dei numeri f_n per n tendente all'infinito. Ma poichè f_n è un determinato valore di $f(x,y)$ in un punto della curva $\mathcal{C}_n$, e questa tende uniformemente alla $\mathcal{C}_0$, se ne ricava che f_n tende a $f(x_0,y_0)$ dove x_0, y_0 è un punto di $\mathcal{C}_0$. È vera in ogni caso la formula dell'enunciato.

9. - Questo teorema si può estendere al caso in cui sia:

$$G(x,y,x',y',u,v)=f(x,y,u)\cdot F(x,y,x',y',u),$$

cioè:

$$V_{\mathcal{C}_{a},\beta}=\beta+\int_{\mathcal{C}} f(x,y,U_{\mathcal{C}_a}(s))\cdot F(x,y,x',y',U_{\mathcal{C}_a}(s))ds$$

con $f(x,y,u)$ e $F(x,y,x',y',u)$ sempre positivi, $f(x,y,u)$ continua e non decrescente rispetto alla u. Non si ottiene più un'uguaglianza ma una disuguaglianza, e precisamente:

$$\lim_{n\to\infty}\{V_{\mathcal{C}_n}\}-V_{\mathcal{C}_0}\geqslant m\cdot[\lim_{n\to\infty}\{U_{\mathcal{C}_n}\}-U_{\mathcal{C}_0}]$$

dove m è il minimo di $f(x,y,u)$ su la $\mathcal{C}_0$.

Basta ripetere le considerazioni del numero precedente sino ad ottenere la relazione:

$$\lim_{n\to\infty}\{V_{\mathcal{C}_n}\}-V_{\mathcal{C}_0}>f_n[\lim_{n=\infty}\{U_{\mathcal{C}_n}\}-U_{\mathcal{C}_0}]+$$
$$+\sum_1^m{}_r\,[f_{n,r}-f_{0,r}]\cdot\int_{\mathcal{C}_0^{(r)}} F(x_0,y_0,x_0',y_0',U_{\mathcal{C}_0^{(r)}})ds-\frac{\varepsilon}{m}\sum f_{n,r}+\varepsilon$$

in cui $f_{n,r}$, $f_{0,r}$ sono valori di $f(x,y,u)$ su $\mathcal{C}_n^{(r)}$ e $\mathcal{C}_0^{(r)}$; a causa della semicontinuità di $U_{\mathcal{C}}$ e per la non decrescenza di f rispetto a u, si può fare in modo che: $f_{n,r}>\bar{f}_{0,r}-\frac{\varepsilon}{2}$, dove $\bar{f}_{0,r}$ è il valore di $f(x,y,u)$ nel punto corrispondente per la Ω, a quello su cui è calcolato $f_{n,r}$. Scegliendo le parti in cui abbiamo suddiviso la $\mathcal{C}_0$, sufficientemente piccole, viene:

$$f_{n,r}-f_{0,r}>-\varepsilon$$

e dunque osservando che $\lim_{n\to\infty}\{U_{\mathcal{C}_n}\}-U_{\mathcal{C}_0}\geqslant 0$, e ripetendo le considerazioni svolte in fine del teorema precedente, si ricava la relazione detta che chiameremo nel seguito la *disuguaglianza isoperimetrica*.

CAPITOLO II.

Esistenza dell'estremo.

1. - I° Teorema d'esistenza: il caso continuo.

Se $M(x, y)$, $N(x, y)$ sono due funzioni continue in tutto il campo A. Se

$$U_{\mathcal{C}_\alpha}=\alpha+\int_{\mathcal{C}}\{M(x, y)x'+N(x, y)y'\}\,ds.$$

Se la funzione $G(x, y, x', y', u, v)$ è sempre positiva nel suo campo di definizione e soddisfa anche a una condizione sufficiente per la semicontinuità del funzionale $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}$;

Considerata una classe completa (15) *K di curve ordinarie $\mathcal{C}$, tutte contenute in una parte limitata e chiusa A' del campo A, e detta $\overline{K}$ la sottoclasse di tutte le curve $U_{\mathcal{C}_\alpha}=\overline{u}$* (dove $\overline{u}$ è un valore costante di Δ_u), *esiste il minimo assoluto di $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}$ in $\overline{K}$.*

Osserviamo subito che se $\mathcal{C}$ è una curva qualunque di $\overline{K}$ (che supponiamo non vuota) e se L è la sua lunghezza, indicando con m il minimo di G per (x, y) in A', $u=\overline{u}$ e v minore d'un numero sufficientemente grande, si ha:

$$V_{\mathcal{C}}\geqslant mL.$$

Indicando con i il limite inferiore di $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}$ in $\overline{K}$, e con $\{W_n\}$ l'insieme di tutte le curve $\mathcal{C}_n$ di $\overline{K}$ che soddisfano alla disuguaglianza $V_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}\leqslant i+\frac{1}{n}$; per la disuguaglianza precedente sarà:

$$L_n\leqslant\frac{1}{m}(i+1) \qquad (L_n \text{ indica la lunghezza di } \mathcal{C}_n).$$

Allora la successione $\{W_1\}$, $\{W_2\}$,.... $\{W_n\}$,.... ammette almeno una curva di accumulazione $\mathcal{C}_0$, continua, rettificabile ed appartenente ad A', e da questa successione si può estrarne un'altra $\{\mathcal{C}_1\}$, $\{\mathcal{C}_2\}$,.... $\{\mathcal{C}_n\}$,.... che converge uniformemente alla $\mathcal{C}_0$ e poichè $U_{\mathcal{C}_\alpha}$ è continuo, sarà $\lim\limits_{n\to\infty} U_{\mathcal{C}_n}=U_{\mathcal{C}_0}=\overline{u}$. Inoltre per la semicontinuità di $V_{\mathcal{C}}$ si ottiene che $V_{\mathcal{C}_0}\leqslant i$, e dunque $\mathcal{C}_0$ è una curva minimante.

2. - II° Teorema d'esistenza.

a). Nell'ipotesi $G\equiv f(x, y)\cdot F(x, y, x', y', u)$, dove F sia inoltre supposta sempre positiva sul suo campo, diamo qualche condizioni che, se vengono soddisfatte, ci permettono d'affermare l'esistenza dell'estremo.

---

(15) Per il significato di *classe completa* vedere, L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. II, pp. 3 e 281.

Supponiamo il funzionale $U_{\mathcal{C}}$ semicontinuo e osserviamo anche qui che, se consideriamo curve contenute in una parte finita e chiusa A' di A, possiamo limitarci a considerare curve di lunghezze limitate.

Diciamo J il limite inferiore di $V_{\mathcal{C}}$ su $\overline{K}$ e consideriamo la successione minimizzante del numero precedente: essa ammette una curva d'accumulazione $\mathcal{C}_0$ continua e rettificabile appartenente alla classe K, per l'ipotesi che la classe K sia completa.

Si può allora estrarre dalla successione precedente un'altra: $\{W_1'\}$, $\{W_2'\}$,...., $\{W_n'\}$,.... convergente uniformemente alla $\mathcal{C}_0$ e tale che le curve di $\{W_n'\}$ siano estratte dall'insieme $\{W_m\}$ di indice superiore. Dalla semicontinuità del funzionale $U_{\mathcal{C}}$ viene $U_{\mathcal{C}_0} \leqq \overline{u}$ e per il teorema del confronto del n.° 8, capitolo I:

$$J - V_{\mathcal{C}_0} = f(x_1, y_1)\{\overline{U} - U_{\mathcal{C}_0}\} \tag{I}$$

dove (x_1, y_1) è un punto di $\mathcal{C}_0$.

Se è $U_{\mathcal{C}_0} = \overline{u}$ la curva $\mathcal{C}_0$ e minimante. Se invece ciò non accade sarà $U_{\mathcal{C}_0} < \overline{u}$, però introducendo delle nuove ipotesi possiamo tuttavia assicurarci dell'esistenza del minimo.

1°). Supponiamo che le curve della classe K soddisfino alle seguenti condizioni:

Su di esse $f(x, y)$ sia positiva non crescente, per il loro secondo punto terminale si possa tracciare una curva continua, rettificabile, chiusa, di lunghezza piccola a piacere, appartenente al campo A; inoltre la curva ottenuta aggiungendo a una qualunque $\mathcal{C}$ di K i punti di quest'ultima, in modo da ottenere una curva continua, sia ancora una curva di K. In questo caso il minimo esiste.

Infatti consideriamo quella curva chiusa Γ (che esiste sempre) tale che, la curva $\overline{\mathcal{C}}_0$ ottenuta aggiungendo Γ alla $\mathcal{C}_0$, verifichi la: $U_{\overline{\mathcal{C}}_0} = \overline{u}$; sarà:

$$\overline{U}_{\overline{\mathcal{C}}_0} = \alpha + \int_{\mathcal{C}} F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0})ds + \int_{\Gamma} F(x, y, x', y', u)ds$$

dove nel secondo integrale la u va sostituita con la soluzione dell'equazione differenziale: $u' = F(\overline{x}(s), \overline{y}(s), \overline{x}'(s), \overline{y}'(s), u)$, $(\overline{x}(s), \overline{y}(s)$ sono le funzioni parametriche che rappresentano la curva Γ) che assume il valore iniziale $U_{\mathcal{C}_0}(L_0)$.

Con notazioni identiche avremo:

$$\overline{V}_{\overline{\mathcal{C}}_0} = \beta + \int_{\mathcal{C}_0} f(x_0, y_0)F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0})ds + \int_{\Gamma} f(x, y)\, F(x, y, x, y, u)ds;$$

è cioè:

$$V_{\overline{\mathcal{C}}_0} - V_{\mathcal{C}_0} = \int_{\Gamma} f(x, y)F(x, y, x', y', u)ds,$$

e per il teorema della media:

$$V_{\overline{\mathcal{C}}_0} - V_{\mathcal{C}_0} = f(\bar{x}, \bar{y}) \int_{\Gamma} F(x, y, x', y', u) ds,$$

($f(\bar{x}, \bar{y})$ è valore di $f(x, y)$ su un punto di Γ).

Sarà necessariamente:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x_1, y_1),$$

e dunque:

$$V_{\overline{\mathcal{C}}_0} - V_{\mathcal{C}_0} \leq f(x_1, y_1) \cdot \int_{\Gamma} F(x, y, x', y', u) ds = f(x_1, y_1)[U_{\overline{\mathcal{C}}_0} - U_{\mathcal{C}_0}],$$

e paragonando con (I),

$$V_{\overline{\mathcal{C}}_0} \leq J$$

mentre $U_{\overline{\mathcal{C}}_0} = \bar{u}$: il minimo esiste.

Notiamo che il ragionamento precedente si può ripetere se invece della non crescenza di $f(x, y)$ sulle curve di K si ammetta che $f(x, y)$ assuma il valore minimo, su ogni curva, nel secondo estremo.

2°). Supponiamo che *le curve di K siano ordinarie normali, inoltre $f(x, y)$ sia non crescente sulle curve di K e $F(x, y, x', y', u)$ non decrescente nella u; le curve $\mathcal{C}$ soddisfino alla condizione* α; (cioè: per ogni punto x_0, y_0 di A' per il quale passi una curva ordinaria $\mathcal{C}$, di A' si possa condurre un arco di curva, continua, rettificabile, appartenente ad A', privo di punti multipli, sul quale sia $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, e tale che, la curva $\overline{\mathcal{C}}$, formata dalla $\mathcal{C}$ alla quale si sia aggiunto questo arco e quello ottenuto da questo contando i suoi punti nel verso opposto in modo da ottenere una curva continua, verifichi la: $U_{\overline{\mathcal{C}}} = \bar{u}$) il minimo, in questo caso, esiste certamente.

Indichiamo con $\mathcal{C}_0'$ il pezzo di curva $\mathcal{C}_0$ che va dal primo punto terminale al punto (x_1, y_1), e con $\mathcal{C}_0''$ il secondo pezzo, sarà: $\overline{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{C}_0' + \Gamma + \mathcal{C}_0''$, dove Γ è la curva che aggiungiamo nel punto (x_1, y_1) mediante la costruzione indicata dalla condizione α. Perciò sarà:

$$U_{\overline{\mathcal{C}}_0} = a + \int_{\mathcal{C}_0'} F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0}) ds + \\ + \int_{\Gamma} F(x, y, x', y', u) ds + \int_{\mathcal{C}_0''} F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0''}) ds$$

dove nel secondo integrale la u va sostituita con la soluzione dell'equazione differenziale (a) relativa alla curva Γ e al valore iniziale $U_{\mathcal{C}_0'}$. Se U_Γ è il valore di questa soluzione nel secondo punto terminale di Γ, nel terzo integrale $U_{\mathcal{C}_0''}$ è calcolato con il valore iniziale U_Γ. Sarà naturalmente:

$$\text{(II)} \qquad \bar{u} - U_{\mathcal{C}_0} = U_{\bar{\mathcal{C}}_0} - U_{\mathcal{C}_0} = \int_\Gamma F(x, y, x', y', u)ds + \\ + \int_{\mathcal{C}_0''} F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0''}) ds - \int_{\mathcal{C}_0''} F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0}) ds,$$

e con notazioni analoghe per il funzionale $V_{\mathcal{C}}$:

$$V_{\bar{\mathcal{C}}_0} - V_{\mathcal{C}_0} = \int_\Gamma f(x, y) F(x, y, x', y', u)ds + \\ + \int_{\mathcal{C}_0''} f(x_0, y_0) F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0''}) ds - \int_{\mathcal{C}_0''} f(x_0, y_0) F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0}) ds,$$

oppure:

$$V_{\bar{\mathcal{C}}_0} - V_{\mathcal{C}_0} = \int_\Gamma f(x, y) F(x, y, x', y', u)ds + \\ + \int_{\mathcal{C}_0''} f(x_0, y_0) [F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0''}) - F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0})] ds$$

e siccome su Γ, e $\mathcal{C}_0''$, è $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$ e applicando il teorema della media al secondo integrale, viene:

$$V_{\bar{\mathcal{C}}_0} - V_{\mathcal{C}_0} \leq f(x_1, y_1) \left\{ \int_\Gamma F(x, y, x', y', u)ds + \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{C}_0''} [F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0''}) - F(x_0, y_0, x_0', y_0', U_{\mathcal{C}_0})] ds \right\}$$

e confrontando con la (II)

$$V_{\bar{\mathcal{C}}_0} - V_{\mathcal{C}_0} \leq f(x_1, y_1)[U_{\bar{\mathcal{C}}_0} - U_{\mathcal{C}_0}]$$

e paragonando con la relazione data dal teorema del confronto viene:

$$J - V_{\bar{\mathcal{C}}_0} \geq 0,$$

esiste il minimo nella classe $\bar{\bar{K}}$.

3°). Se, invece delle ipotesi che ci hanno servite per stabilire il primo teorema del confronto, si ammettono quelle del secondo (che ci permette di scrivere la disuguaglianza isoperimetrica) si possono ripetere i ragionamenti fatti in 1°) con la condizione che, se m indica il minimo di $f(x, y, u)$ su $\mathcal{C}_0$, invece della $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$, su Γ sia verificata la: $f(x, y, \bar{u}) \leq m$.

OSSERVAZIONE. - In quanto precede invece del funzionale $V_{\mathcal{C}}$ si può mettere il funzionale:

$$V^*_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \{ f(x, y) \cdot F(x, y, x', y', u) + M(x, y)x'N(x, y)y' \} \, ds$$

con M, N funzioni continue in A, poichè su Γ

$$\int_{\Gamma} \{ M(x, y)x' + N(x, y)y' \} \, ds = 0.$$

3. - III° Teorema d'esistenza.

Se F è sempre positiva, se F e G soddisfano a delle condizioni sufficienti per la semicontinuità dei funzionali $U_{\mathcal{C}}$, $V_{\mathcal{C}}$ su una classe completa K di curve ordinarie a totale ramificazione ([16]), *tutte contenute in una parte limitata e chiusa A' di A, se queste curve sono tale che, ad ognuna di esse, si possa condurre, a partire dal secondo estremo, un arco di curva di lunghezza qualunque, appartenente ad $\bar{A}$, per cui sia $G \equiv 0$; allora esisterà il minimo di $V_{\mathcal{C}}$ nella sottoclasse $\bar{K}$ delle curve di K per le quali: $U_{\mathcal{C}} = \bar{u}$.*

Questo teorema è lo stesso di quello che si dà nel problema isoperimetrico ([17]) ed ammette la stessa dimostrazione.

4. - IV° Teorema d'esistenza.

Date le funzioni F e G ad ogni curva $\mathcal{C}$ ordinaria relativamente alle funzioni F, G e ai valori iniziali α, β corrispondono i funzionali $U_{\mathcal{C}}$ e $V_{\mathcal{C}}$, e dunque anche il terzo funzionale:

$$W_{\mathcal{C}} = V_{\mathcal{C}} + \lambda U_{\mathcal{C}},$$

dove λ è un numero positivo prefissato. Si può scrivere anche:

$$W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} [G(x, y, x', y', u, v) + \lambda F(x, y, x', y', u)] \, ds + \lambda \alpha + \beta,$$

dove al posto di u e v si sostituisce $U_{\mathcal{C}}(s)$ e $V_{\mathcal{C}}(s)$.

Questo funzionale dipende anche da λ e lo indicheremo meglio con $W_{\mathcal{C}}(\lambda)$. Esso è del tipo dei funzionali che si studiano nei problemi di LAGRANGE-MAYER.

([16]) Vedere L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo II, p, 466.
([17]) Vedere L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo II, p. 479.

Facciamo allora l'ipotesi seguente:

Il problema libero relativo al funzionale $W_{\mathcal{C}}(\lambda)$ *ammetta minimo sulla classe* K *qualunque sia* $\lambda > 0$ *in un intervallo* $(\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}})$. Se si viene a trovare un λ_0 per cui il funzionale $U_{\mathcal{C}}$ relativo alla minimante del problema libero relativo a $W_{\mathcal{C}}(\lambda_0)$ [curva che nel seguito indicheremo con $\mathcal{C}(\lambda_0)$] sia uguale a $\bar{u}$, allora questa curva da anche il minimo per il problema condizionato.

Infatti, essendo $\mathcal{C}(\lambda_0)$ minimante di $W_{\mathcal{C}}(\lambda_0)$ in K, si ha, se $\mathcal{C}$ è una qualunque curva di K:

$$W_{\mathcal{C}}(\lambda_0) \geqq W_{\mathcal{C}(\lambda_0)}(\lambda_0),$$

e tornando alla definizione di $W_{\mathcal{C}}$:

$$V_{\mathcal{C}} + \lambda_0 U_{\mathcal{C}} \geqq V_{\mathcal{C}(\lambda_0)} + \lambda_0 U_{\mathcal{C}(\lambda_0)},$$

e se per ipotesi le curve sono della classe $\bar{K}$, cioè: $U_{\mathcal{C}(\lambda_0)} = U_{\mathcal{C}} = \bar{u}$, si ha;

$$V_{\mathcal{C}} \geqq V_{\mathcal{C}(\lambda_0)}.$$

Tutto sta a trovare quando è che esiste un tale λ_0.

Osserviamo che, variando il λ, la curva minimante del problema libero varierà in generale e con essa anche il funzionale $U_{\mathcal{C}(\lambda)}$, che diventa così funzione del parametro λ. Studiamo in quale ipotesi $U_{\mathcal{C}(\lambda)}$ è continuo come funzione di λ.

Facciamo l'ipotesi che il problema relativo al funzionale $W_{\mathcal{C}}(\lambda)$ *ammetta una minimante, e una sola, qualunque sia* λ *nell'intervallo* $(\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}})$, l'esistenza potendone essere provata da un qualunque teorema d'esistenza per il problema di LAGRANGE libero ([18]) che si basi sul metodo delle successioni minimizzanti.

Proviamo subito che $U_{\mathcal{C}(\lambda)}$ è monotono decrescente rispetto a λ. Infatti se λ_1, λ_2 sono due valori dell'intervallo $(\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}})$ e se $\mathcal{C}$ è una curva qualunque di K, sarà:

$$V_{\mathcal{C}} + \lambda_1 U_{\mathcal{C}} > V_{\mathcal{C}(\lambda_1)} + \lambda_1 U_{\mathcal{C}(\lambda_1)},$$
$$V_{\mathcal{C}} + \lambda_2 U_{\mathcal{C}} > V_{\mathcal{C}(\lambda_2)} + \lambda_2 U_{\mathcal{C}(\lambda_2)},$$

e in particolare, facendo coincidere prima $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C}(\lambda_2)$ poi con $\mathcal{C}(\lambda_1)$:

$$V_{\mathcal{C}(\lambda_2)} + \lambda_1 U_{\mathcal{C}(\lambda_2)} > V_{\mathcal{C}(\lambda_1)} + \lambda_1 U_{\mathcal{C}(\lambda_1)},$$
$$V_{\mathcal{C}(\lambda_1)} + \lambda_2 U_{\mathcal{C}(\lambda_1)} > V_{\mathcal{C}(\lambda_2)} + \lambda_2 U_{\mathcal{C}(\lambda_2)},$$

([18]) Vedere B. MANIÀ memoria citata ed anche: *Alcuni teoremi d'unicità nel Calcolo delle Variazioni.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. VI, 1937.

e sommando membro a membro e riducendo:

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,U_{\mathcal{C}(\lambda_2)} > (\lambda_1-\lambda_2)\,U_{\mathcal{C}(\lambda_1)}\,.$$

L'asserto è così dimostrato e se ne ricava che $U_{\mathcal{C}(\lambda)}$ è limitato nell'intervallo $(\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}})$.

Dimostriamo che il funzionale $W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda)$ pensato come funzione di λ è continuo.

Dalla relazione: $W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda) \leq W_{\mathcal{C}}(\lambda)$ si ricava: $W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda) \leq V_{\mathcal{C}(\lambda_0)} + \lambda U_{\mathcal{C}(\lambda_0)}$.

Si può ancora scrivere:

$$W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda) \leq V_{\mathcal{C}(\lambda_0)} + \lambda_0 U_{\mathcal{C}_0(\lambda_0)} + (\lambda-\lambda_0)\,U_{\mathcal{C}(\lambda_0)}\,,$$

oppure:

$$W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda) - W_{\mathcal{C}(\lambda_0)}(\lambda_0) \leq (\lambda-\lambda_0)\,U_{\mathcal{C}(\lambda_0)}\,,$$

e cambiando λ e λ_0:

$$W_{\mathcal{C}(\lambda_0)}(\lambda_0) - W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda) \leq (\lambda_0-\lambda)\,U_{\mathcal{C}(\lambda)}\,;$$

ma tanto $U_{\mathcal{C}(\lambda_0)}$ quanto $U_{\mathcal{C}(\lambda)}$ sono limitati: se ne deduce l'asserto.

Proviamo ora che al tendere di λ a λ_0 la curva $\mathcal{C}(\lambda)$ tende alla curva $\mathcal{C}(\lambda_0)$.

Preso un η positivo si può determinare un δ positivo tale che, per qualunque curva $\mathcal{C}$ ordinaria della classe K, che non sia appartenente ordinatamente all'intorno (η) di $\mathcal{C}(\lambda_0)$ sia:

$$W_{\mathcal{C}}(\lambda_0) - W_{\mathcal{C}(\lambda_0)}(\lambda_0) > \delta.$$

Supponiamo che ciò non sia vero: cioè, qualunque sia δ piccolo, si possa trovare una curva $\mathcal{C}$ di K, non appartenente ordinatamente all'intorno (η) di $\mathcal{C}(\lambda_0)$ per cui:

$$W_{\mathcal{C}}(\lambda_0) - W_{\mathcal{C}(\lambda_0)}(\lambda_0) \leq \delta.$$

Si potrà costruire una successione minimizzante per il funzionale $W_{\mathcal{C}}(\lambda_0)$ distinta da quella che permetteva di dimostrare che $\mathcal{C}(\lambda_0)$ è la minimante del problema, e dunque con li stessi ragionamenti si dimostrerebbe l'esistenza di un'altra minimante. Ciò è stato escluso dalle ipotesi.

Ora preso $\frac{\delta}{2} > 0$ si può trovare un ε tale che se: $|\lambda-\lambda_0| < \varepsilon$ è:

$$|W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda) - W_{\mathcal{C}(\lambda_0)}(\lambda_0)| < \frac{\delta}{2}\,;$$

sempre a causa della limitatezza di $U_{\mathcal{C}(\lambda)}$ si può scegliere ε in modo che sia anche:

$$|W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda_0) - W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda)| < \frac{\delta}{2}\,,$$

e dunque combinando:

$$|W_{\mathcal{C}(\lambda)}(\lambda_0) - W_{\mathcal{C}(\lambda_0)}(\lambda_0)| < \delta.$$

Per quanto s'è visto sopra, la curva $\mathcal{C}(\lambda)$ appartiene, allora, ordinatamente all'intorno (η) della curva $\mathcal{C}(\lambda_0)$.

Ammesse le ipotesi che ci assicurano la semicontinuità dei funzionali $U_{\mathcal{C}}$, $V_{\mathcal{C}}$ e siccome il funzionale $V_{\mathcal{C}(\lambda)} + \lambda_0 U_{\mathcal{C}(\lambda)}$ per l'ultima disuguaglianza è continuo sulla curva $\mathcal{C}(\lambda_0)$, anche $U_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $V_{\mathcal{C}(\lambda)}$ sono continui sulla curva $\mathcal{C}(\lambda_0)$. Le stesse conclusioni si sarebbero ottenute mediante l'aiuto dei teoremi di convergenza del capitolo I.

In queste condizioni possiamo senz'altro affermare che l'equazione:

$$U_{\mathcal{C}(\lambda)} = \bar{u},$$

ammette una ed una sola soluzione per ogni $\bar{u}$ compreso tra $U_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}$ e $U_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}$.

Possiamo enunciare il:

TEOREMA: *Definiti i funzionali $U_{\mathcal{C}}$, $V_{\mathcal{C}}$ come abbiamo indicato, per ogni curva d'una classe K, e considerato il funzionale: $W_{\mathcal{C}}(\lambda) = V_{\mathcal{C}} + \lambda U_{\mathcal{C}}$, dove λ è positivo; ammessa la semicontinuità di $U_{\mathcal{C}}$ e $V_{\mathcal{C}}$, e se il problema libero relativo al funzionale $W_{\mathcal{C}}(\lambda)$ ammette una e una sola minimante (oppure l'applicabilità d'un teorema di convergenza), data dal procedimento delle successioni minimizzante* [19], *nella classe K e qualunque sia λ nell'intervallo $(\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}})$: allora il problema condizionato relativo al funzionale $V_{\mathcal{C}}$ e alla classe K delle curve di K per cui $U_{\mathcal{C}} = \bar{u}$, dove $\bar{u}$ è un valore dell'intervallo $(U_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, U_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})})$, ammette una ed una sola minimante.*

CAPITOLO III.

Condizione necessaria per l'esistenza dell'estremo. Equazioni estremanti.

1. - Sia $\mathcal{C}_0$: $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, con $0 \leq s \leq L_0$, una curva estremante per l'integrale $V_{\mathcal{C}}$ nella classe $\bar{K}$ delle curve d'una classe K per cui $U_{\mathcal{C}} = \bar{u}$, sia a_0 un suo arco i cui punti, al più esclusi quelli terminali, siano tutti interni al campo A e di indifferenza [20] rispetto al campo A e alla classe K. Sia a_0' una parte di a_0 che non contenga nessun dei punti terminali di a_0, e sia inoltre

---

[19] Oppure se vale il teorema di OSGOOD vedere L. TONELLI, op. citata, t. II, p. 212.

[20] Vedere L. TONELLI, op. citata, t. II, n.i 84-317.

sufficientemente piccola affinchè esista un $\varrho > 0$ tale che tutti i punti del piano (x, y) distanti non più di ϱ da punti di a_0' appartengono al campo A, e che ogni curva ottenuta da $\mathcal{C}_0$ sostituendo a_0' con un qualsiasi arco di medesimi estremi, continuo e rettificabile, appartenga qualora risultasse ordinaria, alla classe K. Siano $\varphi(s)$ e $\psi(s)$ due funzioni Lipschitziane sull'intervallo (s_1', s_2') corrispondenti all'arco a_0', e soddisfacenti alle condizioni:

$$\varphi(s_1') = \varphi(s_2') = \psi(s_1') = \psi(s_2') = 0,$$

ed identicamente nulle fuori di (s_1', s_2'). Formiamo la curva $\mathcal{C}_{\gamma,\eta}$ definita dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = x_0(s) + \gamma\varphi(s) + \eta\varphi(s) \\ y = y_0(s). \end{cases}$$

Si può sempre trovare due numeri $\bar{\gamma}$, $\bar{\eta}$ positivi sufficientemente piccoli tali che se $|\gamma| < \bar{\gamma}$, $|\eta| < \bar{\eta}$, la curva $\mathcal{C}_{\gamma,\eta}$, in virtù dei teoremi sull'esistenza e la loro continuità rispetto a parametri degli integrali dell'equazioni differenziali, sia una curva ordinaria della classe K. Avremo:

$$U_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}} = \int_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}} F[x_0(s) + \gamma\varphi(s) + \eta\psi(s),\, y_0,\, x_0'(s) + \gamma\varphi'(s) + \eta\psi'(s),\, y_0',\, U_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}(s)]ds,$$

ora per un calcolo noto ([21]):

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta} U_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}(s)\right]_{\substack{\gamma=0\\ \eta=0}} = \Psi^{-1}(s) \int_{s_1'}^{s} (F_x\psi + F_{x'}\psi')\Psi ds,$$

$s_1' \leq s \leq s_2'$, con,

$$\Psi(s) = e^{-\int_0^s F_u(x_0,\, y_0,\, x_0',\, y_0',\, U_{\mathcal{C}_0})\, ds}.$$

Supponiamo che la curva $\mathcal{C}_0$ non sia un estremaloide per il problema libero cioè supponiamo che $\left[\frac{\partial}{\partial\eta} U_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}(L_0)\right]_{\substack{\gamma=0\\ \eta=0}} \neq 0.$

Immaginiamo adesso di legare η e γ in modo da soddisfare all'equazione $U_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}} = \bar{u}$. Per il teorema delle funzioni implicite questa equazione è atta a definire in un intorno conveniente dello zero una funzione $\eta = \eta(\gamma)$ tale che $\mathcal{C}_{\gamma,\eta(\gamma)}$, con $|\gamma| < \bar{\gamma}$, appartenga sempre alla classe $\bar{\bar{K}}$.

([21]) L. TONELLI: *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange.* Rendiconti R. A. Lincei, vol. XXIV, fasc. 9, novembre 1936.

Consideriamo il funzionale $V_{\mathcal{C}}$ calcolato sulla curva $\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta(\gamma)}$:

$$V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta(\gamma)}}=\int_0^{L_0} G(x_0(s)+\gamma\varphi(s)+\eta(\gamma)\psi(s),\ y_0(s),$$
$$x_0'(s)+\gamma\varphi'(s)+\eta(\gamma)\psi'(s),\ y_0'(s),\ U_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta(\gamma)}}(s),\ V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta(\gamma)}}(s))ds.$$

Sull'estremante sarà certamente:

(1) $$\left[\frac{d}{d\gamma}V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta(\gamma)}}\right]_{\gamma=0}=0,$$

e sarà quest'equazione opportunamente sviluppata che darà l'equazione che cerchiamo. Si sa che:

$$\frac{d}{d\gamma}V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta(\gamma)}}=\frac{\partial V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}{\partial\gamma}+\frac{d\eta(\gamma)}{d\gamma}\cdot\frac{\partial V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}{\partial\eta},$$

e tenuto conto che:

$$\frac{d\eta(\gamma)}{d\gamma}=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial\gamma}V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}{\dfrac{\partial}{\partial\eta}U_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}},$$

si ottiene:

$$\left[\frac{d}{d\gamma}V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta(\gamma)}}\right]_{\gamma=0}=\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}{\partial\gamma}\right]_{\substack{\gamma=0\\ \eta=0}}-\left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial\eta}V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}{\dfrac{\partial}{\partial\eta}U_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}\right]_{\substack{\gamma=0\\ \eta=0}}\cdot\left[\frac{\partial U_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}{\partial\gamma}\right]_{\substack{\gamma=0\\ \eta=0}},$$

e chiamando con Γ la quantità:

$$\Gamma=-\left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial\eta}V_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}{\dfrac{\partial}{\partial\eta}U_{\mathcal{C}_{\gamma,\,\eta}}}\right]_{\substack{\gamma=0\\ \eta=0}},$$

che è una costante indipendente da φ l'equazione (1) si scrive:

(2) $$\left[\frac{d}{d\gamma}(V_{\mathcal{C}_\gamma}+\Gamma U_{\mathcal{C}_\gamma})\right]_{\gamma=0}=0.$$

2. - Svilupperemo adesso questa relazione in modo da darle una forma esplicita. Abbiamo già ricordato che:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}U_{\mathcal{C}_\gamma}\right]_{\gamma=0}=\Psi^{-1}\int_{s_1'}^{s}(F_x\varphi+F_{x'}\varphi')\Psi ds,$$

con

$$\Psi=e^{-\int_{s_1'}^{s}F_u ds}\qquad \text{per}\quad s_1'\leq s\leq s_2';$$

mentre che se $s_2' \leqslant s \leqslant L_0$ è invece:

$$\left[\frac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} = \left[\frac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}(s_2')}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} + \int_{s_2'}^{s} F_u \left[\frac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} ds =$$

$$= e^{\int_{s_2'}^{s} F_u ds} \left[\frac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}(s_2')}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} = \Psi(s_2')\,\Psi^{-1}(s) \left[\frac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}(s_2')}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0}.$$

Così pure:

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} = \int_{s_1'}^{s} \left\{ G_x \varphi + G_{x'} \varphi' + G_u \frac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}}{\partial \gamma} + G_v \frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}}{\partial \gamma} \right\} d\sigma, \quad \text{per} \quad s_1' \leqslant s \leqslant s_2',$$

e sostituendovi dentro l'espressione di $\dfrac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}}{\partial \gamma}$ si ottiene:

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} = \int_{s_1'}^{s} \left\{ G\varphi + G_{x'} \varphi' + G_u \Psi^{-1}(\sigma) \int_{s_1'}^{\sigma} (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \Psi d\tau + G_v \frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}}{\partial \gamma} \right\} d\sigma,$$

integrando per parti il terzo termine e ponendo:

$$\Lambda(s) = \int_{s_1'}^{s} G_u \Psi^{-1} d\tau,$$

si ha:

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} = \int_{s_1'}^{s} \{ G_x\varphi + G_{x'} \varphi' + (F_x\varphi + F_{x'} \varphi')[\Lambda(s) - \Lambda(\sigma)]\, \Psi(\sigma) \} d\sigma + \int_{s_1'}^{s} G_v \frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}}{\partial \gamma} d\sigma;$$

e quindi :

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial \gamma}\right]_{\gamma=0} = \Theta^{-1}(s) \int_{s_1'}^{s} \left\{ G_x\varphi + G_{x'} \varphi' + \int_{s_1'}^{s} (F_x\varphi + F_{x'} \varphi')\, \Psi(\sigma)\, G_u(s)\, \Psi^{-1}(s) d\sigma \right\} \Theta(s) ds,$$

dove

$$\Theta = e^{-\int_{s_1'}^{s} G_\gamma d\tau}.$$

Integriamo per parti il secondo integrale, ponendo

$$\lambda(s) = \int_{s_1'}^{s} \Theta(s)\, G_u(s)\, \Psi^{-1}(s) ds,$$

si ha:

$$\int_{s_1'}^{s} \Theta \left\{ \int_{s_1'}^{s} (F_x\varphi + F_{x'}\varphi')\Psi(\sigma) G_u(s)\Psi^{-1}(s) d\sigma \right\} ds =$$

$$= \lambda(s) \int_{s_1'}^{s} (F_x\varphi + F_{x'}\varphi')\Psi(\sigma) d\sigma - \int_{s_1'}^{s} \lambda(\sigma)(F_x\varphi + F_{x'}\varphi')\Psi(\sigma) d\sigma$$

e dunque:

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s_2')}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=0} = \Theta^{-1}(s_2') \int_{s_1'}^{s_2'} \{(G_x\varphi + G_{x'}\varphi')\Theta(s) + (F_x\varphi + F_{x'}\varphi')(\lambda(s_2') - \lambda(s))\Psi(s)\} ds;$$

mentre che per $s_2' \leqslant s \leqslant L_0$ è:

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=0} = \left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s_2')}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=0} + \int_{s_2'}^{s} \left\{ G_u \frac{\partial U_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial\gamma} + G_v \frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(s)}{\partial\gamma} \right\} ds,$$

e sostituendo alle quantità note la loro espressione e integrando l'equazione ottenuta si ha:

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(L_0)}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=0} = \int_{s_1'}^{s_2'} \Big[\Theta^{-1}(s_2')(G_x\varphi + G_{x'}\varphi')\Theta(s) +$$

$$+ (F_x\varphi + F_{x'}\varphi')\Psi[\Theta^{-1}(s_2')\{\lambda(s_2') - \lambda(s)\} + \Theta^{-1}(L_0)\int_{s_2'}^{L_0} G_u\Psi^{-1}\Theta(s) ds]\Big] ds$$

oppure

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(L_0)}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=0} = \int_{s_1'}^{s_2'} \Big[\Theta^{-1}(s_2')(G_x\varphi + G_{x'}\varphi')\Theta(s) +$$

$$+ (F_x\varphi + F_{x'}\varphi')\Psi\{\Theta^{-1}(s_2')[\lambda(s_2') - \lambda(s)] + \Theta^{-1}(L_0)[\lambda(L_0) - \lambda(s_2')]\}\Big] ds,$$

e ammesse le posizioni:

$$M(s) = \Theta^{-1}(s_2')\Theta(s),$$

e,

$$N(s) = \Psi\{\Theta^{-1}(s_2')[\lambda(s_2') - \lambda(s)] + \Theta^{-1}(L_0)[\lambda(L_0) - \lambda(s_2')]\};$$

avremo:

$$\left[\frac{\partial V_{\mathcal{C}_\gamma}(L_0)}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=0} = \int_{s_1'}^{s_2'} \{M(s)(G_x\varphi + G_{x'}\varphi') + N(s)(F_x\varphi + F_{x'}\varphi')\} ds,$$

con ciò la (2) si scrive nella forma:

$$\int_{s_1'}^{s_2'} \{ M(s)(G_x\varphi + G_{x'}\varphi') + (F_x\varphi + F_{x'}\varphi')(N(s) + \Gamma\Psi^{-1}(L_0)) \} ds = 0 ;$$

e ponendo $K = MG + F(N + \Gamma\Psi^{-1}(L_0))$ si può mettere anche nella forma:

$$\int_{s_1'}^{s_2'} (K_x\varphi + K_{x'}\varphi) ds = 0$$

e integrando per parti il termine $K_x\varphi$ tenendo conto che $\varphi(s_2') = 0$ viene:

$$\int_{s_1'}^{s_2'} \varphi' \left\{ K_{x'} - \int_{s_1'}^{s} K_x\, ds \right\} ds = 0$$

e di qui si deduce con l'osservazione di P. DU BOIS REYMOND che la quantità tra parentesi, che è continua deve essere costante;

$$K_{x'} - \int_{s_1'}^{s} K_x ds = \text{cte}$$

il secondo membro è derivabile, se si ammette che l'arco a_0' sia di classe 1, K_x è continua, l'uguaglianza si può derivare membro a membro:

$$K_x - \frac{d}{ds} K_{x'} = 0.$$

Consideriamo ora un punto qualsiasi Q di a_0, non interno a a_0', e non punto terminale di a_0, consideriamo un arco a_0'' che lo contenga, non sovrapponente ad a_0' e tale che esista un numero ϱ' positivo, in modo che, tutti i punti del piano (x, y) che distano da a_0'' per meno di ϱ' appartengano al campo A. Definiamo le funzioni φ e ψ già definite su (s_1, s_2) anche sull'intervallo (s_1'', s_2'') relativo a a_0', Lipschitziane e tale che:

$$\varphi(s_1'') = \varphi(s_2'') = \psi(s_1'') = \psi(s_2'') = 0,$$

ripetendo i calcoli fatti si ricava la medesima relazione che è dunque vera su tutti i punti interni di a_0 e con un piccolo ragionamento ([22]) noto essa vale anche nei punti terminali. Enunciamo così, il seguente:

TEOREMA: *Se $\mathcal{C}_0$ è una curva estremante per il funzionale $V_{\mathcal{C}}$ nella classe $\overline{K}$, se ad ogni arco di classe* 1, *i cui punti, esclusi al più gli*

([22]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo II, p. 94.

estremi sono interni al campo A e di indiferenza, corrisponde una funzione $\varphi(s)$ *Lipschitziana tale che, se* (s_1, s_2) *e l'intervallo relativo all'arco* a_0, *sia:*

$$\varphi(s_1)=\varphi(s_2)=0, \qquad \int_{s_1}^{s_2} \Psi(F_x\varphi+F_{x'}\varphi')\,ds \neq 0, \qquad \Psi=e^{-\int F_v\,ds}$$

allora su a_0 *è:*

$$K_x-\frac{d}{ds}K_{x'}=0, \qquad K_y-\frac{d}{ds}K_{y'}=0 \tag{3}$$

con

$$K=M(s)G+F(N+\Gamma\Psi^{-1}(L_0)), \qquad \Gamma=-\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\eta}\,{}^{V}\!e_{\eta}}{\frac{\partial}{\partial\eta}\,{}^{U}\!e_{\eta}}\right]_{\eta=0}.$$

Questo teorema si può facilmente generalizzare anche per le curve ordinarie le (3) vanno però sostituite dalle:

$$\int_0^s K_x\,ds-\frac{d}{ds}\int_0^s K_{x'}\,ds=c_1, \qquad \int_0^s K_y\,ds-\frac{d}{ds}\int_0^s K_{y'}\,ds=c_2. \tag{3'}$$

Basta ripetere il ragionamento fatto dal TONELLI in *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, tomo II, pp. 98-100.