SILVIO CINQUINI

Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 1 (1940), p. 61-77
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_1_61_0>

PROBLEMI DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE n

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

In due recenti lavori [1] ho stabilito, sotto condizioni molto ampie e con procedimenti di carattere elementare, numerosi teoremi di esistenza di un integrale dell'equazione differenziale

$$y''=f(x, y, y'), \tag{1}$$

il quale congiunga due punti assegnati.

Conformemente a quanto ho soggiunto alla fine dell'introduzione al primo dei miei due lavori citati, voglio ora mostrare in qual modo il metodo già seguito, (che si basa sulla considerazione di equazioni ausiliarie analoghe alla (1), ma con secondo membro continuo e anche lipschitziano rispetto a (y, y')), possa riuscire altrettanto utile, quando sia opportunamente modificato e generalizzato, per stabilire l'esistenza di un integrale dell'equazione differenziale di ordine n $(n \geqslant 2)$,

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2}$$

il quale congiunga n punti assegnati, (o più generalmente soddisfi a una qualunque condizione valevole a determinare un polinomio di grado $n-1$).

Nelle proposizioni stabilite nella presente Memoria non verrà presupposta l'esistenza di alcun integrale particolare dell'equazione (2) [2]. Inoltre le condi-

---

(1) S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VIII (1939), pp. 1-22). - S. CINQUINI: *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* (ibidem, pp. 271-283). Tali lavori verranno indicati nel seguito, rispettivamente con *M. I* e *M. II*.

(2) Non viene data alcuna estensione di quelle proposizioni dei miei precedenti lavori, nelle quali giocava un ruolo essenziale la preventiva conoscenza di due integrali particolari dell'equazione in questione, perchè un semplicissimo esempio basta a mostrare che il problema analogo a quello allora risolto può non avere soluzione per $n \geqslant 3$.

Sia l'equazione differenziale $y'''=0$, e si considerino i suoi due integrali particolari $y=\pm k$, (ove k è una costante >1). Se è $\sigma>0$, i tre punti $(-1, -1)$, $\left(1-\sigma, -\frac{1}{8}\right)$, $(1, -1)$

zioni cui verrà sottoposta la funzione $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ presenteranno una generalità anche maggiore di quelle cui era sottoposta la funzione $f(x, y, y')$ nei miei precedenti lavori: ciò risulterà ben evidente dal fatto che i due teoremi che stabiliremo nel presente lavoro forniranno, anche nel caso particolare $n=2$, nuove estensioni di alcune delle più notevoli proposizioni dei miei precedenti lavori ([3]).

Il procedimento seguito nella dimostrazione del primo teorema della presente Memoria generalizza uno dei metodi già seguiti, per $n=2$, nei precedenti lavori, utilizzando ancora, in modo opportuno, la classica successione dei polinomi di STIELTJES; e dobbiamo soggiungere che, tenendo presente un recente lavoro del TONELLI per le equazioni del secondo ordine ([4]), abbiamo potuto semplificare qualche particolare della nostra dimostrazione.

Per stabilire il secondo teorema, siccome l'uso dei polinomi di STIELTJES non sarebbe stato altrettanto efficace, abbiamo ricorso ad un altro metodo di approssimazione, il quale si giova di una classe di funzioni, della quale abbiamo già fatto uso nel problema di approssimare contemporaneamente una funzione e un certo integrale, e che fu introdotta dal TONELLI nelle sue ricerche sulla quadratura delle superfici. Peraltro, l'uso di tale classe di funzioni non viene fatto immediatamente, ma è subordinato ad una operazione preliminare, in virtù della quale la successione di funzioni f_m, con le quali, in definitiva, viene approssimata la funzione f, soddisfa alla disuguaglianza

$$|f_m(x, y, y', ..., y^{(n-1)})| \leq |f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})|.$$

Questa seconda dimostrazione mette in luce il fatto che, per quanto le nostre ricerche non vengano mai meno al loro carattere estremamente elementare e traggano il loro spunto dalle ben note ricerche del SEVERINI, il metodo seguito si rinnova in ogni singolo caso, utilizzando nuovi originali procedimenti approssimativi che si presentano particolarmente efficaci.

Da quanto abbiamo detto nell'introduzione al nostro primo lavoro e nella presente risulta, naturalmente, che nel primo dei teoremi del presente lavoro sono contenuti, come caso particolare, tutti i risultati già pubblicati dal CACCIOPPOLI,

---

sono interni al rettangolo $R \equiv [-2 \leq x \leq 2, \ -k \leq y \leq k]$. L'unico integrale $y = y(x)$, (con $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ assolutamente continue), dell'equazione differenziale considerata, passante per i tre punti fissati è evidentemente $y = \dfrac{7}{8\sigma(2-\sigma)}(1-x^2) - 1$, onde $y(0) = \dfrac{7}{8\sigma(2-\sigma)} - 1$; e quindi per $0 < \sigma < 1 - \sqrt{1 - \dfrac{7}{8}\dfrac{1}{1+k}}$, risulta $y(0) > k$. Cioè, fissato k, si può sempre trovare una terna di punti interni a R e tali che non esista alcun integrale dell'equazione in questione passante per essi e tutto contenuto nel rettangolo R.

([3]) Precisamente di quella del n.° 4 di *M. I*, e di quella del n.° 1 di *M. II*.

([4]) L. TONELLI: *Sull'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$. (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VIII (1939), pp. 75-88).

basandosi sul noto principio di BIRKHOFF e KELLOG, e che abbiamo citati nella nostra prima Memoria (5).

Possiamo soggiungere che i nostri procedimenti sarebbero altrettanto efficaci per stabilire analoghi teoremi per i sistemi di equazioni differenziali (6).

1. - TEOREMA I. — *Sia* $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *una funzione definita per ogni* x *di* (a, b) *e per ogni n-pla* $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ *di numeri reali, la quale, per ogni* x *fissato, risulti continua rispetto a* $(y, y', ..., y^{(n-1)})$, *e, per ogni n-pla* $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ *fissata, risulti quasi-continua rispetto a* x. *Considerati* n *punti qualunque* (x_i, y_i), $(i=1, 2, ..., n)$, *con* $a \leq x_1 < x_2 < .... < x_n \leq b$, *si supponga che esistano* $n+1$ *funzioni* $\psi(x)$, $a_j(x)$, $(j=0, 1, ..., n-1)$, *non negative e integrabili* (7) *sull'intervallo* (x_1, x_n), *e tali che sia*

$$\int_{x_1}^{x_n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_n - x_1)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} a_j(x) \right) dx < 1, \tag{3}$$

in modo che in tutto il campo

$$C_\infty: \quad x_1 \leq x \leq x_n, \qquad |y^{(j)}| < +\infty, \quad (j=0, 1, ..., n-1; \; y^{(0)}=y),$$

sia verificata la disuguaglianza

$$|f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})| \leq \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \, |y^{(j)}| + \psi(x), \qquad (y^{(0)}=y). \tag{4}$$

---

(5) Anche il recente risultato di G. ZWIRNER [*Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine.* (Rend. Seminario Matematico R. Università di Padova, A. IX (1938), pp. 150-155)], è contenuto come caso particolare nel presente lavoro, in base a quanto è detto al n.° 3. Peraltro la dimostrazione dello ZWIRNER, a differenza di quelle del presente lavoro, fa uso di considerazioni topologiche.

Durante la revisione delle bozze di stampa del presente lavoro abbiamo avuto occasione di esaminare un estratto di un lavoro di G. ZWIRNER (*Problemi di valori ai limiti per equazioni differenziali ordinarie*) non ancora pubblicato, e che figurerà nei Rendiconti del Seminario Matematico di Padova. In una nota a pié di pagina alla fine del lavoro stesso, nel quale è contenuta una semplice estensione alle equazioni di ordine n di un teorema stabilito dal TONELLI per $n=2$, l'A. accenna alla possibilità di generalizzare alle equazioni $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ un altro teorema già noto per $n=2$, qualora la funzione f soddisfi «*probabilmente*» alla disuguaglianza

$$|f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})| \leq \varphi_0(y^{(n-2)})\varphi(y^{(n-1)}) + \chi(x).$$

Tale vago cenno trova, nel presente lavoro e in condizioni molto ampie, una ben chiara precisazione.

(6) Cfr., per un caso particolare, A. MINZONI: *Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine.* (Rend. Seminario Matematico R. Università di Padova, A. IX (1938), pp. 142-149).

(7) In tutto il presente lavoro l'integrabilità va intesa nel senso del LEBESGUE.

Allora l'equazione

$$(5)\qquad y^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_1)+\int_{x_1}^{x} f(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})dx$$

ammette almeno una soluzione $y=y_0(x)$, $(x_1 \leqslant x \leqslant x_n)$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi* $n-1$ *ordini e soddisfacente alle condizioni*

$$y_0(x_i)=y_i, \qquad (i=1, 2,\dots, n).$$

Potremo sempre supporre, per semplicità di dimostrazione, che sia

$$(6)\qquad y_1=y_2=\dots=y_n=0 \quad (^8).$$

Posto

$$L_1=\frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_n}\left[\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)+\psi(x)\right]dx}{\displaystyle 1-\int_{x_1}^{x_n}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x_n-x_1)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}a_j(x)\right]dx},$$

$$L=(1+L_1)[1+(x_n-x_1)^{n-1}],$$

e considerato x come parametro, in modo analogo al n.° 1 di *M. II*, si approssimi nel cubo ad n dimensioni $\Gamma\equiv[|y^{(j)}|\leqslant L+1;\ j=0, 1,\dots, n-1;\ y^{(0)}=y]$ la funzione $f(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ mediante la nota successione dei polinomi di STIELTJES nelle n variabili $y, y',\dots, y^{(n-1)}$. Si avrà così una successione di funzioni $\Pi_m(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$, $(m=1, 2,\dots)$, definite per ogni x di (x_1, x_n), e per ogni n-pla $(y, y',\dots, y^{(n-1)})$ di Γ, e ognuna di tali funzioni sarà, per ogni n-pla $(y, y',\dots, y^{(n-1)})$ fissata, quasi-continua in x, e, per ogni x fissato, razionale intera nelle $y, y',\dots, y^{(n-1)}$.

In virtù della (4) e per note proprietà dei polinomi di STIELTJES, (cfr. *M. II*, n.° 1), esiste un intero positivo $\overline{m}$, tale che, per $m>\overline{m}$, risulta in tutto il campo

$$C_L:\quad x_1\leqslant x\leqslant x_n, \qquad |y^{(j)}|\leqslant L, \quad (j=0, 1, 2,\dots, n-1;\ y^{(0)}=y),$$

$$(7)\qquad |\Pi_m(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})|\leqslant\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\,|y^{(j)}|+\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)+\psi(x), \qquad (y^{(0)}=y),$$

ed anche

$$(8)\qquad |\Pi_m(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})|\leqslant(1+L)\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)+\psi(x).$$

(8) A questo caso ci si può sempre ridurre con un opportuno cambiamento della funzione incognita $y(x)$, in virtù del quale, nella (4), le $a_j(x)$ restano immutate, e varia soltanto la $\psi(x)$.

Pertanto, analogamente a quanto si è ricordato al n.° 1 di *M. II*, è possibile determinare una funzione $\chi(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo (x_1, x_n), in modo che risulti in tutto C_L

$$\left| \frac{\partial \Pi_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(j)}} \right| \leq \chi(x), \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)}=y). \tag{9}$$

Nel campo C_∞ definiamo una successione di funzioni $Q_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $(m=\overline{m}+1, \overline{m}+2, \ldots)$, ponendo per ogni x di (x_1, x_n):

$$Q_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \Pi_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$\text{per } |y^{(j)}| \leq L, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)}=y);$$

$$Q_m(\ldots) = \Pi_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, L),$$
$$\text{per } |y^{(j)}| \leq L, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n-2), \quad y^{(n-1)} > L;$$

$$Q_m(\ldots) = \Pi_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, -L),$$
$$\text{per } |y^{(j)}| \leq L, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n-2), \quad y^{(n-1)} < -L;$$

$$Q_m(\ldots) = Q_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-3)}, L, y^{(n-1)}),$$
$$\text{per } |y^{(j)}| \leq L, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n-3), \quad y^{(n-2)} > L, \quad |y^{(n-1)}| < +\infty;$$

$$Q_m(\ldots) = Q_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-3)}, -L, y^{(n-1)}),$$
$$\text{per } |y^{(j)}| \leq L, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n-3), \quad y^{(n-2)} < -L, \quad |y^{(n-1)}| < +\infty;$$

. . . .

. . . .

$$Q_m(\ldots) = Q_m(x, L, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$\text{per } y > L, \quad |y^{(j)}| < +\infty, (j=1, 2, \ldots, n-1);$$

$$Q_m(\ldots) = Q_m(x, -L, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$\text{per } y < -L, \quad |y^{(j)}| < +\infty, \quad (j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Per la (7) risulta in tutto C_∞

$$|Q_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leq \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, |y^{(j)}| + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) + \psi(x), \tag{10}$$

ed anche per la (8)

$$|Q_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leq (1+L) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) + \psi(x). \tag{11}$$

Inoltre, tenendo conto del modo in cui è stata definita Q_m, in virtù della (9), risulta per ogni x di (x_1, x_n), se $(t_1, t_1', \ldots, t_1^{(n-1)})$, $(t_2, t_2', \ldots, t_2^{(n-1)})$ sono due n-ple di numeri reali,

$$\begin{aligned} &|Q_m(x, t_1, t_1', \ldots, t_1^{(n-1)}) - Q_m(x, t_2, t_2', \ldots, t_2^{(n-1)})| \leq \\ &\qquad \leq \chi(x)\,[\,|t_1 - t_2| + |t_1' - t_2'| + \ldots + |t_1^{(n-1)} - t_2^{(n-1)}|\,]. \end{aligned} \tag{12}$$

Considerata l'equazione differenziale

$$(13)\qquad y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_1) + \int_{x_1}^{x} Q_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})dx,$$

e presi comunque $n-1$ numeri finiti $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$, in virtù della (11) esiste, su tutto l'intervallo (x_1, x_n), almeno una soluzione della (13) $y=y(x)$, con $y(x)$ assolutamente continua con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, verificante le condizioni $y(x_1)=0$, $y^{(j)}(x_1)=y_1^{(j)}$, $(j=1, 2, \ldots, n-1)$. Inoltre, tenendo presente che, in virtù della (12) e per un noto teorema ([9]), tale soluzione varia con continuità al variare di $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ ed estendendo un noto ragionamento di carattere elementare ([10]), si conclude facilmente che esiste almeno una soluzione $y=y_m(x)$ della (13), per la quale risulta

$$(14)\qquad y_m(x_i)=0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

([9]) Vedi p. es. C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* (Teubner, 1918, Leipzig), Cap. XI.

([10]) Per semplicità di scrittura indicheremo in qual modo si estende il ragionamento, già ripetutamente sfruttato nei precedenti lavori per $n=2$, supponendo $n=4$.

Indicata con δ la minore delle differenze x_4-x_3, x_3-x_2, x_2-x_1, poniamo

$$\varDelta = x_4 - x_1, \qquad I = \int_{x_1}^{x_4} \left[(1+L)\sum_{j=0}^{3} a_j(x) + \psi(x)\right] dx,$$

$$F(x) = \int_{x_1}^{x} dt \int_{x_1}^{t} dt \int_{x_1}^{t} dt \int_{x_1}^{t} Q_m(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\, dt,$$

e teniamo presente che risulta per la (11)

$$(a)\qquad |F(x_i)| \leqslant \frac{(x_i-x_1)^3}{3!} I, \qquad (i=2, 3, 4).$$

Sia inoltre

$$\lambda_3 = 3\frac{I\varDelta^2}{\delta^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}\varDelta(\lambda_3+1) + \frac{2}{3}\frac{I\varDelta^2}{\delta}, \qquad \lambda_1 = \frac{\varDelta}{2!}(\lambda_2+1) + \frac{\varDelta^2}{3!}(\lambda_3+1) + \frac{I\varDelta^2}{3!}.$$

Se y_1', y_1'', y_1''' sono tre numeri reali qualunque, dalla (13) abbiamo per $n=4$

$$(b)\qquad y = y_1'(x-x_1) + y_1''\frac{(x-x_1)^2}{2!} + y_1'''\frac{(x-x_1)^3}{3!} + F(x).$$

Ora, tenuta presente la (a), se è

$$(c)\qquad |y_1''| \leqslant \lambda_2 + 1, \qquad |y_1'''| \leqslant \lambda_3 + 1,$$

risulta $y(x_2)>0$, per $y_1'>\lambda_1$, e $y(x_2)<0$, per $y_1'<-\lambda_1$. Quindi, in corrispondenza ad ogni coppia y_1'', y_1''', che soddisfi alle (c), esiste un valore y_1' dell'intervallo $(-\lambda_1, \lambda_1)$ per il

Esistono quindi, per $j=1, 2,\ldots, n-1$, almeno $n-j$ valori distinti $x^{(j)}_{m,1}$, $x^{(j)}_{m,2},\ldots,$ $x^{(j)}_{m,n-j}$, contenuti nell'intervallo (x_1, x_n), e tali che

$$(14') \quad y^{(j)}_m(x^{(j)}_{m,i})=0, \qquad \left(i=1, 2,\ldots, n-j;\ j=1, 2,\ldots, n-1,\ y^{(j)}_m(x)\equiv\frac{d^j y_m(x)}{dx^j}\right).$$

Pertanto, per una nota formula di Calcolo differenziale ([11]), indicato con K il massimo modulo di $y^{(n-1)}_m(x)$ sull'intervallo (x_1, x_n), sono ivi soddisfatte le disuguaglianze seguenti

$$(15) \qquad |y^{(j)}_m(x)|\leqslant\frac{(x_n-x_1)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}K, \qquad (j=0, 1, 2,\ldots, n-2;\ y^{(0)}=y).$$

---

quale risulta $y(x_2)=0$, cioè

$$0=y_1'(x_2-x_1)+y_1''\frac{(x_2-x_1)^2}{2!}+y_1'''\frac{(x_2-x_1)^3}{3!}+F(x_2).$$

Sostituendo nella (b) il valore di y_1' ricavato da quest'ultima, abbiamo

$$(d) \quad y=y_1''\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2!}+y_1'''\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x+x_2-2x_1)}{3!}+F(x)-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}F(x_2).$$

Pertanto, tenendo ancora presente la (a), se è $|y_1'''|\leqslant\lambda_3+1$, risulta $y(x_3)>0$, per $y_1''>\lambda_2$, e $y(x_3)<0$, per $y_1''<-\lambda_2$. Quindi, in corrispondenza ad ogni y_1''', con $|y_1'''|\leqslant\lambda_3+1$, esiste un valore y_1'' dell'intervallo $(-\lambda_2, \lambda_2)$, per il quale risulta $y(x_3)=0$, cioè

$$0=y_1''\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{2!}+y_1'''\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3+x_2-2x_1)}{3!}+F(x_3)-\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}F(x_2).$$

Dalla (d), sostituendovi il valore di y_1'' ricavato da quest'ultima, abbiamo

$$y=y_1'''\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{3!}+F(x)-\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}F(x_3)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_3-x_2)(x_2-x_1)}F(x_2).$$

Ma per $y_1'''>\lambda_3$ risulta $y(x_4)>0$, e per $y_1'''<-\lambda_3$ risulta $y(x_4)<0$; e quindi esiste un valore y_1''' dell'intervallo $(-\lambda_3, \lambda_3)$, tale che $y(x_4)=0$.

Se ne conclude che esiste una terna di numeri reali y_1', y_1'', y_1''', per i quali risulta $y(x_2)=y(x_3)=y(x_4)=0$.

([11]) Se $z(x)$ è una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate dei primi ν ordini, sull'intervallo (α, β), e se a_0, $a_1,\ldots, a_\nu$ sono $\nu+1$ valori distinti appartenenti a tale intervallo è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{\nu-1} & a_1^{\nu-1} & \ldots & a_\nu^{\nu-1} \\ z(a_0) & z(a_1) & \ldots & z(a_\nu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{\nu} & a_1^{\nu} & \ldots & a_\nu^{\nu} \end{vmatrix} \frac{z^{(\nu)}(\xi_\nu)}{\nu!},$$

ove ξ_ν è un opportuno valore dell'intervallo (α, β).

Per provare le (15), posto $x_i=x^{(0)}_{m,i}$, $(i=1, 2,\ldots, n)$, si faccia $\nu=n-j-1$, $a_0=x$, $a_i=x^{(j)}_{m,i}$, $(i=1, 2,\ldots, n-j-1)$, $z(x)=y^{(j)}_m(x)$, ove j assume successivamente i valori 0, 1, 2,...., $n-2$, e si tengano presenti le (14) e (14').

Ora, essendo

$$y_m^{(n-1)}(x)=\int_{x_{m,1}^{(n-1)}}^{x} Q_m(x,\, y_m,\, y'_m,\dots,\, y_m^{(n-1)})dx,$$

ed anche, per la (10)

$$|y_m^{(n-1)}(x)|\leqslant\left|\int_{x_{m,1}^{(n-1)}}^{x}\left[\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\,|y_m^{(j)}|+\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)+\psi(x)\right]dx\right|,$$

in virtù delle (15) risulta

$$K\left(1-\int_{x_1}^{x_n}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x_n-x_1)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\,a_j(x)\right]dx\right)\leqslant\int_{x_1}^{x_n}\left[\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)+\psi(x)\right]dx,$$

cioè $K\leqslant L_1$.

Tenendo ancora presenti le (14) e (14′) se ne deduce che ogni punto $(x,\, y_m(x),\, y'_m(x),\dots,\, y_m^{(n-1)}(x))$, $(x_1\leqslant x\leqslant x_n)$ appartiene al campo C_L, e perciò $y=y_m(x)$ è anche soluzione dell'equazione

$$y^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_1)+\int_{x_1}^{x}\Pi_m(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n-1)})dx.$$

Per provare il nostro asserto non rimane che ragionare, come nei nostri precedenti lavori, tenendo presente che l'uguale continuità delle derivate $y_m^{(n-1)}(x)$, $(m=\overline{m}+1,\, \overline{m}+2,\dots)$ discende immediatamente dalla (8).

OSSERVAZIONE I. - Il teorema del presente numero contiene come caso particolare i teoremi del CACCIOPPOLI citati in *M. I.* Basta ripetere, opportunamente generalizzata, l'osservazione fatta alla fine del n.° 4 di *M. I.*

OSSERVAZIONE II. - Anche nel caso particolare $n=2$, il teorema del presente numero fornisce un'estensione del teorema del n.° 4 di *M. I.*

ESEMPIO. - Sia $n=3$,

$$f(x,\, y,\, y',\, y'')=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{y^2+y'^2+y''^2}, \quad \text{per} \quad x\neq 0,$$

$$f(x,\, y,\, y',\, y'')=0, \quad \text{per} \quad x=0.$$

Se è $0<x_2<\frac{1}{4}$, ed y_1, y_2, y_3 sono tre numeri reali qualunque, esiste sempre almeno un integrale $y=y(x)$, $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\right)$, (con $y(x)$ assolutamente continua insieme con $y'(x)$, $y''(x)$), dell'equazione

$$y''=y''(0)+\int_0^x f(x,\, y,\, y',\, y'')dx,$$

per il quale risulta $y(0)=y_1$, $y(x_2)=y_2$, $y\left(\frac{1}{4}\right)=y_3$.

Infatti è verificata la (4) per $a_0(x) \equiv a_1(x) \equiv a_2(x) \equiv x^{-\frac{1}{3}}$, e il primo membro della (3) si riduce a

$$\frac{41}{32}\int_0^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{123}{64}\,16^{-\frac{1}{3}} < 1.$$

Peraltro non è applicabile alcuno dei teoremi del CACCIOPPOLI, perchè il rapporto $\dfrac{f(x, y, y', y'')}{\sqrt{y^2 + y'^2 + y''^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, non tende allo zero per $\sqrt{y^2+y'^2+y''^2} \to \infty$, ma anzi è grande fin che si vuole per x sufficientemente prossimo allo zero.

2. - TEOREMA II. — *Sia* $f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ *una funzione definita per ogni* x *di* (a, b), *e per ogni* n*-pla di numeri reali* $y, y',\ldots, y^{(n-1)}$, *la quale, per ogni* x *fissato, risulti continua rispetto a* $(y, y',\ldots, y^{(n-1)})$, *e, per ogni* n*-pla* $(y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ *fissata, risulti quasi-continua rispetto a* x; *e si supponga che*: I) *esistano* $n+2$ *funzioni non negative* $\gamma_1(u), \gamma_2(u),\ldots, \gamma_{n-1}(u)$, $\psi_1(x)$, $\varphi(v)$, $\varphi_1(v)$, *di cui le prime* $n-1$ *siano integrabili sull'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, $\psi_1(x)$ *sia integrabile sull'intervallo* (a, b), $\varphi(v)$ *e* $\varphi_1(v)$ *siano continue in* $(-\infty, +\infty)$, *con* $\varphi(v) > 0$, *e tali che esista un numero* $k > 0$, *per il quale si abbia*

$$|v|\,\varphi_1(v) \leq k\varphi(v), \tag{16}$$

e che sia

$$\int_0^{+\infty} \frac{vdv}{\varphi(v)} = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{vdv}{\varphi(v)} = -\infty, \tag{17}$$

in modo che, in tutto il campo

$$a \leq x \leq b, \qquad |y^{(j)}| < +\infty, \qquad (j=0, 1, 2,\ldots, n-1;\ y^{(0)}=y),$$

risulti

$$\begin{aligned} |f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})| \leq{} & \gamma_1(y^{(n-2)})\varphi(y^{(n-1)}) + \\ & + [\gamma_2(y^{(n-3)})\,|y^{(n-2)}| + \gamma_3(y^{(n-4)})\,|y^{(n-3)}| + \ldots \\ & \ldots + \gamma_{n-2}(y')\,|y''| + \gamma_{n-1}(y)\,|y'| + \psi_1(x)]\varphi_1(y^{(n-1)}); \end{aligned} \tag{18}$$

II) *in corrispondenza ad ogni numero* $\lambda^* > 0$ *si possa determinare una funzione* $\psi_*(x)$ *non negativa e integrabile sull'intervallo* (a, b), *in modo che, per ogni* $(n+1)$*-pla* $(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$, *con* $a \leq x \leq b$, $|y^{(j)}| \leq \lambda^*$, $(j=0, 1, 2,\ldots, n-1;\ y^{(0)}=y)$, *risulti*

$$|f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})| \leq \psi_*(x).$$

Allora se (x_i, y_i), $(i=1, 2,\ldots, n)$ *sono* n *punti qualunque del piano* (x, y), *tali che sia* $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$, *l'equazione*

$$y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})dx \tag{19}$$

ammette in (x_1, x_n) *almeno una soluzione* $y = y_0(x)$, $(x_1 \leq x \leq x_n)$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi* $n-1$ *ordini e tale che sia*

$$y_0(x_i) = y_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Infatti, osserviamo innanzi tutto che, in virtù della condizione I) del nostro enunciato, esiste un numero finito $L' > 0$, tale che se $y = y(x)$ è una soluzione della (19), che verifica le condizioni

$$y(x_i) = y_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

risulti in tutto (x_1, x_n), $|y^{(n-1)}(x)| \leq L'$ ([12]). Ne segue immediatamente che esiste un numero positivo L, tale che, in tutto (x_1, x_n), sono verificate le disuguaglianze

$$|y^{(j)}(x)| \leq L, \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)} = y).$$

([12]) Per provare il nostro asserto basta tener presente che, in virtù delle (20), esiste almeno un valore ξ di (x_1, x_n), per il quale risulta

$$y^{(n-1)}(\xi) = (n-1)! \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \right\}$$

ed usufruire della seguente estensione del lemma indicato nella nota ([6]) di *M. II*:

Sia $u(x)$ *una funzione assolutamente continua, insieme con le sue derivate dei primi* $n-1$ *ordini, sull'intervallo* (α, β), *siano* $\gamma_1(u), \gamma_2(u), \ldots, \gamma_{n-1}(u)$, $\psi_1(x)$, $\varphi(v)$, $\varphi_1(v)$, $n+2$ *funzioni non negative, di cui le prime* $n-1$ *siano integrabili sull'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, $\psi_1(x)$ *sia integrabile su* (α, β), $\varphi(v)$ *e* $\varphi_1(v)$ *siano continue sull'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *con* $\varphi(v) > 0$, *tali che esista una costante* $k > 0$, *per la quale sia*

$$|v|\, \varphi_1(v) \leq k\varphi(v), \tag{I}$$

e che sia

$$\int_0^{+\infty} \frac{v}{\varphi(v)}\, dv = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{v}{\varphi(v)}\, dv = -\infty,$$

in modo che in quasi-tutto l'intervallo (α, β) *sia verificata la disuguaglianza*

$$\begin{aligned} |u^{(n)}(x)| \leq{} & \gamma_1(u^{(n-2)}(x))\varphi(u^{(n-1)}(x)) + \\ & + [\gamma_2(u^{(n-3)}(x))\, |u^{(n-2)}(x)| + \ldots + \gamma_{n-1}(u(x))\, |u'(x)| + \psi_1(x)]\, \varphi_1(u^{(n-1)}(x)). \end{aligned} \tag{II}$$

Allora, in corrispondenza ad ogni numero $h' > 0$ *è possibile determinare un numero* $H' > 0$, *in modo che, se esiste almeno un valore* α' *dell'intervallo* (α, β) *con* $|u^{(n-1)}(\alpha')| \leq h'$, *risulti, in tutto* (α, β), $|u^{(n-1)}(x)| \leq H'$.

Per la dimostrazione basta ripetere, con alcuni complementi, un ragionamento già fatto dal TONELLI (vedi luogo cit. in ([4]), n.° 6, c)). A tal uopo si tenga presente che se (α_0, x), In corrispondenza ad ogni numero intero $m > L$, definiamo, per ogni x di (x_1, x_n) e per ogni n-pla $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ di valori reali, una funzione $\tilde{f}_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ nel seguente modo:

Posto $h_m = L : m$, per ogni $\bar{x}$ di (x_1, x_n) e per ogni n-pla $(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ appartenente al cubo ad n dimensioni $\Gamma \equiv [-L-1 \leqslant y^{(j)} \leqslant L+1\,;\ j=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)}=y]$, poniamo $\tilde{f}_m(\bar{x}, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ uguale al minimo della funzione $f(\bar{x}, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ in tutto il cubo ad n dimensioni $y_0^{(j)} - h_m \leqslant y^{(j)} \leqslant y_0^{(j)} + h_m$, $(j=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, se in quest'ultimo cubo è sempre $f(\bar{x}, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \geqslant 0$; uguale al massimo della funzione stessa nel cubo ora indicato, se ivi è sempre $f(\bar{x}, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \leqslant 0$; uguale allo zero altrimenti. Poi, per ogni $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ esterno a Γ, poniamo $\tilde{f}_m(\bar{x}, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$. Fatta tale operazione per ogni $\bar{x}$ di (x_1, x_n), la funzione $\tilde{f}_m$ risulta definita per ogni x dell'intervallo ora indicato e per ogni n-pla di numeri reali $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Successivamente definiamo una funzione $f_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, ponendo in tutto il campo

$$C_\infty:\quad x_1 \leqslant x \leqslant x_n, \qquad |y^{(j)}| < +\infty, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)}=y),$$

$$f_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) =$$
$$= \frac{1}{(2h_m)^n} \int_{-h_m}^{h_m} \cdots \int_{-h_m}^{h_m} \tilde{f}_m(x, y+z_0, y'+z_1, \ldots, y^{(n-1)}+z_{n-1})\, dz_0\, dz_1 \ldots dz_{n-1}.$$

La funzione f_m risulta, per ogni n-pla $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ fissata, quasi-continua rispetto ad x, ed anche, per ogni x fissato di (x_1, x_n), continua rispetto a $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, come facilmente si verifica.

(con $x > \alpha_0$) è un intervallo di (α, β), in cui è sempre $u^{(n-1)}(x) \geqslant 0$, dalla (II) in virtù della (I) si deduce

$$\int_{\alpha_0}^{x} \frac{u^{(n-1)}(x) u^{(n)}(x)}{\varphi(u^{(n-1)}(x))}\, dx \leqslant \int_{\alpha_0}^{x} \gamma_1(u^{(n-2)}(x))\, u^{(n-1)}(x)\, dx +$$
$$+ k \left[\int_{\alpha_0}^{x} \gamma_2(u^{(n-3)}(x))\, |u^{(n-2)}(x)| + \ldots + \gamma_{n-1}(u(x))\, |u'(x)| + \psi_1(x) \right] dx,$$

e quindi, siccome in (α_0, x) $u^{(n-2)}(x)$ cambia segno al più una volta, $u^{(n-3)}(x)$ al più due volte, ..., $u'(x)$ al più $n-2$ volte, ne segue

$$\int_{y^{(n-1)}(\alpha_0)}^{y^{(n-1)}(x)} \frac{u\,du}{\varphi(u)} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(u)\, du + k \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \{ 2\gamma_2(u) + 3\gamma_3(u) + \ldots + (n-1)\gamma_{n-1}(u) \}\, du + \int_{\alpha}^{\beta} \psi_1(x)\, dx \right],$$

ecc. ecc.

Inoltre, sempre in base alla costruzione fatta, risulta in tutto il campo C_∞ e per ogni intero $m > L$

$$(21) \qquad |f_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leq |f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})|.$$

Infine, determinata, in base all'ipotesi II) del nostro enunciato e prendendo per λ^* il numero $L+2$, una funzione $\psi_*(x)$ soddisfacente alla condizione là indicata, in virtù del modo in cui è stata definita la funzione f_m, e tenendo conto della (21), risulta in tutto C_∞ e per ogni $m > L$

$$(22) \qquad |f_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leq \psi_*(x);$$

ed anche, se $(t_1, t_1', \ldots, t_1^{(n-1)})$, $(t_2, t_2', \ldots, t_2^{(n-1)})$ sono due n-ple qualunque di numeri reali ([13])

$$(23) \qquad |f_m(x, t_1, t_1', \ldots, t_1^{(n-1)}) - f_m(x, t_2, t_2', \ldots, t_2^{(n-1)})| \leq$$
$$\leq \frac{1}{h_m} \psi_*(x) \left[|t_2 - t_1| + |t_2' - t_1'| + \ldots + |t_2^{(n-1)} - t_1^{(n-1)}| \right].$$

Osserviamo ancora, per il seguito, che, per ogni x di (x_1, x_n) e per ogni n-pla $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, con $|y^{(j)}| \leq L$, $(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)} = y)$, $f_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ converge, per $m \to \infty$, verso $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Ciò premesso, considerata l'equazione

$$y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_1) + \int_{x_1}^{x} f_m(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, dx,$$

tenendo conto delle (22) e (23) e ragionando in modo analogo al numero precedente, si conclude che esiste almeno un integrale $y = y_m(x)$, $(x_1 \leq x \leq x_n)$, (con $y_m(x)$ assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini), dell'equazione ora considerata, per il quale risulta

$$y_m(x_i) = y_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

([13]) Per provare la (23) basta tener presente l'espressione della funzione f_m ed osservare che sussiste la relazione seguente

$$\int_{-h_m}^{h_m} [F(t_2 + z) - F(t_1 + z)]\, dz = \int_{t_2 - h_m}^{t_2 + h_m} F(v) dv - \int_{t_1 - h_m}^{t_1 + h_m} F(v) dv =$$
$$= \int_{t_1 + h_m}^{t_2 + h_m} F(v) dv - \int_{t_1 - h_m}^{t_2 - h_m} F(v) dv = \int_{t_1}^{t_2} [F(u + h_m) - F(u - h_m)]\, du.$$

In virtù della (21) e per il ragionamento fatto all'inizio della presente dimostrazione, risulta in tutto (x_1, x_n), e per qualunque $m > L$

$$|y_m^{(j)}(x)| \leq L, \qquad (j=0, 1, 2,...., n-1; \; y^{(0)}=y),$$

e si conclude in modo analogo al numero precedente.

OSSERVAZIONE I. - Se è, in quasi-tutto $(-\infty, +\infty)$, $\gamma_2(u)=\gamma_3(u)= .... = \gamma_{n-1}(u)=0$, ed anche, in quasi-tutto (a, b), $\psi_1(x)=0$, l'ipotesi (16) va soppressa.

OSSERVAZIONE II. - Se le funzioni $\gamma_1(u)$, $\gamma_2(u)$,...., $\gamma_{n-1}(u)$ sono limitate su tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, l'ipotesi II) del nostro enunciato può essere soppressa, perchè è conseguenza immediata della I).

OSSERVAZIONE III. - Tenute presenti le precedenti osservazioni, il teorema del presente numero fornisce, anche nel caso particolare $n=2$, un'estensione di quello dato al n.° 1 di *M. II* ([14]).

ESEMPIO. - Alle condizioni del teorema del presente numero soddisfa la seguente funzione. Sia $n=3$,

$$f(x, y, y', y'') = \frac{\sqrt{x^{-\frac{2}{5}} + y'^2 + y''^2}\ \sqrt{1+y''^2}\ \lg(1+y''^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2+y'^2}\ (1+\sqrt{y^2+y'^2})}, \quad \text{per} \quad x \neq 0;$$

$$f(x, y, y', y'')=0, \quad \text{per} \quad x=0.$$

Risulta

$$|f| \leq \frac{|y''|\ \sqrt{1+y''^2}\ \lg(1+y''^2)}{\sqrt[3]{y'^2}\ (1+|y'|)} + \left[\frac{|y'|}{\sqrt[3]{y^2}\ (1+|y|)} + \frac{1}{|x|^{\frac{13}{15}}}\right] \sqrt{1+y''^2}\ \log(1+y''^2);$$

ed è quindi verificata la (18) per

$$\gamma_1(u)=\gamma_2(u)=\frac{1}{u^{\frac{2}{3}}(1+|u|)}, \qquad \psi_1(x)=|x|^{-\frac{13}{15}},$$

$$\varphi(v)=|v|\ \sqrt{1+v^2}\ \lg(1+v^2)+1, \qquad \varphi_1(v)=\sqrt{1+v^2}\ \lg(1+v^2).$$

Inoltre, per $|y| \leq \lambda^*$, $|y'| \leq \lambda^*$, $|y''| \leq \lambda^*$, risulta

$$|f| \leq |x|^{-\frac{13}{15}} \sqrt{1+2\lambda^{*2}\, x^{\frac{2}{5}}}\ (1+\lambda^{*2})^{\frac{1}{2}}\ \lg(1+\lambda^{*2}).$$

Pertanto, se (x_i, y_i), $(i=1, 2, 3)$ sono tre punti qualunque del piano (x, y) con $x_1 < x_2 < x_3$, (ove lo zero può anche appartenere all'intervallo (x_1, x_3)),

---

([14]) Per la dimostrazione confronta quanto è detto al n.° 3 del presente lavoro.

l'equazione

$$y''=y''(x_1)+\int_{x_1}^{x} f(x, y, y', y'')dx$$

ammette sempre almeno una soluzione $y=y(x)$, $(x_1 \leqslant x \leqslant x_3)$, con $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ assolutamente continue, per la quale risulta $y(x_i)=y_i$, $(i=1, 2, 3)$.

3. - **Una generalizzazione del teorema II.** — Il teorema del numero precedente può essere posto sotto una forma più generale che, per semplicità, ci limitiamo ad enunciare per le equazioni del secondo ordine, ottenendo così una ulteriore estensione del teorema I di *M. II* ([15]).

Sia $f(x, y, y')$ *una funzione definita per ogni* x *di* (a, b) *e per ogni coppia di numeri reali* y, y', *la quale, per ogni* x *fissato, risulti continua rispetto a* (y, y'), *e, per ogni coppia* y, y' *fissata, risulti quasi-continua in* x, *e si supponga che*: I) *in tutto il campo*

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad |y|<+\infty, \qquad |y'|<+\infty,$$

sia verificata la disuguaglianza

$$|f(x, y, y')| \leqslant \gamma(y)\varphi(y')+\psi_1(x)\varphi_1(y')+\psi_2(x), \tag{24}$$

ove $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ *sono due funzioni non negative e integrabili sull'intervallo* (a, b), $\gamma(u)$ *è non negativa e integrabile su* $(-\infty, +\infty)$, $\varphi_1(v)$ *è non negativa e continua in* $(-\infty, +\infty)$, $\varphi(v)$ *è continua in* $(-\infty, +\infty)$, *sempre* >0, *tale che sia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{vdv}{\varphi(v)}=+\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{vdv}{\varphi(v)}=-\infty, \tag{25}$$

e soddisfacente alle due seguenti ipotesi: α) *quando non sia, in quasi-tutto* (a, b), $\psi_2(x)=0$, *esistano due numeri* $\theta'>0$, $k'>0$ *tali che*: α_1) *per* $v>\theta'$ *sia sempre* $\varphi(v)\geqslant k'v$, *oppure gli intervalli in cui sono verificate entrambe le disuguaglianze* $v\geqslant\theta'$, $\varphi(v)\leqslant k'v$ *abbiano lunghezza complessiva infinita*; α_2) *per* $v<-\theta'$ *sia sempre* $\varphi(v)\geqslant -k'v$, *oppure gli intervalli in cui sono verificate entrambe le disuguaglianze* $v\leqslant-\theta'$, $\varphi(v)\leqslant -k'v$ *abbiano lunghezza complessiva infinita*; β) *quando non sia, in quasi-tutto* (a, b), $\psi_1(x)=0$, *esistano due numeri* $\theta''>0$, $k''>0$, *tali che*: β_1) *per* $v>\theta''$ *sia sempre* $\varphi(v)\geqslant k''v\varphi_1(v)$, *oppure, detto* I_1 *l'insieme degli intervalli*

([15]) Anche il teorema II di *M. II* è suscettibile di un'analoga estensione, il cui enunciato si deduce facilmente da quello del presente numero.

in cui sono verificate entrambe le disuguaglianze $v \geqslant \theta''$, $\varphi(v) \leqslant k'' v \varphi_1(v)$, *risulti* $\int\limits_{I_1} \frac{dv}{\varphi_1(v)} = +\infty$, *intendendosi inoltre che, qualora in* α_1) *abbia luogo la seconda eventualità e* I_1 *abbia lunghezza infinita, risulti* $\int\limits_{E} \frac{dv}{\varphi_1(v)} = +\infty$, *per ogni insieme* E *di punti appartenenti ad* I_1 *e di misura infinita*; β_2) *per* $v < -\theta''$ *sia sempre* $\varphi(v) \geqslant -k'' v \varphi_1(v)$, *oppure detto* I_2 *l'insieme degli intervalli in cui sono verificate entrambe le disuguaglianze* $v \leqslant -\theta''$, $\varphi(v) \leqslant -k'' v \varphi_1(v)$ *risulti* $\int\limits_{I_2} \frac{dv}{\varphi_1(v)} = +\infty$, *intendendosi inoltre che, qualora in* α_2) *abbia luogo la seconda eventualità e* I_2 *abbia lunghezza infinita, risulti* $\int\limits_{E} \frac{dv}{\varphi_1(v)} = +\infty$, *per ogni insieme* E *di punti appartenenti ad* I_2 *e di misura infinita*; II) *in corrispondenza ad ogni numero* $\lambda^* > 0$ *si possa determinare una funzione* $\psi_*(x)$ *non negativa e integrabile sull'intervallo* (a, b), *in modo che, per ogni terna* (x, y, y') *con* $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant \lambda^*$, $|y'| \leqslant \lambda^*$, *risulti*

$$|f(x, y, y')| \leqslant \psi_*(x).$$

Allora se (x_1, y_1), (x_2, y_2) *sono due punti qualunque del piano* (x, y) *tali che sia* $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, *l'equazione*

$$y' = y'(x_1) + \int\limits_{x_1}^{x} f(x, y, y')dx$$

ammette in (x_1, x_2) *almeno una soluzione* $y = y_0(x)$, *con* $y_0(x)$, $y_0'(x)$ *assolutamente continue e tale che*

$$y_0(x_1) = y_1, \qquad y_0(x_2) = y_2.$$

Per la dimostrazione basta ripetere il ragionamento fatto al n.° 1 di *M. II*, tenendo conto di un'opportuna estensione del lemma enunciato nella nota ([6]) di *M. II* ([16]).

ESEMPIO. - Alle condizioni del teorema del presente numero, (ma non a quelle di alcuno dei miei precedenti teoremi), soddisfa, anche nell'ipotesi che il valore

---

([16]) Relativamente alla dimostrazione dell'estensione di tale lemma è da tener presente un'osservazione che ci limitiamo ad esporre per $v \geqslant 0$, soggiungendo che essa si ripete letteralmente, «mutatis mutandis», per $v \leqslant 0$. Se in una soltanto delle condizioni α_1) e β_1) è verificata la seconda eventualità, ci si riconduce, in modo evidente, al caso in cui in entrambe abbia luogo la prima eventualità. Qualora in entrambe tali condizioni si presenti la seconda eventualità, possiamo senz'altro supporre, per semplicità e senza far con ciò alcuna restrizione, che sia $\theta' = \theta''$. Consideriamo allora, allo scopo che in entrambe le condizioni

$x=0$ appartenga all'intervallo (x_1, x_2), la funzione definita da

$$f(x,y,y')=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^4}}\left[\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}}+1\right)\left(y'^2 \operatorname{sen}^4 y'+\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)+\lg x^2\right], \quad \text{per} \quad x\neq 0;$$

$f(x,y,y')=0$, per $x=0$.

Infatti, risulta

$$|f(x,y,y')|\leqslant\frac{1}{|y|^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+y^2}}(|y'|^3 \operatorname{sen}^4 y'+1)+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\left(y'^2 \operatorname{sen}^4 y'+\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)+\frac{|\lg x^2|}{x^{\frac{2}{3}}};$$

ed è quindi soddisfatta la (24) per

$$\gamma(y)=\frac{1}{|y|^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+y^2}};$$

$$\varphi(y')=|y'|^3 \operatorname{sen}^4 y'+1; \qquad \varphi_1(y')=y'^2 \operatorname{sen}^4 y'+\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}};$$

$$\psi_1(x)=x^{-\frac{2}{3}}; \qquad \psi_2(x)=\frac{|\lg x^2|}{x^{\frac{2}{3}}};$$

α_1), β_1) sia verificata la prima eventualità, una funzione $\Phi(v)$ definita, per ogni $v\geqslant\theta'$, nel seguente modo:

$\Phi(v)=k'v$, nell'insieme E_1 dei valori di v, per i quali è $k'v\geqslant\varphi(v)\geqslant k''v\varphi_1(v)$;

$\Phi(v)=k''v\varphi_1(v)$, nell'insieme E_2 dei valori di v, per i quali è $k''v\varphi_1(v)\geqslant\varphi(v)>k'v$;

$\Phi(v)$ uguale al maggiore dei due valori $k'v$, $k''v\varphi_1(v)$, nell'insieme E_3 dei valori di v, per i quali è $\varphi(v)\leqslant k'v$, $\varphi(v)\leqslant k''v\varphi_1(v)$;

infine, per ogni altro $v\geqslant 0$, poniamo $\Phi(v)=\varphi(v)$.

Occorre mostrare che risulta $\int_0^{+\infty}\frac{vdv}{\Phi(v)}=+\infty$.

A tal uopo basta osservare che sussiste una almeno delle uguaglianze

$$(a) \qquad \int_{E_1}\frac{vdv}{\Phi(v)}=+\infty, \qquad \int_{E_3}\frac{vdv}{\Phi(v)}=+\infty.$$

Infatti, o E_1 ha misura infinita ed allora è verificata la prima delle (a), oppure la misura di E_3 è necessariamente infinita. In tal caso, indicato con E_3'' l'insieme dei valori v, appartenenti ad E_3, e per i quali è $\Phi(v)=k''v\varphi_1(v)$, poniamo $E_3'=E_3-E_3''$. Ora se la misura di E_3' è infinita, siccome in E_3' è $\Phi(v)=k'v$, risulta $\int_{E_3'}\frac{vdv}{\Phi(v)}=+\infty$, e ne segue immediatamente la seconda delle (a). Se poi la misura di E_3' è finita quella di E_3'' risulta infinita; quindi, siccome i punti di E_3'' fanno parte di I_1, risulta $\int_{E_3''}\frac{dv}{\varphi_1(v)}=+\infty$, e perciò anche in questo caso ha luogo la seconda delle (a).

ove hanno luogo le (25), avendosi, per la prima di esse,

$$\int_0^{+\infty} \frac{vdv}{v^3 \operatorname{sen}^4 v + 1} > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{1}{n\pi}} \frac{vdv}{v^3 \operatorname{sen}^4 v + 1} >$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\left(n\pi + \frac{1}{n\pi}\right)^3 \frac{1}{n^4\pi^4} + 1} \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{1}{n\pi}} dv = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n\pi + \frac{1}{n\pi}\right)^3 \frac{1}{n^4\pi^4} + 1},$$

ed essendo quest'ultima serie evidentemente divergente.

Si verifica immediatamente che è soddisfatta la condizione α), tenendo presente che, in ciascuno degli intervalli $\left(n\pi, n\pi + \frac{1}{n\pi}\right)$, $(n=1, 2, ...)$, la cui lunghezza complessiva è infinita, risulta $\varphi(v) \leq v$; la condizione β) è pure soddisfatta essendo, per ogni v, $\varphi(v) \geq |v| \varphi_1(v)$. Infine è verificata l'ipotesi II), perchè per ogni coppia y, y', con $|y| \leq \lambda^*$, $|y'| \leq \lambda^*$, risulta

$$|f(x, y, y')| \leq x^{-\frac{2}{3}} [(\lambda^{*2} + 1)^2 + |\lg x^2|].$$

OSSERVAZIONE. - Soggiungiamo ancora che, per la dimostrazione del caso generale del teorema del presente numero, che si ha per $n > 2$ e che non abbiamo enunciato, basta ripetere il ragionamento fatto al n.° 2 del presente lavoro, tenendo conto di un'analoga estensione del lemma enunciato nella nota ([12]) del presente lavoro.

4. - Un'estensione dei teoremi precedenti. — *I teoremi del presente lavoro continuano ad essere validi, se si sostituisce alla condizione che l'integrale, di cui si dimostra l'esistenza, passi per n punti assegnati, un'altra qualunque condizione valida a determinare un polinomio di grado $n-1$.*

Le dimostrazioni procedono in forma identica, modificando in modo evidente alcuni ragionamenti di carattere elementare, e tenendo conto di alcune formule di Calcolo differenziale, di cui abbiamo fatto uso in altro lavoro ([17]).

([17]) S. CINQUINI: *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VI (1937), pp. 191, 210).

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 24 gennaio 1940-XVIII.