Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Antonio Mambriani

Genesi ed integrazione in termini finiti di vaste classi d'equazioni differenziali lineari, aventi per coefficienti delle funzioni razionali intere

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 1 (1940), p. 27-43

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_1_27_0>

GENESI ED INTEGRAZIONE IN TERMINI FINITI DI VASTE CLASSI D'EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI, AVENTI PER COEFFICIENTI DELLE FUNZIONI RAZIONALI INTERE

di ANTONIO MAMBRIANI (Bologna).

Nella presente Memoria si determinano successivamente vaste classi d'operatori, apparentemente di tipo « integro-differenziale » e in realtà semplicemente « differenziale ». Le corrispondenti equazioni differenziali ordinarie, in una funzione incognita $y(x)$, ottenute applicando tali operatori ad $y(x)$ ed uguagliando il risultato allo zero, sono *lineari* ed *i coefficienti sono delle funzioni razionali intere*: tali equazioni hanno notevole importanza nelle applicazioni. La genesi indicata per queste equazioni fornisce contemporaneamente per ciascuna di esse un determinato procedimento d'integrazione in termini finiti.

Allo scopo di dare maggiore chiarezza e logicità all'esposizione, si considera dapprima (n.° 1) una particolare equazione di BESSEL e se n'indica un metodo d'integrazione in termini finiti. Tale metodo induce a successive generalizzazioni: sono qui indicate (§ I) le generalizzazioni principali che portano appunto agli operatori e alle equazioni sopra accennate.

La Memoria si chiude (§ II) con una trattazione più estesa di alcune equazioni particolari fra quelle trovate: vengono principalmente considerate equazioni del second'ordine ed equazioni studiate da altri Autori. Così, ad esempio, essendo n un intero positivo, trovano la loro completa risoluzione, in termini finiti, le equazioni

$$\begin{gathered} a_0xy^{(m)}+(a_1x+mna_0)y^{(m-1)}+(a_2x+(m-1)na_1)y^{(m-2)}+\dots+ \\ +(a_{m-1}x+2na_{m-2})y'+(a_mx+na_{m-1})y=0, \\ (a_2x^2+a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-n((n+1)a_2-b_1)y=0, \\ (a_2x^2+a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-n((n-1)a_2+b_1)y=0, \end{gathered}$$

con a_0, $a_1,\dots,$ b_0, b_1 costanti date.

1. - Su una particolare equazione di Bessel.

Consideriamo la speciale equazione di BESSEL

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}-a^2xy=0, \tag{1}$$

dove n è un intero positivo ed a una costante. È ben noto che (1) è integrabile in termini finiti mediante funzioni razionali ed esponenziali (ed anche trigonometriche, se si fa questione di «realità»). Per risolvere (1) ho notato che vi è il seguente metodo *diretto*.

Posto $D=\frac{d}{dx}$, la (1) si può scrivere:

$$x(D^2-a^2)y+n\cdot 2Dy=0$$

ed anche, manifestamente,

$$x(D^2-a^2)^n(D^2-a^2)^{1-n}y+n\cdot 2D(D^2-a^2)^{n-1}(D^2-a^2)^{1-n}y=0. \tag{1'}$$

Ricordiamo ora la nota formula

$$L(uv)=u\cdot Lv+u'\cdot L'v+\frac{u''}{2!}\cdot L''v+ \dots + \frac{u^{(m)}}{m!}\cdot L^{(m)}v, \tag{2}$$

dov'è

$$u=u(x), \qquad v=v(x),$$
$$L=p_0(x)+p_1(x)D+p_2(x)D^2+ \dots +p_m(x)D^m,$$
$$u^{(k)}=\frac{d^k}{dx^k}u, \qquad L^{(k)}=\frac{d^k}{dD^k}L.$$

Si vede facilmente che il primo membro di (1′) s'ottiene dal secondo membro di (2) facendo

$$u=x, \qquad L=(D^2-a^2)^n, \qquad v=(D^2-a^2)^{1-n}y.$$

Pertanto, in virtù di (2), la (1′) si può scrivere concisamente così:

$$\underline{(D^2-a^2)^n x(D^2-a^2)^{1-n}}y=0, \tag{1''}$$

dove nel primo membro la sottolineatura sta, fra l'altro, a sopprimere l'uso di eventuali parentisi e, se si vuole, anche a ricordare che le operazioni applicate ad y si susseguono da destra a sinistra: così, in (1″), ad $y=y(x)$ va prima applicato $(D^2-a^2)^{1-n}$, poi la moltiplicazione per x e infine $(D^2-a^2)^n$.

La determinazione di y in termini finiti è ora già accertata ed individuata da (1″). Invero se, anzitutto, in (1″) s'inverte l'operatore $(D^2-a^2)^n$, risulta

$$x(D^2-a^2)^{1-n}y=\varphi_0+x\varphi_1+x^2\varphi_2+ \dots +x^{n-1}\varphi_{n-1},$$

dove — per brevità — si è posto

$$\varphi_k=c_{1,k}e^{ax}+c_{2,k}e^{-ax} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-1)$$

con $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ costanti arbitrarie; indi segue

$$(D^2-a^2)^{1-n}y=\frac{\varphi_0}{x}+\varphi_1+x\varphi_2+ \dots +x^{n-2}\varphi_{n-1}$$

e infine

$$y=(D^2-a^2)^{n-1}\frac{\varphi_0}{x}+(D^2-a^2)^{n-1}(\varphi_1+x\varphi_2+\dots+x^{n-2}\varphi_{n-1})$$

ossia, poichè nel secondo membro l'ultimo termine è nullo,

$$y=(D^2-a^2)^{n-1}\frac{\varphi_0}{x} \tag{3}$$

o più estesamente (scrivendo c_1, c_2 al posto di $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ rispettivamente)

$$y=(D^2-a^2)^{n-1}\frac{c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}}{x}, \tag{3'}$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

È questa, in sostanza, la forma finale ottenuta dal DE LA VALLÉE POUSSIN [1] per l'integrale generale delle due particolari equazioni di BESSEL che risultano da (1) ponendo $a^2=\pm 1$. Il DE LA VALLÉE POUSSIN giunge al suo risultato con un certo procedimento indiretto e ingegnoso che riporta largamente nelle diverse edizioni del suo « Cours d'Analyse infinitésimale [2] ».

Notiamo pure che, applicando la formula

$$(D+a)^n(e^{bx}u)=e^{bx}(D+a+b)^n u, \tag{4}$$

dove a, b sono delle costanti ed è $u=u(x)$, la (3') si può scrivere

$$y=c_1\underline{(D+a)^{n-1}e^{ax}D^{n-1}}\,\frac{1}{x}+c_2\underline{(D-a)^{n-1}e^{-ax}D^{n-1}}\,\frac{1}{x}$$

ossia

$$y=C_1e^{ax}(D+2a)^{n-1}\frac{1}{x^n}+C_2e^{-ax}(D-2a)^{n-1}\frac{1}{x^n}, \tag{3''}$$

avendo posto $C_1=(-1)^{n-1}(n-1)!\,c_1$, $C_2=(-1)^{n-1}(n-1)!\,c_2$; e in (3'') i calcoli indicati sono facilmente eseguibili [3].

§ I. - Determinazione di varie classi d'equazioni.

2. - Osservazione.

Interessa notare che dal confronto di (1) e (1'') segue l'idendità, fra operatori,

$$\underline{(D^2-a^2)^n x(D^2-a^2)^{1-n}}\equiv xD^2+2nD-a^2x, \tag{5}$$

---

[1] CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Intégration de l'equation de Bessel* $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2p}{t}\frac{dy}{dx}\pm y=0$ *sous forme finie, lorsque p est un nombre entier positif.* Annales de la Societé scient. de Bruxelles, t. 29 A (1905), pp. 140-143.

[2] CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Cours d'Analyse infinitésimale.* Louvain, Uystpruyst-Dieudonné, t. I e t. II. Cfr. t. II (cinquième édition, 1925), pp. 224-227.

[3] Cfr. loc. cit. in [2].

dove n è un intero non negativo. Per $n>1$ il primo membro di (5) sembra un operatore integro-differenziale: il suo ridursi ad un operatore differenziale [come risulta chiaramente applicando (2), ove si faccia $L=(D^2-a^2)^n$, $u=x$], discende dal fatto che le derivate di x d'ordine maggiore di 1 sono nulle. Quest'osservazione si può generalizzare — e ciò viene indicato nel seguito — creando degli operatori che, come il primo membro di (5), hanno l'aspetto di operatori integro-differenziali, ma in realtà sono puramente differenziali.

3. - Una prima classe d'equazioni.

Una naturale generalizzazione dell'operatore a primo membro di (5) è data da

$$\underline{\Lambda^n P \Lambda^{\nu-n}}, \tag{6}$$

dove:

$\Lambda=\Lambda(D)$ è un operatore differenziale lineare, a coefficienti *costanti* (sia m il suo ordine);

ν, n sono interi non negativi, con $\nu \leqslant n$;

$P=P(x)$ è un polinomio intero nella variabile x, di grado $\leqslant \nu$.

Proviamo che (6) *è un operatore differenziale lineare, d'ordine* $m\nu$, *a coefficienti dati da funzioni razionali intere di gradi* $\leqslant \nu$. A tale scopo, basta applicare a

$$\underline{\Lambda^n P \Lambda^{\nu-n}} y$$

la formula (2) ove si faccia $L=\Lambda^n$, $u=P$, $v=\Lambda^{\nu-n}y$. S'ottiene

$$\underline{\Lambda^n P \Lambda^{\nu-n}} y = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{P^{(k)}}{k!} \left(\frac{d^k}{dD^k}\Lambda^n\right)\Lambda^{\nu-n}y. \tag{7}$$

Qui le derivate

$$\frac{d^k}{dD^k}\Lambda^n \qquad (k=0,\,1,\,2,\ldots,\,\nu),$$

figuranti nel secondo membro, hanno il fattore comune $\Lambda^{n-\nu}$; onde, posto

$$\frac{d^k}{dD^k}\Lambda^n = \Lambda_k \Lambda^{n-\nu},$$

con $\Lambda_k=\Lambda_k(D)$ operatore differenziale lineare, d'ordine $mn-k-m(n-\nu)=m\nu-k$, si avrà in (7)

$$\left(\frac{d^k}{dD^k}\Lambda^n\right)\Lambda^{\nu-n}y=\Lambda_k y$$

e la (7) si scrive:

$$\underline{\Lambda^n P \Lambda^{\nu-n}} y = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{P^{(k)}}{k!}\Lambda_k y, \tag{8}$$

dove il secondo membro è proprio, nella y, un'espressione differenziale lineare, d'ordine $m\nu$, a coefficienti razionali interi di gradi $\leqslant \nu$.

Perciò *l'equazione*

$$\underline{\Lambda^n P \Lambda^{\nu-n} y = 0} \tag{9}$$

è differenziale lineare, d'ordine $m\nu$ *e a coefficienti razionali interi di gradi* $\leqslant \nu$.

Facile è la risoluzione di (9): basta invertire Λ^n, poi dividere per P e infine invertire $\Lambda^{\nu-n}$. Quindi, *detto* $\Phi(x)$ *l'integrale generale di* $\Lambda^n z = 0$, *risulta che l'integrale generale di* (9) *è dato da*

$$y = \Lambda^{n-\nu} \frac{\Phi(x)}{P(x)}. \tag{10}$$

Si nota però che le costanti arbitrarie figuranti in $\Phi(x)$ possono essere in numero sovrabbondante per la soluzione (10) di (9): invero, l'ordine di (9) è $m\nu$, mentre Φ contiene mn costanti arbitrarie. Conoscendo il grado di $P(x)$ e le multiplicità delle radici dell'equazione caratteristica di $\Lambda u = 0$, si può fare in (10) la riduzione effettiva delle costanti arbitrarie. Detto μ il grado di $P(x)$ (e sarà $\mu \leqslant \nu$), dette $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ le radici distinte dell'equazione caratteristica di $\Lambda u = 0$ e detti $r_1, r_2, \ldots, r_s$ (con $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = m$) gli ordini di multiplicità rispettivi di tali radici, si trova più precisamente che *l'integrale generale di* (9) *è dato da*

$$y = \Lambda^{n-\nu} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{c_{k,0} + c_{k,1}x + \ldots + c_{k,\mu-1}x^{\mu-1}}{P(x)} + \right.$$
$$\left. + c_{k,(n-\nu)r_k} x^{(n-\nu)r_k} + \ldots + c_{k,nr_k-\mu-1} x^{nr_k-\mu-1} \right) e^{\alpha_k x}, \tag{10'}$$

dove le costanti arbitrarie $c_{k,h}$ sono in numero di

$$\sum_{k=1}^{s} (\mu + (\nu r_k - \mu)) = \sum_{k=1}^{s} \nu r_k = m\nu,$$

cioè proprio in numero uguale all'ordine di (9). Notiamo che, applicando la formula (4), la (10′) si può scrivere:

$$y = \sum_{k=1}^{s} e^{\alpha_k x} \{\Lambda(D + \alpha_k)\}^{n-\nu} \left(\frac{c_{k,0} + c_{k,1}x + \ldots + c_{k,\mu-1}x^{\mu-1}}{P(x)} + \right.$$
$$\left. + c_{k,(n-\nu)r_k} x^{(n-\nu)r_k} + \ldots + c_{k,nr_k-\mu-1} x^{nr_k-\mu-1} \right), \tag{10''}$$

dove si è posto $\Lambda = \Lambda(D)$.

In particolare, *nel caso in cui il polinomio* $P(x)$ *abbia grado* $\mu = \nu$ *e le radici* α_k *dell'equazione caratteristica di* $\Lambda u = 0$ *siano tutte semplici, l'integrale generale di* (9) *è dato più semplicemente da*

$$y = \Lambda^{n-\nu} \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{k,0} + c_{k,1}x + \ldots + c_{k,\nu-1}x^{\nu-1}}{P(x)} e^{\alpha_k x}, \tag{11}$$

cioè da

$$(11') \qquad y = \Lambda^{n-\nu} \frac{\varphi(x)}{P(x)},$$

indicando con $\varphi(x)$ *l'integrale generale di* $\Lambda^\nu z = 0$. *A* (11) *si può poi — per* (10″) *— sostituire*

$$(11'') \qquad y = \sum_{k=1}^{s} e^{\alpha_k x} \{\Lambda(D+\alpha_k)\}^{n-\nu} \frac{c_{k,0} + c_{k,1}x + \dots + c_{k,\nu-1}x^{\nu-1}}{P(x)}.$$

L'equazione (9) si può generalizzare considerando equazioni differenziali della forma

$$(12) \qquad \underline{\Lambda_r^{n_r} P_r \Lambda_r^{\nu_r - n_r} \dots \Lambda_2^{n_2} P_2 \Lambda_2^{\nu_2 - n_2} \Lambda_1^{n_1} P_1 \Lambda_1^{\nu_1 - n_1}} y = 0,$$

dove:

$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_r$ sono operatori differenziali lineari, a coefficienti *costanti* (siano $m_1, m_2, \dots, m_r$ gli ordini rispettivi);

$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$; $n_1, n_2, \dots, n_r$ sono interi non negativi, con $\nu_1 \leqslant n_1, \nu_2 \leqslant n_2, \dots, \nu_r \leqslant n_r$;

$P_1, P_2, \dots, P_r$ sono polinomi interi nella variabile x, di gradi rispettivamente non maggiori di $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$.

L'ordine di (12) è $m_1\nu_1 + m_2\nu_2 + \dots + m_r\nu_r$ i coefficienti di (12) sono razionali interi e il prodotto $P_1 P_2 \dots P_r$ è il coefficiente di grado massimo.

4. - Una seconda classe d'equazioni.

Sia ancora Λ un operatore differenziale lineare, a coefficienti costanti, d'ordine m; e siano ν, n due interi positivi con $\nu \leqslant n$. Una naturale generalizzazione del precedente operatore

$$(6) \qquad \underline{\Lambda^n P \Lambda^{\nu-n}} \equiv \underline{\Lambda^n P \Lambda^\nu \Lambda^{-n}}$$

è data da

$$(13) \qquad \underline{\Lambda^n \mathcal{L} \Lambda^{-n}},$$

dov'è

$$(14) \qquad \mathcal{L} \equiv P_0 + P_1\Lambda + P_2\Lambda^2 + \dots + P_\nu \Lambda^\nu$$

e $P_0, P_1, P_2, \dots, P_\nu$ sono funzioni razionali intere di gradi rispettivamente non maggiore del loro indice. Risulta quindi

$$(13') \qquad \underline{\Lambda^n \mathcal{L} \Lambda^{-n}} \equiv \sum_{k=0}^{\nu} \underline{\Lambda^n P_k \Lambda^{k-n}}.$$

Pel numero precedente, ognuno degli operatori $\underline{\Lambda^n P_k \Lambda^{k-n}}$ è lineare, d'ordine mk e a coefficienti razionali interi. Si conclude quindi che *l'equazione*

$$(15) \qquad \underline{\Lambda^n \mathcal{L} \Lambda^{-n}} y = 0$$

è differenziale lineare, d'ordine $m\nu$ e a coefficienti razionali interi.

Si comprende che *se si saprà risolvere l'equazione*

$$\mathfrak{L}z=0, \tag{16}$$

si potrà risolvere anche (15); e viceversa *se si saprà risolvere* (15) *si potrà decidere parecchio sulla risoluzione di* (16).

Conformemente al passaggio da (9) a (12), si può considerare, generalizzando (15), le equazioni della forma

$$\underline{A_r^{n_r}\mathfrak{L}_r A_r^{-n_r} \dots\, A_2^{n_2}\mathfrak{L}_2 A_2^{-n_2} A_1^{n_1}\mathfrak{L}_1 A_1^{-n_1}}\,y=0, \tag{17}$$

dove:

$A_1,\ A_2, \dots, A_r$ sono operatori differenziali lineari, a coefficienti *costanti*;

$$\mathfrak{L}_k \equiv P_{k,\,0}+P_{k,\,1}A+P_{k,\,2}A^2+ \dots + P_{k,\,\nu_k}A^{\nu_k}, \qquad (k=1,\ 2, \dots, r),$$

sono operatori differenziali lineari del tipo (14);

$n_1,\ n_2, \dots, n_r$ sono interi non negativi, con $\nu_1 \leq n_1,\ \nu_2 \leq n_2, \dots, \nu_r \leq n_r$.

5. - Una terza classe d'equazioni.

Si possono considerare gli operatori

$$\underline{A^n L A^{\nu-n}}, \tag{18}$$

dove n, ν sono interi non negativi con $\nu \leq n$ e si ha

$$L \equiv P_1A_1+P_2A_2+ \dots + P_rA_r,$$

indicando con $A_1,\ A_2, \dots, A_r$ degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti e con $P_1,\ P_2, \dots, P_r$ dei polinomi di gradi non maggiori di ν. La corrispondente equazione

$$\underline{A^n L A^{\nu-n}}\,y=0 \tag{19}$$

si scrive allora più estesamente

$$\sum_{k=1}^{r} \underline{A^n P_k A^{\nu-n} A_k}\,y=0. \tag{19'}$$

La risoluzione dell'equazione

$$Lz=0 \tag{20}$$

condurrà alla risoluzione di (19), e viceversa *sapendo risolvere* (19) *si potrà decidere molto sulla risoluzione di* (20).

Si possono poi considerare le equazioni più generali che risultano da (19), come le (17) risultano da (15).

6. - Una quarta classe d'equazioni.

Se nel precedente operatore

$$(6)\qquad \underline{\Lambda^n P \Lambda^{\nu-n}}$$

si ha $\Lambda=(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots.(D-\alpha_m)$, l'operatore (6) si può scrivere:

$$(6')\qquad \underline{(D-\alpha_m)^n \ldots.(D-\alpha_2)^n(D-\alpha_1)^n P(D-\alpha_1)^{\nu-n}(D-\alpha_2)^{\nu-n}\ldots.(D-\alpha_m)^{\nu-n}}.$$

Esaminando (6') viene spontanea la seguente generalizzazione:

$$(21)\qquad \underline{(D-\alpha_m)^{n_m}\ldots.(D-\alpha_2)^{n_2}(D-\alpha_1)^{n_1}P(D-\alpha_1)^{\nu_1-n_1}(D-\alpha_2)^{\nu_2-n_2}\ldots.(D-\alpha_m)^{\nu_m-n_m}}.$$

dove $\nu_1, \nu_2, \ldots., \nu_m$ ed $n_1, n_2, \ldots., n_m$ sono interi positivi con $\nu_1 \leqslant n_1$, $\nu_2 \leqslant n_2, \ldots.,$ $\nu_m \leqslant n_m$ e $P=P(x)$ è una funzione razionale intera avente grado non maggiore del minimo degli interi $\nu_1, \nu_2, \ldots., \nu_m$. *L'operatore* (21) *risulta differenziale lineare, d'ordine* $\nu_1+\nu_2+\ldots.+\nu_m$ *e a coefficienti razionali interi.* L'equazione che s'ottiene applicando (21) ad $y(x)$ ed uguagliando il risultato allo zero, si risolverà in base a quanto precede. Si può infine fare di tale equazione una generalizzazione del tipo di quelle indicate precedentemente passando da (9) a (12) e da (15) a (17).

7. - Una quinta classe d'equazioni.

Analogamente a quanto s'è fatto nel passaggio dall'operatore (6) all'operatore (13), si può considerare l'operatore che s'ottiene da (21) sostituendo P con un operatore $\mathfrak{L}$ conveniente, cioè l'operatore

$$(22)\qquad \underline{(D-\alpha_m)^{n_m}\ldots.(D-\alpha_2)^{n_2}(D-\alpha_1)^{n_1}\mathfrak{L}(D-\alpha_1)^{-n_1}(D-\alpha_2)^{-n_2}\ldots.(D-\alpha_m)^{-n_m}},$$

con

$$(23)\qquad \mathfrak{L}\equiv \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_m=0}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} P_{r_1, r_2, \ldots, r_m}(D-\alpha_1)^{r_1}(D-\alpha_2)^{r_2}\ldots.(D-\alpha_m)^{r_m},$$

dove $P_{r_1, r_2, \ldots, r_m}$ indica una funzione razionale intera, nella x, di grado minore od uguale al minimo degli interi $r_1, r_2, \ldots., r_m$. *L'operatore* (22) *è differenziale lineare, d'ordine* $\nu_1+\nu_2+\ldots.+\nu_m$ (nell'ipotesi $P_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} \neq 0$) *e a coefficienti razionali interi* (avendosi sempre $\nu_1 \leqslant n_1$, $\nu_2 \leqslant n_2, \ldots.,$ $\nu_m \leqslant n_m$).

L'equazione che s'ottiene applicando (22) ad y ed uguagliando il risultato a zero, dà luogo a considerazioni analoghe a quelle del n.° 4; inoltre si potrà generalizzare tale equazione parallelamente a quanto si è fatto nel passaggio da (15) a (17).

§ II. - Su alcune particolari equazioni precedenti.

8. - Equazioni (9) con $P(x)$ di primo grado.

Consideriamo delle equazioni (9) con $P(x)$ polinomio di primo grado, cioè più precisamente equazioni della forma

$$\underline{\Lambda^n x \Lambda^{1-n} y} = 0. \tag{24}$$

Posto

$$\Lambda = \Lambda(D) = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \dots + a_{m-1} D + a_m ,$$

con a_0, $a_1, \dots, a_{m-1}$, a_m costanti, ed applicando la (2), l'equazione (24) si scrive:

$$x\Lambda y + n\Lambda' y = 0 \tag{24'}$$

ossia, per esteso,

$$\begin{aligned}(24'')\quad a_0 x y^{(m)} + (a_1 x + mna_0) y^{(m-1)} + (a_2 x + (m-1) na_1) y^{(m-2)} + \dots +\\ + (a_{m-1} x + 2na_{m-2}) y' + (a_m x + na_{m-1}) y = 0,\end{aligned}$$

che è una particolare equazione di LAPLACE. Per la (10), *l'integrale generale di* (24'') *è dato da*

$$y = (a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \dots + a_{m-1} D + a_m)^{n-1} \frac{\Phi(x)}{x}, \tag{25}$$

essendo $\Phi(x)$ *l'integrale generale di* $\Lambda^n z = 0$. *Con più precisione, applicando* (10'), *l'integrale generale di* (24'') *è dato da*

$$y = \Lambda^{n-1} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{c_k}{x} + c_{k,\,(n-1)r_k} x^{(n-1)r_k} + \dots + c_{k,\,nr_k-2} x^{nr_k-2} \right) e^{\alpha_k x}, \tag{26}$$

dove i numeri α_k *sono le radici diverse dell'equazione caratteristica di* $\Lambda z = 0$, *gli* r_k *sono i rispettivi ordini di multiplicità di tali radici e le* c *sono delle costanti arbitrarie. I monomi*

$$c_{k,\,(n-1)r_k} x^{(n-1)r_k}, \dots, \quad c_{k,\,nr_k-2} x^{nr_k-2}$$

compaiono solo se è $r_k \geqslant 2$; *onde, se le radici* α_k *sono tutte semplici, l'integrale generale di* (24'') *è dato da* (25) *dove* $\Phi(x)$ *è l'integrale generale di*

$$\Lambda z \equiv a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0. \tag{27}$$

9. - Osservazioni.

1°). Sostituendo (25) in (24') s'ottiene l'identità

$$\Lambda^n \frac{\Phi_n(x)}{x} = -\frac{n}{x} \Lambda' \Lambda^{n-1} \frac{\Phi_n(x)}{x}, \tag{28}$$

dove si è precisato con $\Phi_n(x)$ l'integrale generale di $\Lambda^n z=0$. Cambiando in (28) successivamente n in $n-1$, $n-2$,...., $n-\mu+1$ (con $\mu\leq n$) s'ottengono altre identità. Tenendo conto di queste identità, unitamente alla (28), s'ottiene la formula:

$$(29)\qquad \Lambda^n \frac{\Phi_{n-\mu+1}(x)}{x}=(-1)^\mu n(n-1)....(n-\mu+1)\,\{\underline{x^{-1}\Lambda'}\}^\mu\Lambda^{n-\mu}\frac{\Phi_{n-\mu+1}(x)}{x},$$

dove $\Phi_{n-\mu+1}(x)$ *è l'integrale generale di* $\Lambda^{n-\mu+1}z=0$. In particolare per $\mu=n$ si ha la formula:

$$(30)\qquad \Lambda^n \frac{\Phi_1(x)}{x}=(-1)^n n!\,\{\underline{x^{-1}\Lambda'}\}^n \frac{\Phi_1(x)}{x},$$

dove $\Phi_1(x)$ *è l'integrale generale di* (27). In base a ciò e al numero precedente, *l'equazione* (24″) *ha la soluzione*

$$(31)\qquad y=\{\underline{x^{-1}(ma_0D^{m-1}+(m-1)a_1D^{m-2}+....+2a_{m-2}D+a_{m-1})}\}^{n-1}\frac{\Phi_1(x)}{x},$$

dove $\Phi_1(x)$ *è l'integrale generale di* (27); *e* (31) *sarà la soluzione generale di* (24″) *se e solo se l'equazione caratteristica di* (27) *ha radici tutte semplici.*

2°). Se nell'equazione (24′) si fa la sostituzione

$$y=x^{-n}Y,$$

s'ottiene la seguente equazione

$$(32)\qquad \Lambda(Y)=n(n-1)\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\binom{n+k}{k}\frac{1}{(k+2)x^{k+2}}\Lambda^{(k+2)}Y.$$

10. - Alcune particolari equazioni (24″).

1°). La (24″) per $m=2$ diventa

$$(33)\qquad a_0xy''+(a_1x+2na_0)y'+(a_2x+na_1)y=0.$$

Facendo qui $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=-a^2$, s'ottiene la particolare equazione di BESSEL (1) e — in virtù di quanto è detto alla fine del n.° 8 — la (25) ci dà la formula risolutiva (3′) indicata al n.° 1, mentre la (31) ci dà per l'integrale generale di (1) l'espressione [4]

$$(34)\qquad y=(\underline{x^{-1}D})^{n-1}\frac{c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}}{x}.$$

---

[4] J. W. L. GLAISHER: *On Riccati's equation and its transformation, and some definite integrals which satisfy them.* Philos. Trans., t. CLXXII (1882), pp. 759-828. Cfr. pure: A. R. FORSYTH: *Trattato sulle equazioni differenziali.* Livorno, 1901 (traduzione di A. Arbicone); in particolare cfr. pp. 142-144.

Eseguendo in (33) la sostituzione $y=x^{-n}Y$, s'ottiene — applicando (32) — l'equazione

$$a_0 Y'' + a_1 Y' + a_2 Y = \frac{n(n-1)}{x^2} a_0 Y, \tag{33'}$$

equazione largamente studiata nel caso $a_1=0$ ([5]). Per $a_1=0$, $n=3$ si ha un'equazione che si presenta in Geodesia. Se le radici α_1, α_2 dell'equazione algebrica $a_0t^2+a_1t+a_2=0$ sono distinte, l'integrale generale di (33') è dato da

$$Y = x^n(a_0D^2+a_1D+a_2)^{n-1}\frac{c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}}{x}, \tag{35}$$

oppure da

$$Y = x^n\{\underline{x^{-1}(2a_0D+a_1)}\}^{n-1}\frac{c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}}{x}. \tag{35'}$$

Da (35), conformemente a (10''), s'ottiene (a meno di un mutamento di costanti arbitrarie)

$$Y=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n+k-1}{k}k!\,\frac{c_1e^{\alpha_1x}+(-1)^kc_2e^{\alpha_2x}}{(\alpha_1-\alpha_2)^kx^k}. \tag{35''}$$

Se poi è $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, l'integrale generale di (33'), in base a (26), è dato da

$$Y=(c_1x^{1-n}+c_2x^n)e^{\alpha x}. \tag{36}$$

2°). La (24'') per $m=3$ diventa:

$$a_0Y'''+a_1Y''+a_2Y'+a_3Y=\frac{n(n-1)}{x^2}(3a_0Y'+a_1Y)-\frac{n(n^2-1)}{x^3}2a_0Y. \tag{37}$$

Se l'equazione algebrica $a_0t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$ ha le radici α_1, α_2, α_3 tutte distinte, l'integrale generale di (37) è dato da

$$Y=x^n(a_0D^3+a_1D^2+a_2D+a_3)^{n-1}\frac{c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}+c_3e^{\alpha_3x}}{x}, \tag{38}$$

oppure da

$$Y=x^n\{\underline{x^{-1}(3a_0D^2+2a_1D+a_2)}\}^{n-1}\frac{c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}+c_3e^{\alpha_3x}}{x}. \tag{38'}$$

Se invece è $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_2=\alpha_3$, l'integrale generale di (37) è dato — in base a ciò che precede — da

$$Y=c_1x^ne^{\alpha_1x}(D+\alpha_1-\alpha_2)^{2n-2}x^{-n}+c_2x^ne^{\alpha_2x}(D+\alpha_2-\alpha_1)^{n-1}x^{1-2n}+c_3x^ne^{\alpha_2x}, \tag{39}$$

([5]) Si veda, ad es., H. T. FLINT: *Recurrence formulae for the functions which represent solutions of the differential equation* $\frac{d^2u}{dx^2}-a^2u=\frac{p(p+1)}{x^2}u$. Proceedings of the Edinburgh Mathem. Society, t. 33 (1914-1915), pp. 107-117.

dove i calcoli indicati si sviluppano facilmente. Infine, se è $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, l'integrale generale di (37) è dato da

$$Y = (c_1 x^{2-2n} + c_2 x^n + c_3 x^{n+1}) e^{\alpha x}. \tag{40}$$

3°). Se in (24″) si pone $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$, $a_m = -a \neq 0$, s'ottiene l'equazione

$$y^{(m)} + \frac{mn}{x} y^{(m-1)} - ay = 0, \tag{41}$$

il cui integrale generale è

$$y = (D^m - a)^{n-1} \frac{c_1 e^{\omega_1 x} + c_2 e^{\omega_2 x} + \dots + c_m e^{\omega_m x}}{x},$$

oppure

$$y = \underline{(x^{-1} D^{m-1})^{n-1}} \frac{c_1 e^{\omega_1 x} + c_2 e^{\omega_2 x} + \dots + c_m e^{\omega_m x}}{x},$$

dove $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ sono le radici m^{esime} del numero a (6).

11. - Particolare equazione (15).

Consideriamo la speciale equazione (15) seguente:

$$\underline{(D+\alpha)^n \{p_2 \cdot (D+\alpha)^2 + p_1 \cdot (D+\alpha)\} (D+\alpha)^{-n}} y = 0, \tag{42}$$

dove n è sempre un intero positivo (precisamente $n \geqslant 2$), α è una costante, p_1 e p_2 sono polinomi in x di primo e di secondo grado rispettivamente. Sviluppando in (42) i calcoli, s'ottiene successivamente:

$$\underline{(D+\alpha)^n p_2 (D+\alpha)^{2-n}} y + \underline{(D+\alpha)^n p_1 (D+\alpha)^{1-n}} y = 0,$$

$$\left\{ p_2 \cdot (D+\alpha)^2 y + n p_2' \cdot (D+\alpha) y + \frac{n(n-1)}{2} p_2'' y \right\} + \\ + \{ p_1 \cdot (D+\alpha) y + n p_1' y \} = 0,$$

$$p_2 y'' + (2\alpha p_2 + n p_2' + p_1) y' + \left(\alpha^2 p_2 + n\alpha p_2' + \frac{n(n-1)}{2} p_2'' + \alpha p_1 + n p_1' \right) y = 0. \tag{42'}$$

Limitiamoci al seguente caso particolare:

$$\alpha = 0, \qquad p_2 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad p_1 = b_1 x + b_0 - n p_2';$$

---

(6) L'equazione (41) appartiene alla classe delle equazioni studiate da:

S. SPITZER: *Integration der Differentialgleichung* $xy^{(n)} + ay^{(n-1)} = bxy$. Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 10 (1865), pp. 221-223.

W. ALEXEIEWSKY: *Sull'integrazione dell'equazione* $\frac{d^n y}{dz^n} + \frac{\alpha}{z} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \beta y = 0$ (in russo). Communications de la Societé Math. de Kharkow, 1884, pp. 41-64.

allora l'equazione (42') si riduce alla seguente:

$$(a_2x^2+a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-n((n+1)a_2-b_1)y=0 \tag{43}$$

che, per (42), si può dunque scrivere:

$$\underline{D^n\{(a_2x^2+a_1x+a_0)D+(b_1x+b_0-n(2a_2x+a_1))\}D^{1-n}}y=0. \tag{43'}$$

Notiamo ora che l'operatore differenziale di prim'ordine che compare fra graffe nel primo membro di (43') ha anche la seguente espressione

$$\underline{(a_2x^2+a_1x+a_0)^{n+1}e^{-I\frac{b_1x+b_0}{a_2x^2+a_1x+a_0}}D(a_2x^2+a_1x+a_0)^{-n}e^{I\frac{b_1x+b_0}{a_2x^2+a_1x+a_0}}},$$

dove con $I\dfrac{b_1x+b_0}{a_2x^2+a_1x+a_0}$ s'intende una particolare primitiva della frazione scritta. Ne segue che, posto per brevità

$$P=a_2x^2+a_1x+a_0,\qquad R=\frac{b_1x+b_0}{a_2x^2+a_1x+a_0}, \tag{44}$$

l'equazione (43'), e quindi (43), si può scrivere nella forma

$$\underline{D^nP^{n+1}e^{-IR}DP^{-n}e^{IR}D^{1-n}}y=0. \tag{43''}$$

Partendo da (43'') è facile determinare l'integrale generale di (43). Invero, nella (43'') invertendo D^n risulta

$$\underline{P^{n+1}e^{-IR}DP^{-n}e^{IR}D^{1-n}}y=c_0+c_1x+\ldots.+c_{n-1}x^{n-1},$$

con $c_0,\ c_1,\ldots.,\ c_{n-1}$ costanti arbitrarie. Ne risulta

$$\underline{DP^{-n}e^{IR}D^{1-n}}y=(c_0+c_1x+\ldots.+c_{n-1}x^{n-1})P^{-n-1}e^{IR},$$

ed ancora, integrando ambo i membri ed indicando ancora con I l'operazione di determinazione d'una particolare primitiva,

$$P^{-n}e^{IR}D^{1-n}y=\underline{I(c_0+c_1x+\ldots.+c_{n-1}x^{n-1})P^{-n-1}}e^{IR}+c_n,$$

con c_n costante arbitraria, ed anche

$$D^{1-n}y=\underline{P^ne^{-IR}I(c_0+c_1x+\ldots.+c_{n-1}x^{n-1})P^{-n-1}}e^{IR}+c_nP^ne^{-IR}$$

ed infine

$$y=\underline{D^{n-1}P^ne^{-IR}I(c_0+c_1x+\ldots.+c_{n-1}x^{n-1})P^{-n-1}}e^{IR}+c_nD^{n-1}(P^ne^{-IR}).$$

Sopprimendo qui le costanti arbitrarie superflue date da $c_1,\ldots.,\ c_{n-1}$ (in modo analogo a quanto s'è fatto al n.° 3), si conclude che *l'integrale generale di* (43) *è dato da*

$$y=C_1\underline{D^{n-1}P^ne^{-IR}IP^{-n-1}}e^{IR}+C_2D^{n-1}(P^ne^{-IR}), \tag{45}$$

dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie, I è l'operazione di determinazione di una primitiva particolare (del resto qualsiasi) e P, R sono dati da (44).

L'integrale generale (45) si semplifica notevolmente qualora sia $a_2=0$ oppure $a_2=a_1=0$, cioè quando si tratti ordinatamente delle equazioni:

$$(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'+nb_1y=0, \tag{46}$$

$$a_0y''+(b_1x+b_0)y'+nb_1y=0, \tag{47}$$

che, per (43″), si possono scrivere rispettivamente nelle forme

$$\underline{D^n(a_1x+a_0)^{1-\frac{\delta}{a_1^2}+n}\left(D+\frac{b_1}{a_1}\right)(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}-n}}\,D^{1-n}y=0, \tag{46'}$$

con $\delta=a_1b_0-a_0b_1$, e

$$\underline{a_0D^ne^{-\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2}x+b_0\right)}De^{\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2}x+b_0\right)}}\,D^{1-n}y=0. \tag{47'}$$

12. - Equazione ottenuta da (43) cambiando n in $-n$.

Indicando sempre con n un intero $\geqslant 2$, interessano nelle applicazioni anche le equazioni che s'ottengono da (43) cambiando in essa n in $-n$, cioè le equazioni della forma

$$(a_2x^2+a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-n((n-1)a_2+b_1)y=0. \tag{48}$$

Lasciando a P e R i significati dati da (44) e ispirandosi al numero precedente, si trova — come, del resto, si verifica direttamente — che (48) si può scrivere

$$\underline{Pe^{-IR}D^{n+1}P^ne^{IR}DP^{1-n}e^{-IR}D^{-n}P^{-1}e^{IR}}y=0, \tag{48'}$$

e ciò conduce subito all'integrazione in termini finiti di (48). Procedendo su (48′) in modo analogo a quanto si è fatto su (43″), *s'ottiene per l'integrale generale di* (48) *l'espressione*

$$y=C_1\underline{Pe^{-IR}D^nP^{n-1}e^{IR}IP^{-n}}e^{-IR}+C_2Pe^{-IR}D^n(P^{n-1}e^{IR}), \tag{49}$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie ed I operazione di determinazione di una particolare primitiva. È importante constatare che *in* (49) *l'integrale particolare, di* (48), *dato dal coefficiente di* C_2 *è un polinomio di grado* n. D'altra parte l'esistenza di un polinomio di grado n soluzione di (48) risulta da un noto teorema ([7]).

([7]) A. MAMBRIANI: *Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali.* Bollettino Unione Matem. Italiana, Vol. XVII (1938), pp. 26-32. Cfr., in particolare, pag. 29, teor. II.

Consideriamo qualche caso particolare:

1°). Se è $a_2=0$, cioè se si tratta dell'equazione

$$(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0, \tag{50}$$

cadiamo in noti risultati [8]. Ora però le conclusioni sono più complete. Precisamente, se è $a_1 \neq 0$ è soluzione di (50) il polinomio

$$P_n(x)=(a_1x+a_0)\,e^{-I\frac{b_1x+b_0}{a_1x+a_0}}D^n\left\{(a_1x+a_0)^{n-1}e^{I\frac{b_1x+b_0}{a_1x+a_0}}\right\}=$$

$$=(a_1x+a_0)^{1-\frac{\delta}{a_1^2}}e^{-\frac{b_1}{a_1}x}D^n\left\{(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}+n-1}e^{\frac{b_1}{a_1}x}\right\}=$$

$$=(a_1x+a_0)^{1-\frac{\delta}{a_1^2}}\left(D+\frac{b_1}{a_1}\right)^n(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}+n-1}=$$

$$=\frac{1}{a_1^n}\Big\{b_1^n(a_1x+a_0)^n+n(\delta+(n-1)a_1^2)\,b_1^{n-1}(a_1x+a_0)^{n-1}+$$

$$+\binom{2}{n}(\delta+(n-1)a_1^2)(\delta+(n-2)a_1^2)b_1^{n-2}(a_1x+a_0)^{n-2}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\binom{n}{n-1}(\delta+(n-1)a_1^2)(\delta+(n-2)a_1^2)\ldots.(\delta+a_1^2)\,b_1(a_1x+a_0)+$$

$$+\binom{n}{n}(\delta+(n-1)a_1^2)(\delta+(n-2)a_1^2)\ldots.(\delta+a_1^2)\delta\Big\},$$

essendo — come al numero precedente —

$$\delta=a_1b_0-a_0b_1\,.$$

Un'altra soluzione di (50), linearmente indipendente dal precedente polinomio $P_n(x)$, è data da

$$Y_1=\underline{(a_1x+a_0)e^{-I\frac{b_1x+b_0}{a_1x+a_0}}D^n(a_1x+a_0)^{n-1}e^{I\frac{b_1x+b_0}{a_1x+a_0}}I(a_1x+a_0)^{-n}}e^{-I\frac{b_1x+b_0}{a_1x+a_0}}=$$

$$=\underline{(a_1x+a_0)^{1-\frac{\delta}{a_1^2}}e^{-\frac{b_1}{a_1}x}D^n(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}+n-1}e^{\frac{b_1}{a_1}x}I(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n}e^{-\frac{b_1}{a_1}x}}=$$

$$=\underline{(a_1x+a_0)^{1-\frac{\delta}{a_1^2}}\left(D+\frac{b_1}{a_1}\right)^n(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}+n-1}I(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n}e^{-\frac{b_1}{a_1}x}}.$$

---

[8] A. MAMBRIANI: *Determinazione della soluzione polinomiale dell'equazione* $(a_1x+a_0)y''+$ $+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$. Annali R. Scuola Norm. Superiore, S. II, Vol. VII (1938), pp. 189-194. Vedasi pure, G. PALAMÀ: *Sulla soluzione polinomiale della* $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$. Bollettino Unione Matem. Italiana, S. II, Vol. I (1939), pp. 27-35.

Se, invece, in (50) è $a_1=0$, cioè se trattasi dell'equazione

$$a_0 y'' + (b_1 x + b_0) y' - n b_1 y = 0, \tag{51}$$

è soluzione di (51) il polinomio

$$p_n(x) = e^{-I \frac{1}{a_0}(b_1 x + b_0)} D^n e^{I \frac{1}{a_0}(b_1 x + b_0)} = e^{-\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2} x + b_0\right)} D^n e^{\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2} x + b_0\right)} =$$

$$= \frac{1}{a_0^n} \left\{ (b_1 x + b_0)^n + \binom{n}{2} a_0 b_1 (b_1 x + b_0)^{n-2} + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{4} 1 \cdot 3 (a_0 b_1)^2 (b_1 x + b_0)^{n-4} + \binom{n}{6} 1 \cdot 3 \cdot 5 (a_0 b_1)^3 (b_1 x + b_0)^{n-6} + \dots \right\};$$

mentre un'altra soluzione di (51), linearmente indipendente dal polinomio $p_n(x)$, è

$$y_1 = e^{-I \frac{1}{a_0}(b_1 x + b_0)} D^n \left(e^{I \frac{1}{a_0}(b_1 x + b_0)} I e^{-I \frac{1}{a_0}(b_1 x + b_0)} \right) =$$

$$= e^{-\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2} x + b_0\right)} D^n \left(e^{\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2} x + b_0\right)} \int_0^x e^{-\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2} x + b_0\right)} dx \right).$$

2°). Se in (48) si fa $a_2=1$, $a_1=0$, $a_0=-1$, $b_1=2$, $b_0=0$, s'ottiene l'equazione di LEGENDRE, con n intero positivo,

$$(x^2-1) y'' + 2 x y' - n(n+1) y = 0. \tag{52}$$

Applicando (49) risulta subito — com'è ben noto — che è soluzione di (52) il polinomio

$$(x^2-1) e^{-I \frac{2x}{x^2-1}} D^n \left((x^2-1)^{n-1} e^{I \frac{2x}{x^2-1}} \right) = D^n (x^2-1)^n,$$

mentre un'altra soluzione di (52), linearmente indipendente da tale polinomio, è data da

$$\underline{(x^2-1) e^{-I \frac{2x}{x^2-1}} D^n (x^2-1)^{n-1} e^{I \frac{2x}{x^2-1}} I (x^2-1)^{-n}} e^{-I \frac{2x}{x^2-1}} =$$

$$= D^n \left\{ (x^2-1)^n I (x^2-1)^{-n-1} \right\} = D^n \left\{ (x^2-1)^n \int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}} \right\}.$$

13. - Un'equazione caso particolare sia di (43) che di (48).

Consideriamo l'equazione

$$(x^2 + a_1 x + a_0) y'' + b y' - n(n+1) y = 0. \tag{53}$$

Quest'equazione s'ottiene da (43) ponendo $a_2=1$, $b_1=0$, $b_0=b$, e s'ottiene pure da (48) colle stesse posizioni e inoltre cambiando n in $n+1$. Ne risulta, applicando (43″) e (48′) che l'equazione (53) si può scrivere nei due modi seguenti:

$$\underline{D^n P^{n+1} e^{-b \cdot IP^{-1}} D P^{-n} e^{b \cdot IP^{-1}} D^{1-n}} y = 0, \tag{53′}$$

$$\underline{P e^{-b \cdot IP^{-1}} D^{n+2} P^{n+1} e^{b \cdot IP^{-1}} D P^{-n} e^{-b \cdot IP^{-1}} D^{-n-1} P^{-1} e^{b \cdot IP^{-1}}} y = 0, \tag{53″}$$

essendo $P=x^2+a_1x+a_0$. Sfrutteremo sia (53′) che (53″) per dare all'integrale generale di (53) una forma molto semplice. Intanto da (53′) segue subito che tale integrale generale è

$$(54)\qquad y=c_1D^{n-1}(P^ne^{-b\cdot IP^{-1}})+c_2\underline{D^{n-1}P^ne^{-b\cdot IP^{-1}}IP^{-n-1}}e^{b\cdot IP^{-1}};$$

mentre da (53″) segue

$$(54')\qquad y=c_1Pe^{-b\cdot IP^{-1}}D^{n+1}(P^ne^{b\cdot IP^{-1}})+$$
$$+c_2\underline{Pe^{-b\cdot IP^{-1}}D^{n+1}P^ne^{b\cdot IP^{-1}}IP^{-n-1}}e^{-b\cdot IP^{-1}}.$$

Da (54) e (54′) risulta che *l'integrale generale di* (53) *è più semplicemente*

$$(54'')\qquad y=c_1D^{n-1}(P^ne^{-b\cdot IP^{-1}})+c_2Pe^{-b\cdot IP^{-1}}D^{n+1}(P^ne^{b\cdot IP^{-1}}),$$

dove — ripetiamo — è

$$P=x^2+a_1x+a_0$$

ed I è l'operazione di determinazione d'una particolare primitiva (del resto qualsiasi). Notiamo che in (54″) il moltiplicatore della costante arbitraria c_2 è un polinomio di grado $n+1$.

In particolare, l'equazione

$$x^2y''+\alpha y'-n(n+1)y=0,$$

dove α è una costante, ha l'integrale generale

$$y=c_1D^{n-1}\left(x^{2n}e^{\frac{\alpha}{x}}\right)+c_2x^2e^{\frac{\alpha}{x}}D^{n+1}\left(x^{2n}e^{-\frac{\alpha}{x}}\right).$$