ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Sul teorema di densità in senso forte

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 301-307

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_301_0>

SUL TEOREMA DI DENSITÀ IN SENSO FORTE (1)

di LAMBERTO CESARI (Pisa).

Sia $|A|$ la misura esterna di un insieme A del piano (x, y), $I \equiv I(h, k)$ un qualsiasi rettangolo a lati paralleli agli assi x ed y e di lunghezze h e k rispettivamente, $\delta(I)$ il diametro di I.

S. SAKS (2) ha recentemente dimostrato il seguente importante teorema di densità in senso forte:

I. - *Per quasi ogni punto P di un insieme piano qualunque E si ha*

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\delta(I) \to 0} |EI| / |I| = 1, \qquad P \varepsilon I.$$

Dopo la prima dimostrazione del SAKS, lo stesso SAKS (3) e F. RIESZ (4) hanno dato varie dimostrazioni elementari di questo teorema. B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ e A. ZYGMUND (5) hanno in seguito dimostrato, facendo uso di una disuguaglianza di HARDY e LITTLEWOOD (6), il seguente teorema sulla derivabilità in senso forte degli integrali indefiniti:

II. - *Se $f(x, y)$ è una funzione sommabile insieme con $f(x, y)$ lg $|f(x, y)|$ nel rettangolo $R(a, b; c, d)$, per quasi ogni punto (x, y) di R si ha*

$$\text{(B)} \qquad \lim_{\delta(I) \to 0} \frac{1}{|I|} \iint_I f(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \qquad (x, y) \varepsilon I.$$

---

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa

(2) S. SAKS: *Théorie de l'intégrale.* Monografie Matematiche. Varsavia, 1933, p. 231.

(3) S. SAKS: *Theory of the integral.* Monografie Matematiche. Varsavia, 1937, p. 129.

(4) F. RIESZ: *Sur les points de densité au sens fort.* Fund. Math. T. XXII (1934), pp. 221-225.

(5) Cfr. A. ZYGMUND: *On the differentiability of multiple integrals.* Fund. Math. T. XXIII (1934), pp. 143-149 per le funzioni integrabili con una potenza p, $p > 1$; Vedi per il teorema generale B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND: *Note of the differentiability of multiple integrals.* Fund. Math. T. XXV (1935), pp. 217-234. Inoltre S. SAKS, loc. cit. in (3), pp. 148-149.

(6) G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD: *A maximal theorem with function-theoretic applications.* Acta Math. 54 (1930), pp. 81-116. Inoltre HARDY, LITTLEWOOD, POLYA: *Inequalities.* Cambridge (1934), p. 231 e infine S. SAKS, loc. cit. in (3), pp. 145-146.

Per le funzioni soltanto sommabili la (B) in generale non è vera [7]. Anzi S. SAKS [8], utilizzando una precedente costruzione di H. BOHR [9], ha dimostrato che esiste una funzione sommabile $f(x, y)$ per la quale in tutti i punti di R è

$$\text{(C)} \qquad \overline{\lim_{\delta(I)\to 0}} \frac{1}{|I|} \iint_I f(\xi, \eta) d\xi d\eta = +\infty, \qquad (x, y) \text{ centro di } I.$$

Scopo della presente nota è di dare *una nuova semplicissima dimostrazione* (I, § 2) *del teorema I*, basata su di un mio precedente lemma [10] che qui dimostro nuovamente (I, § 1). *La stessa dimostrazione*, utilizzando la disuguaglianza di HARDY e LITTLEWOOD, *si adatta senza alcuna difficoltà anche al teorema II* (I, § 3). Infine per quanto riguarda le funzioni soltanto sommabili dimostro (II, § 4), utilizzando e precisando opportunamente le costruzioni di H. BOHR e di S. SAKS, che

III. - *Comunque fissata una funzione* $\alpha(t)$ *non decrescente, positiva per* $t>0$, *tendente a zero per* $t\to 0$, *esiste una funzione sommabile* $f(x, y)$ *per la quale in tutti i punti* (x, y) *di* R *vale la* (C) *anche supponendo che quando* $\delta(I)\to 0$ *sia pure*

$$h \geqslant k\alpha(k), \qquad k \geqslant h\alpha(h), \qquad I \equiv I(h, k).$$

---

(7) Per le funzioni soltanto sommabili la (B) è ancora vera quasi ovunque se si suppone che quando $\delta(I)\to 0$, i lati h, k di I soddisfino ad una delle seguenti condizioni: $h/k \geqslant a$, $k/h \geqslant a$, $0 < a < 1$ (H. LEBESGUE: *Sur l'intégration des fonctions discontinues.* Annales Ec. Norm. Sup., Paris, 27 (1910), pp. 361-450 e in particolare pp. 387-425), oppure $h = \alpha(t)$, $k = \beta(t)$ con $\alpha(t)$, $\beta(t)$ funzioni non decrescenti del parametro t, positive per $t > 0$, tendenti a zero per $t\to 0$, indipendenti dal punto (x, y). Quest'ultimo caso di validità quasi ovunque della (B) è stato osservato da B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, loc. cit. in (5), p. 224. Queste due condizioni corrispondono a due distinte condizioni di validità del teorema di VITALI (G. VITALI: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* Rend. R. Accad. Torino, 43 (1908), pp. 229-246; C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen ü. reelle Funktionen.* Teubner (1927), pp. 299-307).

(8) S. SAKS: *Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite intégral.* Fund. Math. T. XXII (1934), pp. 257-261.

(9) Vedi C. CARATHÉODORY, loc. cit. in (7), pp. 689-692. Questa costruzione ha servito al BOHR per dimostrare la non validità in generale del teorema di VITALI quando non si impongano alcune condizioni di «regolarità».

(10) L. CESARI: *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata secondo Tonelli e sulla convergenza delle relative serie doppie di Fourier.* Rend. Semin. Mat. R. Università di Roma (1937), S. IV, Vol. I, pp. 277-294. Inoltre Atti I° Congresso Naz. U. M. I. Firenze (1937), pp. 215-218.

I.

1. - LEMMA I. — *Se* $\varphi(x)$, $f_n(x)$, $(n=1, 2,....)$ *sono funzioni sommabili in* (a, b) *ed è quasi ovunque*

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x), \qquad (n=1, 2,....), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

allora per quasi tutti gli x_0 *di* (a, b), *assunto un* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, esistono un* $h_0 > 0$ *e un* n_0 *intero tali che, per ogni* $0 < h \leqslant h_0$, $n \geqslant n_0$, *si ha*

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f_n(x)dx - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Intanto $f(x)$ è certo sommabile in (a, b). Sia e' l'insieme di misura nulla dei punti di (a, b) ove $f(x)$ non è la derivata del suo integrale indefinito. Per il teorema di SEVERINI-EGOROFF ([11]) esiste una successione di plurintervalli Δ_m, $(m=1, 2,....)$, $\Delta_m > \Delta_{m+1}$, $|\Delta_m| < 1/m$, tali che $[f_n(x)]$ tende uniformemente verso $f(x)$ fuori di ciascun Δ_m.

Sia $\psi_m(x)$ la funzione caratteristica di Δ_m e sia e_m l'insieme di misura nulla di punti di (a, b) ove la funzione $\varphi(x)\psi_m(x)$ non è la derivata del suo integrale indefinito. Detto e l'insieme di misura nulla $e = e' + \sum_{m=1}^{\infty} e_m + \prod_{m=1}^{\infty} \Delta_m$, sia x_0 un punto di (a, b) fuori di e. Sia m il più piccolo intero per cui x_0 è fuori di $\Delta_m + e_m$. Esisteranno allora un n_0 e un $h_0 > 0$ tali che per ogni $n \geqslant n_0$, $h \leqslant h_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ fuori di } \Delta_m,$$

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(x)\psi_m(x)dx < \frac{\varepsilon}{6}, \qquad \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e quindi

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f_n(x)dx - f(x_0) \right| \leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f_n(x) - f(x)|\, dx +$$

$$+ \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} 2\varphi(x)\psi_m(x)dx + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

LEMMA II. — *Se* $\varphi(x)$, $f_\eta(x)$, $0 < \eta \leqslant \delta$ *sono tutte funzioni sommabili*

([11]) Cfr. L. TONELLI: *Sulla nozione di integrale.* Annali di Matem. pura e appl., S. IV, T. II (1923-1924), p. 127.

in (a, b), *se per quasi ogni* x *di* (a, b) $f_\eta(x)$ *è una funzione continua di* η *in* $0<\eta\leq\delta$, *se quasi ovunque in* (a, b)

$$|f_\eta(x)|\leq\varphi(x), \qquad 0<\eta\leq\delta, \qquad \lim_{\eta\to 0} f_\eta(x)=f(x),$$

allora per quasi tutti gli x_0 *di* (a, b), *assunto un* $\varepsilon>0$ *arbitrario, esistono un* $h_0>0$ *e un* $0<\eta_0\leq\delta$, *tali che, per ogni* $0<h\leq h_0$, $0<\eta\leq\eta_0$, *si ha*

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f_\eta(x)dx-f(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Intanto $f(x)$ riesce sommabile ([12]) in (a, b). Basta ora applicare il Lemma I alle funzioni, certo sommabili ([13]) in (a, b) e in valore assoluto $\leq 3\varphi(x)$,

$$\bar{f}_m(x)=f(x)+\underset{0\leq\eta\leq 1/m}{\text{extr. sup.}}|f_\eta(x)-f(x)|, \qquad (m=1, 2,....).$$

2. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I. — Esiste intanto un insieme misurabile contenente E e avente la stessa misura esterna di E. D'altra parte possiamo sempre supporre E limitato. Basta dunque dimostrare il teorema per gli insiemi misurabili e limitati. Abbia E tali proprietà e sia $\varphi(x, y)$ la sua funzione caratteristica certo sommabile. Quasi ovunque sarà

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \varphi(x, \eta)d\eta=\varphi(x, y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \varphi(\xi, y)d\xi. \tag{1}$$

Sia $y=y_0$ un valore di y per il quale le (1) valgono per quasi tutti gli x. Quasi tutti i valori $y=y_0$ hanno tale proprietà. Allora per quasi tutti gli x la quantità

$$0\leq\frac{1}{k}\int_{y_0}^{y_0+k}\varphi(x, y)dy\leq 1 \tag{2}$$

riesce una funzione continua di k per $k\geq 0$ e inoltre

$$\lim_{k\to 0}\int_{y_0}^{y_0+k}\varphi(x, y)dy=\varphi(x, y_0).$$

([12]) È infatti $f(x)=\lim_{m\to\infty} f_{1/m}(x)$ e $|f_{1/m}(x)|\leq\varphi(x)$.

([13]) Infatti, detti r_1, r_2,.... tutti i numeri razionali dell'intervallo $(0\dashv 1/m)$ è

$$\underset{0\leq\eta\leq 1/m}{\text{extr. sup.}} .... =\lim_{h\to\infty}\max_{n=1,2,...,h}|f_{r_n}(x)-f(x)|.$$

In forza del Lemma II e per quasi tutti gli $x=x_0$, scelto un $\varepsilon>0$ arbitrario, esistono un $k_0>0$ e un $h_0>0$ tali che per ogni $0<k\leq k_0$, $0<h\leq h_0$ si ha

$$\left|\frac{1}{hk}\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{y_0}^{y_0+k}\varphi(x,y)\,dx\,dy-\varphi(x_0\,y_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}dx\cdot\frac{1}{k}\int_{y_0}^{y_0+k}\varphi(x,y)\,dy-\varphi(x_0\,y_0)\right|<\varepsilon.$$

In modo analogo si proceda per gli altri integrali costituenti $|EI|$. Ne segue dunque che la (A) è vera in tutti i punti di E ad eccezione al più di un insieme F di punti che su quasi tutte le rette $y=y_0$ sega insiemi di misura lineare nulla.

Se ora diciamo $\underline{\mathfrak{D}}$ e $\overline{\mathfrak{D}}$ le derivate in senso forte inferiore e superiore dell'integrale indefinito della funzione sommabile φ, è facile dimostrare che $\underline{\mathfrak{D}}$ e $\overline{\mathfrak{D}}$ sono entrambe misurabili ([14]), onde è misurabile l'insieme dei punti F di E il quale è appunto costituito dai punti di E nei quali è $\underline{\mathfrak{D}}<\overline{\mathfrak{D}}$ oppure $\underline{\mathfrak{D}}=\overline{\mathfrak{D}}=\pm 1$. Per il teorema di FUBINI è quindi $|F|=0$.

3. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA II. — Basta dimostrare il teorema II per una funzione $f(x,y)$ sommabile non negativa in $R(a,b;\,c,d)$ Possiamo porre per tutti gli y_0, k e per quasi tutti gli x

$$(3)\qquad 0\leq\frac{1}{k}\int_{y_0}^{y_0+k}f(x,y)\,dy\leq\psi(x,y_0),\qquad \psi(x,y_0)=\operatorname*{extr.\,sup.}_{k>0}\frac{1}{k}\int_{y_0}^{y_0+k}f(x,y)\,dy.$$

Per la disuguaglianza di HARDY e LITTLEWOOD ([15]) si ha, per quasi tutti gli x,

$$\int_c^d\psi(x,y)\,dy\leq A\int_c^d f(x,y)\lg f(x,y)\,dy+B\int_c^d f(x,y)\,dy+(d-c)$$

ove A e B sono costanti assolute indipendenti da f e quindi da x.

([14]) Definita $f(x,y)$ fuori di R ponendo $f(x,y)=0$, siano $r_1, r_2,\ldots,$ tutti i numeri razionali dell'intervallo $(0 \dashv 1/m)$. Si ponga

$$\left.\begin{array}{l}H(x,y,m,n)=\max\\ h(x,y,m,n)=\min\\ \scriptstyle h,h',k,k'=1,2,\ldots,n\end{array}\right\}\frac{1}{(r_h+r_{h'})(r_k+r_{k'})}\int_{x-r_h}^{x+r_{h'}}\int_{y-r_k}^{y+r_{k'}}f(x,y)\,dx\,dy.$$

Le funzioni $H(x,y,m,n)$ e $h(x,y,m,n)$ sono tutte funzioni continue in R. È ora

$$\underline{\mathfrak{D}}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}H(x,y,m,n),\qquad \overline{\mathfrak{D}}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}H(x,y,m,n)$$

ossia $\overline{\mathfrak{D}}$ e $\underline{\mathfrak{D}}$ sono funzioni di BAIRE di seconda classe. Si confronti C. CARATHÉODORY, loc. cit. in ([7]), p. 484, Satz 2 e S. SAKS, loc. cit. in ([3]), p. 112, 4, 2.

([15]) Loc. cit. in ([6]).

Ma è $\psi(x, y) \geqslant 0$ e si dimostra facilmente che essa è misurabile in R, onde, per il teorema di TONELLI ([16]),

$$\iint_R \psi(x, y)\,dxdy \leqslant A \iint_R f(x, y) \lg f(x, y)\,dxdy + B \iint_R f(x, y)\,dxdy + |R|.$$

Dunque $\psi(x, y)$ è sommabile in R e quindi per quasi tutti gli $y=y_0$ $\psi(x, y_0)$ è una funzione sommabile della sola x. La dimostrazione del teorema I può ora ripetersi parola per parola sostituendo alla $\varphi(x, y)$ la $f(x, y)$, alla disuguaglianza (2) la (3).

II.

4. - Dimostriamo qui la proprietà III. Per semplicità sia R il quadrato $(0, 1;\ 0, 1)$. Premettiamo il

LEMMA III. — *Sia $0<\eta<1$ un numero assegnato e abbia $a(t)$ le proprietà viste in III. È possibile dividere R in un numero finito di rettangoli uguali $R_1, R_2, \ldots, R_s$ non sovrapponentisi e ciascuno di questi in un numero finito di rettangoli in parte sovrapponentisi*

$$(4) \qquad I_{i1}^{(1)},\ I_{i2}^{(1)},\ldots,\ I_{ir}^{(1)};\quad I_{i1}^{(2)},\ldots,\ I_{ir}^{(2)};\ \ldots;\quad I_{i1}^{(q)},\ldots,\ I_{ir}^{(q)};\quad J_{i1},\ldots,\ J_{ip}$$
$$(i=1, 2, \ldots, s)$$

tali che

$$\delta(R_i)<\eta, \qquad \sum_{j,n} I_{in}^{(j)} + \sum_n J_{in} = R_i, \qquad \sum_n |J_{in}| \leqslant \eta\,|R_i|$$
$$(i=1, 2, \ldots, s)$$
$$|I_{i1}^{(j)}| = |I_{i2}^{(j)}| = \ldots = |I_{ir}^{(j)}| \leqslant \eta\,|V_i^{(j)}|, \qquad V_i^{(j)} = \sum_n I_{in}^{(j)}$$
$$(j=1, 2, \ldots, q;\ i=1, 2, \ldots, s)$$
$$V_i^{(j)} J_{in} = 0, \qquad J_{in} J_{in'} = 0, \qquad E_i^{(j)} = \prod_n I_{in}^{(j)}, \qquad |E_i^{(j)}|>0$$
$$(j=1, 2, \ldots, q;\ n, n'=1, 2, \ldots, r;\ i=1, 2, \ldots, s)$$

e tali che, detti h, k i lati di uno qualunque dei rettangoli (4), *si abbia*

$$(5) \qquad h \geqslant 2ka(2k), \qquad k \geqslant 2ha(2h).$$

Si scelga l'intero r e indi l'intero ν in modo che $1+1/2+\ldots+1/r>1/\eta$ e posto $\theta=1-(1/r)(1+1/2)+\ldots+1/r)$, $0<\theta<1$, risulti $\theta^\nu<\eta$. Posto $s=s's''$ si scelgano s' e s'' abbastanza grandi in modo che

$$\frac{1}{s'r^\nu} : \frac{1}{s''} = \frac{1}{r^\nu}\,\frac{s''}{s'} \geqslant 2a\left(\frac{2}{s''}\right), \qquad \frac{1}{2^\nu s''r} : \frac{1}{s'} = \frac{1}{2^\nu r}\,\frac{s'}{s''} \geqslant 2a\left(\frac{2}{s'}\right), \qquad \frac{1}{s'}<\frac{\eta}{2}, \qquad \frac{1}{s''}<\frac{\eta}{2}.$$

([16]) L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti.* Atti Ac. Naz. Lincei (5), 18, pp. 246-253 (1909) e cfr. S. SAKS, loc. cit. in ([2]), p. 75 ove detto teorema è riportato.

Indi mediante parallele agli assi si divida R in $s=s's''$ rettangoli uguali $R_1, R_2, \ldots, R_s$ di lati $(1/s', 1/s'')$. Risulta $\delta(R_i)<\eta$, $(i=1, 2, \ldots, s)$.

Eseguita su ogni R_i la costruzione indicata da H. BOHR [17], ne risulta la suddivisione richiesta. Basta dimostrare che ognuno dei rettangoli (4) così costruiti soddisfa alle condizioni (5). Richiamando la costruzione del BOHR è subito visto che

$$\frac{1}{s'} \geqslant h \geqslant \frac{1}{s'r^{\nu}}, \qquad \frac{1}{s''} \geqslant k \geqslant \frac{1}{2^{\nu}s''r}$$

onde

$$h \geqslant \frac{1}{s'r^{\nu}} \geqslant \frac{2}{s''}\, a\left(\frac{2}{s''}\right) \geqslant 2ka(2k), \qquad k \geqslant \frac{1}{2^{\nu}s''r} \geqslant \frac{2}{s'}\, a\left(\frac{2}{s'}\right) \geqslant 2ha(2h).$$

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE III. — Sia sempre $R(0, 1;\, 0, 1)$, N un intero, $\eta=1/N^2$ e $\Phi_N(x, y)$ la funzione costruita dal SAKS [18] sulla costruzione del Lemma III. Si ha

$$\Phi_N \geqslant 0, \qquad \iint_R \Phi_N dxdy = 2N^{-1}, \qquad \iint_{I_{in}^{(j)}} \Phi_N dxdy \geqslant N|I_{in}^{(j)}|, \qquad \iint_{J_{in}} \Phi_N dxdy \geqslant N|J_{in}|.$$

Sia (x_0, y_0) un punto di R. Esso apparterrà ad uno almeno dei rettangoli $I_{in}^{(j)}$ o J_{in}. Diciamo $I_0 \equiv I_0(h_0, k_0)$ il rettangolo minimo di centro (x_0, y_0) contenente quel $I_{in}^{(j)}$ o J_{in} di cui siano h e k i lati.

Si ha $2h \geqslant h_0 \geqslant h$, $2k \geqslant k_0 \geqslant k$ e quindi

$$h_0 \geqslant h \geqslant 2ka(2k) \geqslant k_0 a(k_0), \qquad k_0 \geqslant k \geqslant 2ha(2h) \geqslant h_0 a(h_0)$$

$$\iint_{I_0} \Phi_N(x, y)dxdy \geqslant \frac{1}{4} N|I_0|.$$

La funzione

$$\Phi(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi_{2^s}(x, y)$$

ha le proprietà richieste in III.

---

[17] Loc. cit. in [9].

[18] Loc. cit. in [8].