Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Maurice Fréchet

Sur une définition intrinsèque de l'aire d'une surface courbe comme limite d'aires polyèdrales inscrites

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 285-300

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_285_0>

SUR UNE DÉFINITION INTRINSÈQUE DE L'AIRE D'UNE SURFACE COURBE COMME LIMITE D'AIRES POLYÈDRALES INSCRITES

par MAURICE FRÉCHET (Paris).

RÉSUMÉ. - M. W. H. YOUNG a donné une définition de l'aire comme limite d'aires de polyèdres inscrits et conduisant à l'intégrale classique $\iint\limits_Q \sqrt{EG-F^2}\,dudv$, en imposant à ces polyèdres des conditions de forme analytique. Le but principal de ce mémoire est de montrer qu'en restreignant la famille de surfaces à laquelle s'applique le théorème de YOUNG, on parvient à donner à ces conditions une forme intrinsèque et géomètrique simple. Les résultats des p. 296, 297 ont été communiqués oralement à la Société Mathématique de France dans sa séance du 25 Janvier 1939 et résumés dans une note parue aux Comptes-Rendus du Congrès des Sociétés Savantes tenu à Bordeaux en Avril 1939. La rédaction des Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa nous ayant exprimé le désir d'insérer un développement de cette note, il nous est agréable de le voir paraître dans un périodique dont le Directeur a si efficacement contribué à l'étude de la notion d'aire.

Dédié à M. W. H. Young.

I.

Sur la longueur d'une courbe.

Nous développerons des considérations sur la longueur d'une courbe qui n'ont rien d'essentiellement nouveau, mais qui, pourtant, sont négligées même dans des ouvrages rédigés par certains des plus éminents spécialistes des questions de longueurs et d'aires et sans lesquelles certains raisonnements qui y figurent prêtent à objection. Outre leur intérêt propre, ces considérations auront l'avantage de préparer l'examen du cas des surfaces.

Sur la convergence des polygones inscrits. - Nous allons d'abord nous occuper d'un détail concernant la convergence d'une suite de polygones inscrits dans une courbe continue.

Rappelons qu'une courbe continue $\widehat{AB}$ n'est pas seulement un lieu de points, mais la suite ordonnée de points M_t obtenue par une transformation continue d'un segment J $(a \leqslant t \leqslant b)$. Un polygone inscrit est un polygone ayant ses sommets sur la courbe mais dont on a soin de joindre les sommets dans l'ordre où se présentent les points t de J qui les déterminent (A et B étant les deux extrémités du polygone).

Ceci convenu, on définit généralement une suite de polygones inscrits dans $\widehat{AB}$ et convergeant vers $\widehat{AB}$ de la manière suivante.

Ou bien on suppose que le plus grand, δ, des intervalles $(t_{i+1}-t_i)$ (formés par la suite des points $t_0=a<t_1<t_2<\dots<t_p=b$ qui correspondent aux sommets M_{t_k} d'un polygone P inscrit dans $\widehat{AB}$) tend vers zéro. Mais alors, on a une condition analytique qui fait intervenir une représentation paramètrique déterminée de $\widehat{AB}$ et dont le sens géomètrique n'est pas tout à fait évident.

Ou bien, pour échapper à cet inconvénient, on fait tendre vers zéro la plus grande des longueurs $M_{t_{k-1}}M_{t_k}$ des côtés du polygone P. Mais dans ce cas, si la courbe a un point multiple C et se compose ainsi de trois arcs

$$\widehat{A_aC_{t'}}, \qquad \widehat{C_{t'}C_{t''}}, \qquad \widehat{C_{t''}B_b},$$

on pourra satisfaire à la condition en prenant des sommets tels que $C_{t'}=M_{t_{i-1}}$, $C_{t''}=M_{t_i}$ soient deux sommets (confondus dans l'espace mais distincts sur la courbe) consécutifs et alors P pourra tendre vers la courbe continue composée de $\widehat{A_aC_{t'}}$ et $\widehat{C_{t''}B}$ sans tendre vers tout l'arc $\widehat{AB}$.

Nous allons donc procéder autrement. Appelons *oscillation ou diamètre* d'un arc continu, sa plus grande corde. Et désignons par $\Omega[P]$ la plus grande des oscillations de chacun des arcs de $\widehat{AB}$ sous-tendus par les cotés du polygone P inscrit dans $\widehat{AB}$.

Il est clair que si P varie de sorte que $\Omega[P]$ tende vers zéro, P converge vers $\widehat{AB}$, en ce sens qu'il existe au moins une homéomorphie (conservant l'ordre) entre les points de P et ceux de $\widehat{AB}$, telle que le maximum de la distance de deux points correspondants tende vers zéro. Car si l'on établit une homéomorphie quelconque conservant l'ordre entre un côté de P et l'arc qu'il soustend, on définit ainsi une homéomorphie (conservant l'ordre) entre P et $\widehat{AB}$ et dans laquelle, en vertu de l'inégalité triangulaire, la distance de deux points correspondants est $\leqslant 2\Omega[P]$.

Définition de la longueur. - C'est quand on a en tête les considérations précédentes que se trouve justifié l'emploi de $\Omega[P]$ dans l'énoncé suivant dû, sous une autre forme, à L. SCHEEFFER [1] (1), et qui étend à la longueur un théorème classique de DARBOUX sur les intégrales supérieure et inférieure. Si une suite de polygones P inscrits dans un arc continu fixe $\widehat{AB}$ est telle que la suite correspondante des valeurs de $\Omega[P]$ tende vers zéro, la suite des

(1) Voir à la fin de ce mémoire la liste des publications citées.

longueurs des polygones P converge vers la borne supérieure (finie on non) des longueurs de tous les polygones inscrits dans $\widehat{AB}$.

Une fois démontré ce théorème, il est naturel d'appeler longueur de la courbe la valeur commune de cette limite et de cette borne supérieure.

Dans le cas particulier où $\widehat{AB}$ admet une représentation paramètrique suivant laquelle ses coordonnées sont des fonctions continues dérivables et à dérivées continues de t, on démontre par un raisonnement élémentaire bien connu que si $\delta \to 0$, la longueur de P tend vers l'intégrale classique

$$I = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Ce raisonnement ne prouve pas que cette limite soit indépendante de la représentation paramètrique, qu'elle représente une quantité bien définie par la suite ordonnée de points constituant $\widehat{AB}$. Mais quand $\delta \to 0$, $\Omega[P]$ tend aussi vers zéro et d'après le théorème de SCHEEFFER, I est égal à la borne supérieure des longueurs des polygones inscrits. Donc cette intégrale a une signification géomètrique intrinsèque, et, grâce à ce complément indispensable, on a le droit de l'appeler longueur de $\widehat{AB}$.

D'ailleurs, quand la borne supérieure ci dessus est finie pour une courbe continue n'ayant pas partout une tangente continue, on est en droit (comme nous l'avons déjà observé en 1924, (FRÉCHET [1], ([2]))) de donner pourtant encore un sens analytique à la notation

$$I = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

comme limite de $\sum \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}$ quand $\Omega(P)$ tend vers zéro.

II.

Sur l'aire d'une surface courbe.

Sur la convergence des polyèdres inscrits. - De même qu'un arc continu (considéré comme une trajectoire, une suite ordonnée de points) est une image continue d'un segment; de même, on considère une surface continue s (simplement connexe) non comme un ensemble ponctuel, mais comme une famille doublement ordonnée de points M_m, obtenue par une transformation continue des points m d'une aire plane Q simplement connexe, par exemple, un carré.

([2]) Voir la liste bibliographique en fin du mémoire.

Considérons un nombre fini de points M_{m_k} de s et de son contour. On pourra les envisager comme sommets de triangles T constituant les faces d'un polyèdre P inscrit dans S.

Seulement pour joindre ces points, on aura soin de les placer dans la même situation respective que les points m_k correspondants. A cet effet, on décomposera l'aire plane Q en triangles t (rectilignes ou curvilignes) ne chevauchant pas et ayant pour sommets les points m_k. A cette « triangulation » de Q correspondra une « triangulation » de s: s se trouvera décomposé en un nombre fini de triangles curvilignes τ correspondant aux triangles t. Et le polyèdre P sera constitué de triangles rectilignes T ayant respectivement les mêmes sommets que les triangles curvilignes correspondants τ, de s.

Nous appellerons *oscillation ou diamètre* de la région de s limitée par un des triangles τ, la plus grande corde ω_τ joignant deux points de τ. Alors les côtés du triangle T correspondant inscrit dans τ sont $\leqslant \omega_\tau$ et par suite l'oscillation ω_T de T (qui est égale au plus grand côté de T) est $\leqslant \omega_\tau$. Dés lors, si A est un sommet de T, la distance de deux points correspondants μ et M de τ et T est $\leqslant \mu A + AM \leqslant \omega_\tau + \omega_T \leqslant 2\omega_\tau$. Désignons par $\Omega[P]$ la plus grande des oscillations ω_τ des triangles curvilignes τ de s (en nombre fini); on voit qu'on peut établir entre s et P une correspondance homéomorphique (3) où la plus grande distance de deux points correspondants est $\leqslant 2\Omega[P]$. Dès lors si $\Omega[P] \to 0$, P converge uniformément vers s.

De même que dans l'étude de la longueur d'une ligne, il y aurait inconvénient ici à substituer à $\Omega[P]$, la plus grande arête, $\Delta[P]$, de P ou le plus grand côté, δ, des triangles correspondants, t, de Q. D'une part, si, par exemple, s comporte un bulbe B rattaché au reste de s en un point A, B et A étant représentés sur Q par l'intérieur et le contour d'un carré q intérieur à Q, il est clair qu'on pourrait prendre pour P un polyèdre inscrit dans s de la façon suivante. Soit q' un carré homothétique et concentrique à q dans le rapport $1+\varepsilon$. Les triangles t seraient: deux moitiés de q, des triangles compris entre q et q', enfin des triangles n'empiétant pas sur q' et dont le plus grand côté serait $< \varepsilon$. Il est clair que $\Delta[P]$ tendrait vers zéro avec ε et que cependant P ne tendrait que vers la partie de s obtenue en supprimant le bulbe B.

On doit cependant reconnaitre que l'objection contre l'emploi de $\Delta[P]$ peut être évitée dans le cas où l'on restreint, comme nous le ferons p. 11, la famille de surfaces s envisagée et, en particulier en supposant s dépourvue de points multiples.

D'autre part, δ n'a pas une signification géomètrique intrinsèque pour la surface s elle-même, ni pour le réseau des triangles curvilignes τ, de sorte qu'une définition de l'aire où entre δ est une définition analytique et non géométriquement intrinsèque.

---

(3) Au sens précisé à la p. 7 de notre Note (FRÉCHET [1]).

Les diverses définitions de l'aire. - Une généralisation naturelle de la définition de la longueur consisterait à définir l'aire d'une surface s comme la borne supérieure des aires des polyèdres inscrits dans s ou comme la limite des aires d'une suite de ces polyèdres inscrits tendant vers s.

Or il résulte d'une remarque, attribuée généralement à H. SCHWARZ [1], mais présentée à peu près même temps par PEANO [1], que, même pour des surfaces aussi simples qu'un cylindre de révolution, aucune de ces deux définitions ne peut être retenue.

Nous avons montré (FRÉCHET [2]) que la même remarque s'étend au cas où S est elle-même un polyèdre; des raisonnements de géométrie élémentaire permettent de prouver que la première définition attribuerait à l'aire une valeur infinie et que la seconde lui donnerait une valeur indéterminée arbitraire parmi les valeurs au moins égale à l'aire du polyèdre P telle qu'elle est définie en géometrie élémentaire.

On a donc dû donner d'autres définitions de l'aire. Il y en a un grand nombre. L'une d'elles, la plus connue, due à M. LEBESGUE, définit l'aire de s comme la plus petite des limites des aires des polyèdres tendant vers s. Nous avons donné plus tard (FRÉCHET [3]), une définition de l'aire équivalente à celle de M. LEBESGUE, en considérant l'aire $A[s]$ de s comme la fonctionnelle semi-continue inférieurement la moins discontinue qui coïncide avec la valeur adoptée en géométrie élémentaire pour l'aire de s quand s est un polyèdre.

Mais on peut aussi donner une autre définition qui a l'avantage de se rapprocher un peu plus de la définition de la longueur et d'être aussi plus intuitive que d'autres par le fait que, d'une part, elle ne fait intervenir parmi les polyèdres tendant vers s que les polyèdres *inscrits* dans s et d'autre part, elle ne fait intervenir la représentation paramétrique que pour préciser les relations mutuelles de position des points de s.

Conditions à imposer aux polyèdres inscrits. - Déjà plusieurs auteurs ont donné des définitions de l'aire comme limite d'aires de polyèdres inscrits, échappant pourtant à l'objection de PEANO-SCHWARZ, en imposant une restriction convenable C au choix des polyèdres inscrits P.

Mais ils font intervenir par deux fois d'une manière essentielle, dans leurs définitions, la représentation paramétrique considérée. D'une part, ils assurent la convergence vers s des polyèdres P en faisant tendre vers zéro le plus grand côté δ des triangles t *du plan des paramètres* (u, v). D'autre part, la condition C imposée aux polyèdres P est exprimée indirectement par l'intermédiaire d'une condition imposée au choix des mêmes triangles t du plan des paramètres.

M. RADEMACHER [1], suppose que les angles des triangles t sont tous supérieurs à un nombre θ positif.

M. KEMPISTY [1] admet que le rapport $\frac{h}{a}$ de la plus petite hauteur h d'un triangle t à son plus grand côté a, est, pour tous les triangles t, supérieure à un nombre positif fixe. Un autre auteur impose une borne supérieure fixe $\omega < \pi$ aux angles de tous les triangles t.

M. W. H. YOUNG [1] considére le cas où il existe un nombre fixe γ $(0 < \gamma < \pi)$ tel que, dans tous les triangles t, l'un au moins des angles reste compris entre γ et $\pi - \gamma$.

On prouve facilement que les deux dernières conditions sont équivalentes et qu'elles sont impliquées par l'une ou l'autre des deux premières conditions.

La dernière a été introduite par M. W. H. YOUNG en vue de démontrer le théorème suivant:

soit F la famille des surfaces s dont les coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions continues et à dérivées continues de deux paramètres u, v dans un polygone Q;

si $\delta \to 0$ pour une suite de polyèdres inscrits dans une surface s de F et vérifiant la condition ci-dessus de M. YOUNG, la suite des aires de ces polyèdres tend vers l'intégrale classique

$$I = \iint\limits_{Q} H du dv$$

avec

$$H = \sqrt{S\left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Dans le mémoire cité ci-dessus de M. W. H. YOUNG, plusieurs propositions sont répétées en italique sous le titre « Théorème ». Il n'en est pas de même de la proposition rappelée ci-dessus qui ne figure en outre qu'à la fin (p. 150-152) de ce mémoire; enfin M. YOUNG n'a donné qu'une esquisse de sa démonstration. Au contraire dans une petite Note publiée ultérieurement, nous avions rappelé explicitement la proposition de M. YOUNG pour en présenter un énoncé équivalent. C'est sans doute pour ces raisons qu'en rappelant cet énoncé, seule notre note est revenue à la mémoire de M. TIBOR RADO [1] qui a été ainsi conduit à nous attribuer la paternité de cet énoncé dans un mémoire très intéressant où il rappelle les définitions principales de l'aire. C'est pour les mêmes raisons qu'il a cru nécessaire de donner une démonstration complète du résultat de M. YOUNG. (Il se trouve d'ailleurs que sa démonstration suit précisément les grandes lignes tracées par M. YOUNG et qui se présentent, de toute façon, très naturellement). Ce mémoire de M. RADO étant rédigé en polonais, son contenu nous en avait d'abord échappé. En ayant eu récemment traduction, nous nous sommes d'abord proposé de restituer à M. YOUNG la propriété de son énoncé. Mais à cette occasion, nous avons réfléchi à nouveau sur le fond de la question. Et nous avons pu prouver qu'en restreignant convenablement la famille F des surfaces auxquelles s'applique la démonstration de M. YOUNG, on peut substituer à la forme analytique des conditions qu'il emploie, une forme intrinsèque géométrique. De sorte qu'après tout, et après coup, nous aurons tout de même apporté une contribution au résultat de M. YOUNG. Mais avant d'exposer cette contribution, comme nous aurons besoin pour l'établir de plusieurs des inégalités qui servent à démontrer l'énoncé primitif de M. YOUNG, nous allons d'abord rappeler la démonstration de cet énoncé.

Démonstration du théorème de M. W. H. Young. - Soient M, M_1, M_2, les sommets, de coordonnées x, y, z, x_1,...., z_2, des sommets d'un triangle T inscrit dans s. Ils correspondent aux sommets $m(u, v)$, $m_1(u_1, v_1)$, $m_2(u_2, v_2)$ d'un triangle t. En posant $u_1 = u + h_1$,...., $v_2 = v + k_2$, on a, puisque x_u', x_v', sont supposées continues :

$$\begin{aligned} x_1 - x &= x(u + h_1,\ v + k_1) - x(u, v) \\ &= h_1 x_u' + k_1 x_v' + \theta(u, v, u_1, v_1)\, r_1 \varepsilon(r_1) \end{aligned}$$

où $|\theta| < 1$, $r_1 = \sqrt{h_1^2 + k_1^2}$ et où $\lim\limits_{r_1 \to 0} \varepsilon(r_1) = 0$. De même pour $y_1 - y$,...., $z_2 - z$. Or

$$4T^2 = S \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}^2 = S \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix}^2$$

et

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 x_u' + k_1 x_v' + \theta r_1 \varepsilon(r_1) .... \\ .... h_2 y_u' + k_2 y_v' + \theta_3 r_2 \varepsilon_3(r_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \varrho_z$$

avec

$$\varrho_z = \begin{vmatrix} \theta r_1 \varepsilon(r_1) & h_1 y_u' + k_1 y_v' \\ \theta_1 r_2 \varepsilon(r_2) & h_2 y_u' + k_2 y_v' \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} \theta r_1 \varepsilon(r_1) & \theta_2 r_1 \varepsilon_1(r_1) \\ \theta_1 r_2 \varepsilon(r_2) & \theta_3 r_2 \varepsilon_1(r_2) \end{vmatrix}.$$

Comme la somme $S(x_u'^2 + x_v'^2)$ a sur Q une borne supérieure finie M^2, on a

$$(2) \qquad \begin{aligned} |\varrho_z| &\leqslant 2 r_1 r_2 M[\varepsilon(r_1) + \varepsilon_1(r_2)] + 2 r_1 r_2 \varepsilon(r_1) \varepsilon_1(r_2) \\ &\leqslant 2 r_1 r_2 \left\{ M[\varepsilon(r_1 + r_2) + \varepsilon(r_1 + r_2)] + \varepsilon(r_1 + r_2) \varepsilon_1(r_1 + r_2) \right\}. \end{aligned}$$

Or

$$(2^{\text{bis}}) \qquad 2t = \pm \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 \sin m_1 m m_2 .$$

Donc

$$2T = \sqrt{S \left[\pm 2t \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \varrho_z \right]^2}.$$

D'où, en vertu de l'inégalité triangulaire

$$(3) \qquad \left| 2T - \sqrt{S \left[2t \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]^2} \right| \leqslant \sqrt{S(\varrho_z)^2} \leqslant 2 r_1 r_2 \eta(r_1 + r_2)$$

où $\lim\limits_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0$.

En posant avec les notations habituelles

$$H^2(u, v) = EG - F^2 = S \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]^2,$$

on aura :

$$(4) \qquad T - tH(u, v) = r_1 r_2 \eta(r_1 + r_2) \theta_4$$

où $|\theta_4| \leqslant 1$.

Donc

$$A[P] = \sum T = \sigma + \mu$$

avec

$$\sigma = \sum H(u, v)t$$

$$\mu = \sum r_1 r_2 \eta(r_1 + r_2)\theta_4 .$$

Quand le maximum δ des côtés des triangles t tend vers zéro, on a:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma = \iint_Q H(u, v) du dv = I.$$

Reste à savoir ce que devient μ. Or on peut écrire

$$|\mu| = \left| \sum \frac{t}{\sin m_1 m m_2} \eta(r_1 + r_2)\theta_4 \right| \leqslant \eta(2\delta) \sum \frac{t}{\sin m_1 m m_2} .$$

Il est alors bien naturel d'examiner le cas où, quand P varie, $\sin m_1 m m_2$ reste supérieur à un nombre positif fixe, c'est-à-dire où il existe un nombre fixe γ, tel que $0 < \gamma < \pi$ et que $\gamma < m_1 m m_2 < \pi - \gamma$. On a alors:

$$|\mu| \leqslant \eta(2\delta) \frac{\text{aire } Q}{\sin \gamma}$$

et par suite $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu = 0$, d'où:

$$\lim_{\delta \to 0} A[P] = I = \iint_Q \sqrt{S \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2} du dv. \tag{5}$$

Caractère analytique de l'énoncé de M. Young. - On observera que la condition adoptée dépendant de γ, on pourrait s'attendre à ce que la limite des aires considérées, dépendît de γ. Le fait qu'elle est égale à l'intégrale classique I où γ ne figure pas montre que la limite des aires est la même quel que soit γ. C'est pour mettre ce point en évidence dans la condition C elle-même que, dans la Note mentionnée ci-dessus, nous avions proposé d'exprimer cette condition sous la forme suivante: la plus grande des limites, quand δ tend vers zéro, du plus grand des angles des triangles t est inférieure à π.

Mais ce n'est pas tout. Supposons qu'on adopte successivement pour la surface s de F, deux représentations paramètriques (avec existence et continuité des dérivées des coordonnées). Il n'est pas évident qu'une suite de polyèdres inscrits P, satisfaisant pour l'une des représentations à la condition de M. W. H. YOUNG, y satisfera pour l'autre. Il n'est donc pas évident que si la limite de $A[P]$ est représentable par l'intégrale classique $I = \iint_Q H du dv$ pour une représentation paramètrique de s, elle sera représentable par l'intégrale correspondante pour l'autre. On serait tenté de le prouver directement au moyen des égalités

$$H^2 = S\left[\frac{D(x, u)}{D(u, v)}\right]^2 = S\left[\frac{D(x, y)}{D(u_1, v_1)} \frac{D(u_1, v_1)}{D(u, v)}\right]^2 = H_1^2 \left[\frac{D(u_1, v_1)}{D(u, v)}\right]^2$$

$$\iint_Q H du dv = \iint_Q H_1 \left| \frac{D(u_1, v_1)}{D(u, v)} \right| du dv = \iint_{Q_1} H_1 du_1 dv_1 .$$

Un tel raisonnement est exact pour toutes les représentations paramètriques en (u_1, v_1) de s qu'on peut déduire de la première, en $(u\ v)$, par une correspondance telle que, non seulement elle conserve l'ordre respectif des points comme cela est nécessaire, mais telle que u_1, v_1 soient des fonctions de u, v continues avec des dérivées continues et telle que $\frac{D(u_1, v_1)}{D(u, v)}$ reste $\neq 0$. Or pour les deux représentations considérées plus haut, il n'est nullement évident que ces conditions supplémentaires soient vérifiées. Dès lors, s'il est exact que I soit indépendant de la représentation paramètrique, pour toutes les représentations paramètriques déduites de l'une d'elles par l'une des transformations considerées ci-dessus, il n'est pas évident que I soit indépendant de la représentation paramètrique quand celle-ci est l'une quelconque de celles auxquelles s'applique le théorème de M. W. H. YOUNG.

D'autre part, et surtout, on ne voit pas clairement comment la condition imposée aux triangles t du plan des u, v se répercute sur les triangles T de l'espace, c'est-à-dire quelle est l'expression géomètrique de la restriction imposée ainsi indirectement aux faces des polyèdres inscrits.

Et de même la condition $\delta \to 0$ concerne la triangulation du plan des paramètres (u, v). Elle est suffisante mais non nécessaire pour la convergence de P vers s.

Réduction à un énoncé intrinsèque. - Nous nous sommes proposé de donner une signification géométrique directe aux hypothèses de l'énoncé de M. YOUNG. Mais afin de rendre valide ou, tout au moins, de rendre plus simple, la démonstration du théorème modifié, nous avons dû restreindre la famille de surfaces considérée.

Nous voulons alors démontrer que, pour ces surfaces s, le théorème de YOUNG subsiste quand on remplace la condition $\delta \to 0$ par $\Delta[P] \to 0$ et quand la condition imposée à des angles de triangles de rester $< \omega$ fixe $(< \pi)$ concerne les triangles T inscrits dans s et non les triangles t du plan des u, v.

A cet effet, opérons une *première* réduction de la famille F et appelons f_0 la famille des surfaces dont les coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions continues et à dérivées continues de deux paramètres dans un polygone Q et *telles de plus* que les déterminants fonctionnels $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \ldots, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ ne soient nulle part, nuls à la fois sur Q.

Pour établir une propriété utile de f_0, ainsi que pour préparer la modification annoncée du théorème de YOUNG, nous allons chercher à *estimer le rapport*

$$g = \frac{R_1}{r_1} = \frac{MM_1}{mm_1}.$$

En posant $h_1 = r_1 \cos \psi$, $k_1 = r_1 \sin \psi$, on a

$$g = \sqrt{S[x_u' \cos \psi + x_v' \sin \psi + \theta \varepsilon(r_1)]^2},$$

d'où

$$a-\beta \leqslant g \leqslant a+\beta$$

avec

$$a=\sqrt{S(x_u' \cos \psi + x_v' \sin \psi)^2}=\sqrt{E \cos^2 \psi + 2F \sin \psi \cos \psi + G \sin^2 \psi}$$
$$\beta=\sqrt{S[\theta\varepsilon(r_1)]^2} \leqslant \sqrt{S\varepsilon^2(r_1)},$$

d'où

$$\lim_{r_1 \to 0} \beta = 0.$$

Si nous prouvons que a reste compris entre deux nombres positifs fixes N_1 et L_1, indépendants de m, m_1, M, M_1 on pourra prendre r_1 assez petit, $(r_1 < r_0)$, pour qu'on ait $\beta < \frac{N_1}{2}$ et par suite

$$\frac{N_1}{2} < g < L_1 + \frac{N_1}{2}$$

ou

$$N' < \frac{R_1}{r_1} < L'$$

pour $0 < r_1 < r_0$.

Or on a évidemment:

$$a^2 \leqslant E + |F| + G$$

et le second membre est une fonction continue de u, v qui a évidemment sur Q un maximum fini qu'on peut appeler L_1^2. D'autre part, a^2 ne pourrait s'annuler que si l'on avait $F^2 - EG \geqslant 0$ ou $-H^2 \geqslant 0$; or on suppose $H \neq 0$ sur s. Alors a^2 est une fonction continue de u, v, ψ qui est $\geqslant 0$ sans jamais s'annuler quand u, v varient dans Q et quand de plus $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$. Donc a^2 posséde un minimum positif, qu'on peut appeler N_1^2, indépendant de m, m_1, M, M_1.

En résumé, il existe deux nombres positifs N', L', indépendants de m, m_1, M, M_1, tels que

$$N' r_1 \leqslant R_1 \leqslant L' r_1 \tag{5}$$

pour $0 \leqslant r_1 < r_0$.

On en déduit d'abord que pour $0 < r_1 < r_0$, R_1 ne peut être nul et par suite que si l'on divise le polygone Q du plan des u, v en morceaux de diamètres $< r_0$, aucun des morceaux correspondants de s n'aura de point multiple. Par conséquent, *toute surface s de la famille f_0 n'a qu'un nombre fini ou nul de points multiples.*

Nous allons alors considérer un de ces morceaux sans point multiple, ce qui revient à *considérer une surface s* appartenant à la famille f de celles des surfaces de f_0 *qui n'ont pas de point multiple.*

Alors pour $r_1 \geqslant r_0$ (>0), $\frac{R_1}{r_1}$ étant borné et n'étant jamais nul a un maximum fini L'' et un minimum positif N''. Dès lors en prenant pour N le plus petit des deux nombres positifs N' et N'', et pour L le plus grand des deux nombres finis L' et L'', *on a*

(6) $$Nr_1 \leqslant R_1 \leqslant Lr_1$$

quels que soient les points M, M_1 de s.

Il est bien clair que si $\delta \to 0$, $\Omega[P]$ tend vers zéro. Mais réciproquement, l'inégalité (6) prouve que

(7) $$N\delta \leqslant \Omega[P]$$

Par suite quand $\Omega[P]$ tend vers zéro, $\delta \to 0$.

D'ailleurs on déduit facilement de (6) les inégalités:

$$N\delta \leqslant \Delta[P] \leqslant \Omega[P] \leqslant L\delta,$$

d'où

$$N\Omega[P] \leqslant L\Delta[P]$$

qui montrent que si l'une des quantités δ, $\Delta[P]$, $\Omega[P]$ tend vers zéro, il en est de même des deux autres. On a vu p. 4 que cette proposition, démontrée pour la famille f de surfaces s ne serait pas nécessairement vraie pour une famille plus étendue comme la famille F.

Enfin l'égalité (4) peut s'écrire:

$$R_1R_2 \sin M_1MM_2 = Hr_1r_2 \sin m_1mm_2 + 2r_1r_2\eta(r_1+r_2)\theta_4$$

D'où en divisant par r_1r_2:

$$N^2 \sin M_1MM_2 \leqslant K \sin m_1mm_2 + 2\eta(2\delta)$$

où K est le maximum de $H(u, v)$ sur Q.

Si donc, au moins pour $\Delta[P]$ assez petit, $\sin M_1MM_2 > \sin \Phi > 0$, et si l'on prend, d'autre part, $\Omega[P]$ assez petit pour que l'on ait

$$\eta(2\delta) < \frac{N^2 \sin \Phi}{4}$$

on aura:

(7^{bis}) $$\sin m_1mm_2 \geqslant \frac{N^2 \sin \Phi}{2K} > 0.$$

Dès lors, l'hypothèse de M. YOUNG sera vérifiée et l'on aura:

$$\lim_{\Delta[P]\to 0} A[P] = \lim_{\delta \to 0} A[P] = I.$$

Finalement, nous avons obtenu le résultat suivant:

Soit f la famille des surfaces s sans point multiple et dont les coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions de deux paramètres (u, v) sur un polygone Q de sorte que ces fonctions aient des dérivées continues en u, v et que leurs trois déterminants fonctionnels ne soient à la fois nuls en aucun point de Q.

Théorème intrinsèque. - *Soit ω un nombre positif fixe $<\pi$ et un polyèdre P_ω à faces triangulaires T inscrites dans une surface s de la famille f et dont les angles de ces triangles T restent $<\omega$.*

Alors, lorsque pour une suite de polyèdres P_ω, la plus grande arète $\varDelta[P_\omega]$ de P_ω converge vers zéro, non seulement P_ω converge vers s, mais l'aire de P_ω converge vers l'intégrale classique I:

$$\lim_{\varDelta[P_\omega]\to 0} A[P_\omega]=\iint_Q \sqrt{S\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\,dudv. \tag{8}$$

Il est naturel de considérer ce théorème comme définissant l'aire de s

$$A[s]=\lim_{\varDelta[P_\omega]\to 0} A[P_\omega]. \tag{9}$$

L'expression I obtenue pour $A[s]$ montre d'ailleurs que cette aire est indépendante de ω. Et la forme géométriquement intrinsèque de l'énoncé établit nettement cette fois que l'aire est indépendante de la représentation paramétrique qui intervient dans l'expression de I.

Remarques. - On a aussi proposé d'imposer aux triangles T de P une condition différente quoique encore de forme géométrique, à savoir: que l'angle du plan de chaque triangle T avec le plan tangent en l'un de ses sommets tende vers zéro avec $\varDelta[P_\omega]$ et cela uniformément. Nous allons montrer que cette condition est nécessairement vérifiée quand, comme dans l'énoncé plus haut, les angles de chaque triangle T restent inférieurs au nombre fixe ω $(0<\omega<\pi)$ (la surface s continuant à appartenir à la famille f).

Soit V l'angle du plan d'un triangle T (MM_1M_2) de P avec le plan tangent à s en M. On a:

$$\cos V=\frac{1}{TH}\,S\,\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y \\ x_2-x & y_2-y \end{vmatrix}\frac{D(x,y)}{D(u,v)},$$

d'où, d'après (1)

$$TH\cos V=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix}H^2+\frac{1}{2}\,S\varrho_z\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

et d'après (3)

$$\left|S\varrho_z\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\leqslant H\sqrt{S(\varrho_z)^2}\leqslant 2r_1r_2H\eta(r_1+r_2)$$

et d'après (4),

$$[tH+r_1r_2\eta(r_1+r_2)\theta_4]H\cos V=\pm tH^2+r_1r_2\eta(r_1+r_2)H\theta_5$$

avec $|\theta_5|\leqslant 1$. D'où

$$t[1\mp\cos V]=Br_1r_2\eta(r_1+r_2) \tag{10}$$

avec :

$$k|B| \leqslant H|B| = |\theta_4 \cos V - \theta_5| \leqslant 2 \tag{11}$$

k étant le minimun de la fonction continue positive $H(u, v)$. D'où, d'après (10), (11), (2^{bis}) et (7^{bis})

$$k(1 \pm \cos V) \leqslant \frac{2r_1 r_2}{|t|} \eta(r_1 + r_2) = \frac{4}{\sin m_1 m m_2} \eta(r_1 + r_2)$$

$$1 \pm \cos V \leqslant \frac{4\eta(2\delta)}{k \sin m_1 m m_2} \leqslant \frac{8K\eta(2\delta)}{kN^2 \sin \Phi}.$$

Quand les conditions du théorème de la p. 12 sont vérifiées, δ et par suite $\eta(2\delta)$ tendent vers zéro quand $\Delta[P]$ tend vers zéro. Et, par conséquent, $1 \pm \cos V$ tend uniformément vers zéro, c'est-à-dire que l'angle (compris entre 0 et π) du plan du triangle T (MM_1M_2) avec le plan tangent à s en M converge *uniformément* vers zéro quand $\Delta[P]$ tend vers zéro dans l'hypothèse où les angles de T restent inférieurs à un angle fixe ω ($0 < \omega < \pi$).

On observera que la réciproque n'est pas vraie, comme on le voit dans le cas où s est une aire plane polygonale, cas où P se confondant avec s, V reste égal à zéro sans que les angles des triangles T soient assujettis à d'autre condition que de rester entre 0 et π.

Ainsi notre Théorème intrinsèque de la p. 12 resterait vrai mais perdrait en généralité si l'on remplaçait la condition sur les angles des faces par la condition sur l'angle des faces avec les plans tangents.

Généralisation. - M. W. H. YOUNG a montré que $A[P]$ converge encore vers l'intégrale classique I pour des familles de surfaces beaucoup plus générales que la famille f. Seulement la signification géométrique de la condition qu'il impose aux triangles T par l'intermédiaire des triangles t est encore moins intuitive que celle qui a été mentionnée ci-dessus. Mais cependant le résultat obtenu donne à penser que le théorème intrinsèque que nous avons formulé ci-dessus peut aussi être généralisé en dehors de la famille f.

Si l'on veut le faire, il faudra, sans doute, modifier son énoncé.

D'abord si l'on admettait des surfaces à point multiple, il y aurait probablement lieu, en raison de la remarque de la p. 4, de faire jouer à $\Omega[P]$ le rôle de $\Delta[P]$.

D'autre part, si l'on cessait d'admettre que le plan tangent varie de façon continue, pour englober le cas où s est elle-même un polyèdre, il faudrait remplacer la condition sur les angles des triangles T de P par une condition plus forte. Notre théorème n'est, en effet, pas applicable sans modification aux polyèdres, comme on le voit dans l'exemple que nous avons donné dans notre note « Sur l'aire des surfaces polyèdrales » (citée plus haut, p. 5). En se reportant à la figure de cette note, on verra, en effet, qu'on peut « trianguler » la surface polyèdrale donnée $S \equiv Q$ au moyen de triangles tels que BE_1E_1', marqués sur la figure, de triangles tels que E_1BE_2 non marqués et d'autres triangles décomposant deux rectangles et qui peuvent être des triangles rectangles.

Quand, par exemple, $n = m^2$ et $m < m_0$, tous les angles de ces triangles ont une borne supérieure fixe $\omega < \pi$. Et pourtant $A[P_\omega]$ tend vers l'infini.

Par contre, on pourrait, peut-être, généraliser notre théorème en y remplaçant la condition sur les angles par une condition plus forte. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, les angles tels que $E_1\widehat{BE}_2$ tendent vers zéro, même si $A[P_\omega]$, ne tendant pas vers l'infini, tend vers une limite supérieure à $A[s]$. Dès lors, cet exemple ne s'oppose plus à une généralisation de notre théorème où l'on supposerait sur les angles des faces T de P qu'ils restent supérieurs à un angle fixe $\gamma > 0$ et $< \pi$.

Bien entendu, les remarques précédentes écartent aussi l'idée de généraliser le théorème en remplaçant la condition sur les angles des faces par la condition que l'angle de chaque face avec le plan tangent en un sommet tende uniformément vers zéro. Car cette condition n'a pas de sens (si on ne fait aucune convention supplémentaire) pour une surface qui n'aurait pas partout un plan tangent.

Nous ne chercherons pas ici à généraliser directement notre théorème, mais nous signalerons des moyens plus immédiats d'étendre l'*expression* de l'aire à des surfaces plus générales.

Cas plus général. - Il peut arriver que les cordonnées x, y, z, d'un point M de s ne soient définies en fonction de u et v que dans Q et sur son contour; on ne saurait alors dire ce que sont leurs dérivées partielles sur le contour. Que ces coordonnées existent ou non en dehors de Q, on observera que les raisonnements faits plus haut subsistent si l'on remplace les hypothèses sur les dérivées par la supposition qui en était la conséquence, à savoir que si (u, v), (u_1, v_1) appartiennent à Q ou à son contour, il existe trois fonctions continues $l(u, v)$, $n(u, v)$, $\varepsilon(r_1)$ telles que

$$| x(u_1, v_1) - x(u, v) - (u_1 - u) l(u, v) - (v_1 - v) n(u, v) | < r_1 \varepsilon(r_1)$$

où $r^2 = (u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0} \varepsilon(\lambda) = 0$, et de même pour y et z.

Cas encore plus général. - Considérons une surface continue formée d'un nombre fini, ou même d'une suite infinie de morceaux $s_1, s_2, \ldots, s_p, \ldots$, vérifiant les hypothèses à la base du dernier théorème sous la forme généralisée précédente. On sait alors ce que sont les aires $A[s_1], \ldots, A[s_p], \ldots$ Il est alors naturel de poser par définition

$$A[s] = A[s_1] + \ldots + A[s_p] + \ldots$$

On aura alors

$$A[s]=\iint_{Q_1} H du dv + \dots + \iint_{Q_p} H du dv + \dots$$

où l'on suppose que $s_1, \dots, s_p, \dots$ sont définies sur les morceaux $Q_1, \dots, Q_p, \dots$ en lesquels se décompose l'aire plane Q. On voit qu'alors *on aura encore pour ces surfaces plus générales*

$$A[s]=\iint_Q H(u, v) du dv.$$

L'exemple donné ci dessus montre que A[s] ne peut pas être considéré comme limite d'une suite quelconque d'aires $A[P_\omega]$ définies comme dans notre théorème de la p. 12. Cependant si s est formé d'un nombre fini de morceaux de surfaces $s_1, \dots, s_p$, appartenant à la famille f, $A[s]$ sera encore la limite de *certaines* suites d'aires $A[P_\omega]$, à savoir en particulier celles qu'on formera ainsi. On considèrera des polyèdres $P_\omega^{(1)}, \dots, P_\omega^{(p)}$ inscrits respectivement dans $s_1, \dots, s_p$, et dont les angles des faces triangulaires sont $< \omega < \pi$. On aura d'ailleurs soin de s'arranger pour que si les contours de Q_m et Q_n ont une partie commune Γ, tout sommet de l'un des triangles en lesquels Q_m est divisé et qui appartient à Γ soit aussi sommet de l'un des triangles en lesquels Q_n est divisé et inversement. Alors l'ensemble des $P_\omega^{(1)}, \dots, P_\omega^{(p)}$ sera un polyèdre P_ω inscrit dans s et dont les angles sont $< \omega$. Quand $\Delta[P_\omega]$ tend vers zéro, il en sera de même de $\Delta[P_\omega^{(1)}], \dots, \Delta[P_\omega^{(p)}]$ et par suite $A[P_\omega]$ tendra vers $A[s]$.

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE

M. FRÉCHET:

[1]. *Sur la distance de deux surfaces.* Ann. Soc. Polonaise de math., t. 3, 1924, pp. 4-19.

[2]. *Sur l'aire des surfaces polyèdrales.* Ann. Soc. Polonaise de math., t. 3, 1925, pp. 1-4.

[3]. *Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes.* Fund. Math., t. VII, 1925, pp. 210-224.

S. KEMPISTY:

[1]. *Sur la méthode triangulaire du calcul de l'aire d'une surface courbe.* Bull. Soc. Math. France, t. 64, 1936, 14 pages.

G. PEANO:

[1]. *Sulla definizione dell'area di una superficie curva.* (Atti Accad. Lincei, (4), 6_{I}, 1890, pp. 54-57). La note de la page 55 renvoie à la leçon du 22 Mai 1882, p. 143 de ses leçons (lithographiées) à l'Université de Turin.

RADEMACHER:

[1]. *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit.* II, (Math. Ann., 81, 1920, pp. 54-57).

T. RADO:

[1]. *O polu powierzchni krzywych,* (en polonais). Mathesis polska, t. VII, 1932, pp. 1-18.

L. SCHEEFFER:

[1]. *Allgemeine Untersuchungen ueber die Rectification der Curven.* Acta Math., V, 1884-85, p. 49.

H. SCHWARZ:

[1]. *Sur une définition erronnée de l'aire d'une surface courbe.* (Gesamm. math. Abhandlungen, pp. 309-311).

W. H. YOUNG:

[1]. *On the triangulation method of defining the area of a surface.* Proc. London Math. Soc., vol. 19, 1919, pp. 117-152.