ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JOSEPH MARCINKIEWICZ

Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 239-240
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_239_0>

SUR UNE NOUVELLE CONDITION POUR LA CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT DES SÉRIES DE FOURIER

par JOSEPH MARCINKIEWICZ (Wilno).

Soit $f(x)$ une fonction de période 2π. Nous dirons qu'elle vérifie la condition I_p $(1 \leqslant p)$ si l'on a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^p}{t}\, dxdt < \infty.$$

Le but de la Note présente est de démontrer le

THÉORÈME. - *Si la fonction $f(x)$ vérifie la condition I_p $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, sa série de Fourier converge presque partout.*

Remarquons d'abord que ce théorème est partiellement connu, à savoir pour $p=1$ ([1]) et $p=2$ ([2]). Nous pouvons donc supposer $1<p<2$.

Il est evident que si la fonction f vérifie la condition I_p ses parties positive et négative satisfont aussi à la même condition. On peut donc admettre $f \geqslant 0$. Désignons par A_n, B_n et C_n les ensembles où

$$f(x) \leqslant n, \qquad n < f(x) \leqslant n+1, \qquad f(x) > n+1,$$

et par C_x l'ensemble de points t tels que $x+t \varepsilon C_n$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.

Supposons $|A_n|>0$ et posons $f_1=f(x)$ si $x \varepsilon A_n+B_n$ et $f_1(x)=n+1$ dans le cas contraire et soit $f_2=f-f_1$.

La condition I_p étant verifiée, on a presque partout

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^p}{|t|}\, dt < \infty.$$

Donc à plus forte raison cette inégalité est vraie presque partout dans A_n, ce qui entraîne presque partout dans A_n

$$\int_{C_x} \frac{|f(x+t)-f(x)|^p}{|t|}\, dt < \infty.$$

Si $x \varepsilon A_n$ et $t \varepsilon C_x$ on a $|f(x+t)-f(x)| \geqslant 1$ donc aussi presque partout dans A_n

$$\int_{C_x} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|}\, dt < \infty.$$

([1]) Ceci est une conséquence immediate du fait que la condition I_1 entraîne d'après le théorème de FUBINI la condition de DINI presque partout.

([2]) KOLMOGOROFF et SELIVERSTOFF, Atti dei Lincei, 3 (1926), pp. 307-310, PLESSNER, Jurnal für Math. 155 (1925), pp. 15-25.

D'autre part il est evident que

$$|f(x+t)-f(x)| \geqslant |f_2(x+t)-f_2(x)|$$

ce qui entraîne d'après la dernière formule

$$\int_{C_x} \frac{|f_2(x+t)-f_2(x)|}{|t|}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_2(x+t)|}{|t|}\,dt < \infty.$$

Il en résulte d'après une condition classique que la série de FOURIER de la fonction $f_2(x)$ converge presque partout dans A_n.

D'après la formule evidente

$$|f_1(x+t)-f_1(x)| \leqslant |f(x+t)-f(x)|$$

on conclut que la fonction f_1 vérifie la condition I_p, mais comme elle est bornée, elle vérifie aussi la condition I_2. Il en résulte d'après un théorème connu la convergence presque partout de la série de FOURIER de la fonction f_1. Par conséquent la série de FOURIER de la fonction f converge presque partout dans l'ensembe A_n. En y posant $n=\infty$ on obtient le résultat en question.

ERRATA. - M. A. ZYGMUND a eu l'amabilité de vouloir bien attirer [3] mon attention sur une faute grossière que j'ai commis dans ma note [4]. A savoir l'inégalité (4.10) est mal citée, et elle doit être remplacée par l'inégalité [5]

$$\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{*\varepsilon}(x, y)\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant A_\varepsilon \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| \lg\,(1+f^2)\,dx\,dy + B_\varepsilon, \qquad (\varepsilon<1).$$

De même l'inégalité (4.11) doit être remplacée par

$$\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_*^\varepsilon(x, y)\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant A_\varepsilon \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| \lg\,(1+f^2)\,dx\,dy + B_\varepsilon, \qquad (\varepsilon<1)$$

ce qui donne au lieu de l'inégalité (2.9) l'inégalité plus faible

$$\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U^\varepsilon\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant A_\varepsilon \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| \lg\,\{1+f^2\}\,dx\,dy + B_\varepsilon, \qquad (\varepsilon<1).$$

La démonstration reste la même pourvu que l'on applique aux lieu des formules (4.10) et (4.11) les formules correctes.

---

(3) Dans une lettre de 15-5-39.

(4) J. MARCINKIEWICZ: *Sur une méthode remarquable de sommation des séries doubles de Fourier*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 8 (1939), pp. 149-160.

(5) Voir JESSEN, MARCINKIEWICZ et ZYGMUND: *Note on the differentiability of multiple integrals*. Fund. Math. 25 (1935), pp. 218-234, spec. p. 223.