ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Su l'indice di Kronecker pei cicli analitici sulle riemanniane delle curve algebriche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 181-194
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_181_0>

SU L'INDICE DI KRONECKER PEI CICLI ANALITICI SULLE RIEMANNIANE DELLE CURVE ALGEBRICHE

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa).

SUNTO. - Valendosi di alcune proprietà, qui dimostrate, dell'indice di KRONECKER per le coppie di cicli analitici sulla riemanniana di una curva algebrica, l'A. interpreta e ritrova le condizioni d'identità birazionale di due curve (TORELLI) costruendo anche la trasformazione che porta una riemanniana su l'altra. Completa poi quelle condizioni con l'aggiunta di osservazioni nuove concernenti le classi di corrispondenze che posson contenere quelle trasformazioni.

In queste brevi pagine presento alcune semplici proprietà dell' indice di KRONECKER pei cicli analitici tracciati sulla riemanniana di una curva algebrica.

La prima è analoga ad una, stabilita dal LEFSCHETZ (1), che riveste un ruolo di fondamentale importanza per la geometria sulle varietà algebriche. Quella che osservo è di natura affatto elementare e si dimostra molto semplicemente. Essa, da sola, non è però sufficiente per le applicazioni alla teoria delle corrispondenze algebriche che avevo di mira.

Benvero, l'analysis situs era già stata sperimentata in quest'argomento, e con molto successo, dal LEFSCHETZ (2). Però, sta di fatto ch'io qui mi pongo da un punto di vista più elementare e non mi valgo della superficie delle coppie di punti (introdotta dal SEVERI) la quale aveva fornito al LEFSCHETZ un così potente istrumento per le sue ricerche. Tanto perchè, per la via seguita da lui, forse non sarebbe stato agevole conseguire le condizioni d'identità birazionale di

(1) L'*Analysis situs et la géometrie Algébrique.* [Paris, GAUTHIER-VILLARS (1924)], Ch. II, § 1, n.° 6, pag. 19. Vedi anche, dello stesso A., *Topology.* [New-Jork, Am. Math. Soc. Collequium Publ. (1930)], Chap. VIII, § 8, n.° 23, pag. 384. Ed anche SEVERI F.: *Conferenze di geometria algebrica.* [Roma (1927-1930)], XXXII, n.° 130, pag. 327.

(2) *Correspondences between algebraic curves.* [Annals of Math. (2), t. 28 (1927), pp. 342-354]. Per una visione sintetica, più elevata e più moderna, degl'indirizzi fondamentali il lettore può confrontare utilmente A. COMESSATTI: *Intorno ad un nuovo carattere delle matrici di Riemann.* [Mem. Acc. d'Italia, vol. VII (1936-XIV), pp. 81-129], § 5.

due curve, note dalla geometria algebrica (TORELLI, COMESSATTI [3])) che mi proponevo di raggiungere ed illustrare alla luce dei fecondi concetti topologico-trascendenti dai quali deriva la presente ricerca.

La dimostrazione ed illustrazione che qui presento fornisce senz'altro alcune osservazioni, che non mi consta siano già state registrate esplicitamente da altri, quali le seguenti:

a) affinchè due curve C e D sian birazionalmente identiche occorre e basta che esista una classe di corrispondenze algebriche che porti un sistema di retrosezioni sulla riemanniana dell'una in un analogo sistema sulla riemanniana dell'altra [4];

b) se una classe di corrispondenze soddisfa alla condizione precedente, vi soddisfa anche la classe opposta [5]. E se esistono classi di corrispondenze deducibili dalla prima cambiando segno a una o più coppie di righe della matrice degl'interi caratteristici, queste soddisfano anch'esse alla condizione *a*);

c) una sola di dette classi contiene la trasformazione birazionale che porta C in D, a meno che una di queste curve (quindi anche l'altra) non possegga qualche γ_2' algebrica di un certo tipo, nel qual caso esistono due (o più) trasformazioni birazionali portanti C in D ed appartenenti ad altrettante delle classi ora dette [6].

Deve però rilevarsi che, acquisito il teorema di TORELLI, queste osservazioni potevan farsi con altrettanta immediatezza, anche per la sola via trascendente [7]. Questa, però, non avrebbe permesso, in modo altrettanto limpido come qui si vede, di cogliere il profondo significato funzionale di dette osservazioni.

Comunque, l'interesse di questa Nota risiede essenzialmente nei lemmi del § 1 e nel breve ragionamento del n.° 8 che fa rapidamente conseguire il teorema di

---

[3] Dette condizioni furon trovate [TORELLI R.: *Sulle varietà di Jacobi.* (Rend. Lincei, 1913). Nota I e COMESSATTI A.: *Sulle trasformazioni hermitiane delle varietà di Jacobi.* (Atti, Torino, 1913-15)] senza far uso della superficie delle coppie di punti, dai due sopra nominati valorosi allievi del SEVERI, il quale si era egli stesso occupato della questione (vedi la nota [1] a pie' di pag. 99 della cit. Nota del TORELLI e l'aggiunta inserita in fondo alla cit. Nota del COMESSATTI) raggiungendo un'interessante proposizione sulle curve ammettenti una stessa varietà di JACOBI. La superficie delle coppie ordinate di punti di una curva algebrica fu presentata dal SEVERI, (vedi la Memoria fondamentale dell'Accad. di Torino del 1903) appunto nella nuova teoria delle corrispondenze che ivi Egli istituiva.

[4] Questa prima osservazione è la immediata traduzione topologica del teorema di TORELLI affermante la necessità e sufficienza della comunanza, per le due curve, di una tabella di periodi normali.

[5] Il che era noto, da TORELLI, ed è ovvio.

[6] Se quella γ_2' è una g_2', quindi le due curve sono iperellittiche, vi son trasformazioni appartenenti a classi opposte, com'era noto dai due AA. sopra citati.

[7] Avrei potuto inserirle (e la prima lo è già) nella mia Mem. dal titolo: *Sulle condizioni d'identità birazionale di due curve,* in corso di stampa nei Rend. del Sem. di Roma. Non l'ho fatto perchè questa aveva scopo prevalentemente espositivo di risultati noti.

TORELLI, assegnando anche, per virtù di quei lemmi, la effettiva costruzione topologica delle trasformazioni birazionali che portano C in D.

Credo che ciò basti a giustificar la pubblicazione di queste pagine, alle quali mi propongo dar presto seguito per presentare altri più significativi risultati, che si conseguono restando nello stesso ordine di idee.

§ 1. - Lemmi preliminari.

1\. - Sia C una curva algebrica irriducibile di genere $p>0$, R la sua riemanniana, (bilatera ed) orientata, σ e τ due cicli orientati su R, $[\sigma\cdot\tau]$ il loro indice di KRONECKER (8).

Quest'indice è zero se uno (almeno) dei due cicli è omologo a zero; cambia segno con lo scambiarsi dei due cicli, col mutar verso ad uno solo di essi, oppure col mutare della faccia positiva su R; resta invariato quando i due si aumentano di cicli omologhi a zero. Ciò implica che l'indice $[\sigma\cdot\tau]$ gode della proprietà distributiva rispetto a entrambi i cicli.

Ricordate queste nozioni, è facile provare che:

LEMMA I. - *Sostituendo σ e τ con due cicli opportuni ad essi omologhi, si può ottenere che il numero effettivo delle loro intersezioni sia eguale al valore assoluto di $[\sigma\cdot\tau]$ e quindi che queste intersezioni abbian tutte il segno dell'indice.*

In altri termini, se la tesi del lemma non è già verificata, è sempre possibile aggiungere a σ e τ degli opportuni cicli omologhi a zero, per modo che le intersezioni lasciate siano tutte dello stesso segno.

È chiaro che ogni volta che a σ e τ si aggiungono cicli omologhi a zero σ_1, τ_1 in modo da diminuire il numero delle intersezioni effettive, si sopprimono tante intersezioni positive quanto negative. Se A^+B^- è una di queste coppie, dal ciclo σ (o da quello τ) si asporta uno dei 2 archi di estremi A e B, sostituendolo con un altro che non taglia più il ciclo τ (o il ciclo σ) se non nelle eventuali intersezioni

(8) Accenniamo qui, per comodità del lettore, al modo come può istituirsi questa nozione [cfr. LEFSCHETZ loco cit. (2)]. In ogni intorno su R si fissi un sistema locale di coordinate curvilinee ξ, η e siano $\sigma(\xi,\eta)=0$, $\tau(\xi,\eta)=0$ le equazioni, analitiche, dei cicli σ, τ, ed A un punto comune ad essi, sempre in detto intorno. Questo punto sarà considerato come un'intersezione positiva o negativa dei due cicli, presi nell'ordine σ, τ, secondo che il jacobiano $\dfrac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(\xi,\eta)}$, calcolato in A, sia positivo o negativo. Se questo jacobiano fosse zero, si deformerà convenientemente almeno uno dei cicli, lasciando fermo A. Per indice di KRONECKER $[\sigma,\tau]$ s'intende la differenza fra il numero delle intersezioni positive e quello delle intersezioni negative

Occorre ancora aggiungere opportune convenzioni per l'orientamento di R e dei cicli. Il primo si fa ordinando la coppia ξ, η; il secondo al modo solito, o altrimenti, ad esempio con la convenzione fatta dal LEFSCHETZ al n.° 3 della Nota cit. (2).

con σ (con τ) dell'arco soppresso *comprese* tra A e B. L'arco che sostituisce quello asportato farà parte del ciclo omologo a zero che si aggiunge a σ (o a τ).

E se A^+B^- è una coppia di intersezioni che in uno dei due versi di σ è di punti consecutivi su esso, un ciclo σ_1 omologo a zero che aggiunto a σ sopprime questa coppia possiederà, invertito di senso, l'arco AB di σ che non contiene altre intersezioni con τ. D'altra parte, se con l'aggiunta a σ di detto ciclo si sopprime, oltre alla coppia A^+B^-, anche qualche altra coppia d'intersezioni, si potrà sempre spezzar il ciclo σ_1 che si aggiunge in due parti entrambe omologhe a zero, una delle quali passi per le sole intersezioni A e B e contenga l'arco AB di σ che non ha altre intersezioni con τ. Questa parte, aggiunta a σ, sopprime la sola coppia A^+B^-.

Dopo di che è ovvio in che modo, operando (se si vuole) su uno solo dei due cicli, possano sopprimersi successivamente una o più coppie di intersezioni con l'altro ciclo, *quelle di ogni coppia essendo consecutive su esso*, sino a ridursi ad intersezioni tutte dello stesso segno.

2. - DEFINIZIONE. — Si abbia $[\sigma \cdot \tau] = +1$ e sia $2k+1$, k intero $\geqq 0$, il numero effettivo delle intersezioni di σ e τ, G il loro gruppo. Supponiamo $k > 0$ e consideriamo i $2k+1$ punti di G (a cominciar da uno qualunque) nell'ordine in cui si succedono nel verso di σ: l'ultimo avrà come successivo il primo. Ciò fatto, diremo che G è stato *ordinato a catena* su σ, o che G ha dato luogo a una *catena* su σ.

Appena $k \geqq 1$, vi saranno, in G, una o più coppie consecutive di punti di cui il primo è un'intersezione positiva, il secondo un'intersezione negativa. Sopprimendo tutte le coppie di questo tipo, si otterrà un gruppo G' di $2k'+1$ punti, $k' < k$, ancora ordinato a catena su σ. Procedendo allo stesso modo su G', cioè sopprimendo tutte le coppie di punti consecutivi per le quali il primo è positivo ed il secondo negativo, si otterrà un gruppo G'', sempre già ordinato a catena, con $2k''+1$, $k'' < k' < k$ punti. Così potrà continuarsi e si finirà con l'ottenere che in G resti un sol punto, il quale si dirà **origine** della catena G su σ. Se G consta di un sol punto (cioè se $k=0$) per origine si assumerà quest'unico punto.

Dal modo come è stata trovata è evidente che:

LEMMA II. - *L'origine A_0 della catena G su σ è unica e determinabile con un numero finito di operazioni ben definite. Se G consta di almeno tre punti, quello che segue immediatamente A_0 è ancora positivo, mentre quello che precede A_0 (cioè l'ultimo di G) è negativo. Inoltre, le catene che si ottengono da G sopprimendo una o più coppie di punti consecutivi A^+B^- hanno ancora per origine A_0.*

Si ha però che:

LEMMA III. - *L'origine di una catena G sul ciclo σ dipende dal verso di σ.*

Infatti, se nell'uno dei due versi di σ son consecutivi i due punti A^+ e B^-, nel verso opposto son consecutivi gli altri due B^- ed A^+. Però, mentre nel primo caso la coppia A^+B^- può sopprimersi perchè precede l'intersezione positiva, nel secondo non può sopprimersi, perchè il punto che precede è negativo. E poichè l'origine A_0, se non è l'unica intersezione di σ e τ, è preceduta da un'intersezione negativa, il cambiamento di verso su σ fa certamente sparire A_0.

Per esempio, se la catena G su σ è costituita dai 5 punti

$$A^+B^+C^-D^-E^+,$$

si ha come origine E. Cambiando il verso, la catena diventa

$$E^+D^-C^-B^+A^+,$$

e l'origine risulta B.

OSSERVAZIONE I. - Considerando la coppia σ, τ nell'ordine τ, σ si ha $[\tau \cdot \sigma] = -[\sigma \cdot \tau]$ perchè tutte le intersezioni cambiano di segno: in tal caso l'origine su σ cambia, a meno che G consti di un sol punto.

OSSERVAZIONE II. - Può anche accader che l'origine resti immutata col cambiar del verso o del ciclo. Questo caso si presenta quando G consti di un sol punto.

LEMMA IV. - *Se* $[\sigma \cdot \tau] = +1$ *e se* A *è l'origine su* σ *(o su* τ*) della catena* G *delle intersezioni di* σ *con* τ, *il ciclo* σ *(*τ*) può sostituirsi con un altro ad esso omologo intersecante* τ *(*σ*) soltanto in* A.

Dopo il lemma I e la definizione di catena e di origine, la proprietà espressa da questo lemma è evidente.

3. - Se $[\sigma \cdot \tau] = \pm i$, con i positivo qualunque, lo stesso procedimento del numero precedente ci fa determinare i intersezioni di σ con τ, tutte del segno dell'indice, costituenti le sole intersezioni di due cicli σ' e τ' omologhi a σ e τ. Il gruppo di queste i intersezioni può dirsi *gruppo origine* della catena G su σ (o su τ) e gode proprietà del tutto analoghe all'unico punto origine del caso $i = 1$.

Vi è solo da aggiungere che:

LEMMA V. - *Nel verso della catena* G, *fra due elementi del gruppo origine non capita alcuna intersezione di* σ *con* τ, *oppure ne capitano tante positive quante negative: la prima di queste è positiva, l'ultima negativa.*

Perchè, se fra quei 2 punti vi è un'intersezione positiva (negativa) essa non può eliminarsi se non è seguita (preceduta) da una negativa (positiva) anch'essa compresa fra quei due punti.

§ 2. - Le condizioni di identità birazionale di C e D.

4. - Sulla riemanniana orientata R di C sia

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p})$$

il $2p$-complesso orizzontale *simbolico* di $2p$ cicli costituenti su R un *sistema* *di retrosezioni*, mercè gli accoppiamenti γ_r, γ_{p+r} $(r=1, 2,...., p)$. Allora i cicli γ_r sono ordinati ed orientati (9) (rispetto alla faccia positiva di R) in modo che gl'indici delle coppie γ_r, γ_s assumano i valori

$$[\gamma_r \cdot \gamma_s] = \begin{cases} +1, \text{ per } s=p+r \\ -1, \text{ per } r=p+s \\ 0, \text{ in ogni altro caso (10).} \end{cases}$$

Perciò, ponendo

$$[\gamma_{-1} \cdot \gamma] = \| [\gamma_r \cdot \gamma_s] \|,$$

si ha

(1) $$[\gamma_{-1} \cdot \gamma] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right) = I_0,$$

ove I è la matrice identica di ordine p.

5. - Siano σ e τ due cicli orientati di R. Essi sono omologhi a due combinazioni lineari di cicli γ_r, cioè esistono due $2p$-complessi orizzontali d'interi relativi

$$a = (a_1,...., a_{2p}), \qquad b = (b_1,...., b_{2p})$$

pei quali si ha:

$$\sigma \backsim a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + ... + a_{2p}\gamma_{2p} = a \cdot \gamma_{-1},$$
$$\tau \backsim b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + ... + b_{2p}\gamma_{2p} = b \cdot \gamma_{-1}.$$

Per la proprietà distributiva degl'indici di KRONECKER, risulta (11):

(2) $$[\sigma \cdot \tau] = a[\gamma_{-1} \cdot \gamma] b_{-1} = a I_0 b_{-1}.$$

6. - Ciò posto, sia D un'altra curva algebrica irriducibile, dello stesso genere p, R' la sua riemanniana,

$$\delta = (\delta_1, \delta_2,...., \delta_{2p})$$

(9) Cfr. LEFSCHETZ S. Nota cit. (2), n. 4, VI, pag. 344.

(10) Ciò assicura che i cicli γ_r non sono né omologhi a zero né divisori dello zero. Altrimenti, da

$$n \cdot \gamma \backsim 0$$

con n intero, seguirebbe, qualunque sia σ:

$$[n\gamma \cdot \sigma] = n[\gamma \cdot \sigma] = 0.$$

(11) Poichè il secondo membro di questa relazione è un numero, ossia una matrice a una riga e una colonna, esso si comporta come una matrice simmetrica, cioè coincide con la sua trasposta

$$(aI_0b_{-1})_{-1} = b(I_0)_{-1}a_{-1}$$

e poichè I_0 è alternata, cioè $(I_0)_{-1} = -I_0$, risulta

(2)$_1$ $$[\sigma \cdot \tau] = -bI_0a_{-1},$$

dalla qual relazione segue, come dev'essere,

(3) $$[\tau \cdot \sigma] = bI_0a_{-1} = -[\sigma \cdot \tau].$$

il $2p$-complesso orizzontale simbolico di $2p$ cicli costituenti su R' un sistema di retrosezioni, cioè così ordinabili ed orientabili, rispetto ad R', da avere

$$(1') \qquad [\delta_{-1} \cdot \delta] = \| [\delta_r \cdot \delta_s] \| = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right) = I_0 .$$

Diciamo ω, Ω le due matrici di Riemann dei periodi di p integrali linearmente indipendenti di C e di D, calcolati sulle retrosezioni γ, δ, rispettivamente, e consideriamo una corrispondenza algebrica $\mathfrak{T}$, che lega C a D. Questa darà luogo a una matrice intera T, di ordine $2p$, soddisfacente a una relazione del tipo

$$(4) \qquad \pi\omega = \Omega T_{-1},$$

ove π è un'opportuna matrice di ordine p, individuata da $\mathfrak{T}$.

Per effetto di questa, i cicli γ_r di R vengon trasformati, su R', in altrettanti cicli γ_r', $r = 1, 2, \dots, 2p$, che, com'è noto, son omologhi a combinazioni lineari dei cicli δ i cui coefficienti son dati dalle righe di T. Cioè, si hanno le omologie riassunte nella relazione

$$(5) \qquad \gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', \dots, \gamma'_{2p}) \backsim \delta \cdot T_{-1}.$$

Segue che i cicli σ e τ di R son trasformati da $\mathfrak{T}$ nei cicli σ' e τ' soddisfacenti alle omologie

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma' \backsim a \cdot \gamma'_{-1} \backsim aT \cdot \delta_{-1}, \\ \tau' \backsim b \cdot \gamma'_{-1} \backsim bT \cdot \delta_{-1}. \end{cases}$$

Scambiando $\mathfrak{T}$ con una corrispondenza della propria classe $(\mathfrak{T})$, la matrice T resta invariata ed i cicli σ e τ vengon trasformati in altri due, σ'' e τ'', omologhi a σ' e τ', quindi pur essi omologhi ai secondi membri delle omologie ora scritte.

È facile riconoscere che:

a) se $\mathfrak{T}$ è non speciale, quindi T non degenere, due cicli come σ e σ' corrispondentisi in $\mathfrak{T}$ sono entrambi omologhi a zero o entrambi non omologhi a zero.

Perchè, se $\sigma \backsim 0$, è necessariamente $a = 0$, quindi $aT = 0$ e $\sigma' \backsim 0$. Viceversa, se $\sigma' \backsim 0$, è necessariamente $aT = 0$, ma T è non degenere, dunque è $a = 0$, quindi $\sigma \backsim 0$.

Dal ragionamento ora fatto segue anche che:

b) la nullità di T dà il numero dei cicli linearmente indipendenti di R cui corrispondono, su R', cicli omologhi a zero.

La proprietà *a)* si generalizza nella seguente:

c) sempre per T non degenere, a cicli linearmente dipendenti o indipendenti su R corrispondono cicli linearmente dipendenti o indipendenti su R'.

Rileviamo infine che se a qualcuno dei cicli γ_s di R corrispondesse su R' un ciclo γ_s' omologo a zero, la riga s^{ma} di T sarebbe nulla. A questo proposito è bene tener presente che:

d) se le prime o le ultime p righe di T son nulle, lo sono anche tutte le altre.

Perchè in tal caso, come discende subito dalla (4), si ha $\pi=0$, quindi anche $T=0$ ([12]).

Osservazioni del tutto analoghe possono farsi considerando la corrispondenza nel verso $D \rightarrow C$. Ad essa è legata una matrice di interi T^* soddisfacente a una relazione del tipo

$$\pi^* \Omega = \omega T^*_{-1}. \tag{4*}$$

Questa T^* si ottiene da T mediante la relazione

$$T^* = -I_0 T_{-1} I_0$$

ed ha, quindi, la stessa (caratteristica e) nullità di T.

In riferimento alla proprietà b) è utile ricordare che questa comune nullità è (zero o un numero) necessariamente pari ([13]).

7. - L'indice di KRONECKER dei cicli trasformati σ' e τ' risulta, per le (6),

$$[\sigma' \cdot \tau'] = a \cdot T[\delta_{-1} \cdot \delta] T_{-1} \cdot b_{-1} = a \cdot T I_0 T_{-1} \cdot b_{-1}. \tag{2'}$$

Se $\mathfrak{T}$ è birazionale, essa subordina fra R ed R' una trasformazione biunivoca e continua che lascia invariati gli indici di KRONECKER di coppie di cicli corri-

---

([12]) Infatti, posto, come al solito,

$$\omega = (I \mid \tau), \qquad \Omega = (I \mid \sigma), \qquad T = \begin{pmatrix} h_{-1} & g_{-1} \\ H_{-1} & G_{-1} \end{pmatrix}$$

dalla (4) si ha

$$\pi = h + \sigma g; \qquad \pi\tau = H + \sigma G. \tag{a}$$

Inoltre, aggregando alla (4) la relazione stessa valevole per le matrici complesse coniugate $\bar{\pi}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\Omega}$ di π, ω, Ω, si ha

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \bar{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}.$$

([13]) Con l'occasione rileviamo che, sfruttando la simmetricità di σ e τ, dalle (a) della nota ([12]) si eliminano facilmente sia π che τ ottenendo

$$(H + \sigma G)(h_{-1} + g_{-1}\sigma) = (h + \sigma g)(H_{-1} + G_{-1}\sigma),$$

relazione del tutto analoga alle (a) stesse quando vi si elimini la sola π e si ponga $\tau = \sigma$. Invero, essa si scrive

$$(h^* + \sigma g^*)\sigma = H^* + \sigma G^*, \qquad G^* = h^*_{-1},$$

avendo posto

$$T^* T = \begin{pmatrix} h^*_{-1} & g^*_{-1} \\ H^*_{-1} & G^*_{-1} \end{pmatrix},$$

matrice che soddisfa alla relazione:

$$\pi\pi^* \Omega = \Omega (T^* T)_{-1}, \qquad T^* = \begin{pmatrix} G & -g \\ -H & h \end{pmatrix}.$$

spondenti [14] cioè, qualunque siano i cicli σ e τ, quindi i $2p$-interi a e b, si ha sempre

$$a \cdot TI_0T_{-1} \cdot b_{-1} = aI_0b_{-1},$$

pel che, occorre e basta che sia

$$\text{(I)} \qquad TI_0T_{-1} = I_0.$$

Questa è dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathfrak{T}$, o una qualunque corrispondenza di $(\mathfrak{T})$, lasci invariati gli indici di KRONECKER di coppie di cicli corrispondenti.

Orbene, poichè dalla (1′) e dalla (5) si ha che

$$(5') \qquad [\gamma'_{-1} \cdot \gamma'] = TI_0T_{-1},$$

il verificarsi di questa (I) assicura che i cicli γ' danno delle retrosezioni su R', quindi che la $\mathfrak{T}$ porta una matrice di periodi normali (cioè calcolati su retrosezioni) per C in una pure di periodi normali per D. E questa condizione è sufficiente per concludere, a norma del teorema di TORELLI, con l'indentità birazionale di C e D.

Qui appresso faremo vedere •ome, supposta verificata la (I), e senza invocare il teorema ora citato, sia effettivamente possibile costruire una trasformazione algebrica biunivoca che porta C in D.

8. - Supponiamo che T verifichi la (I) e sia M un punto variabile su R. Consideriamo una coppia σ, τ di cicli orientati di R intersecantisi, in quest'ordine, positivamente in M, e privi di ulterioni punti a comune.

Sarà $[\sigma \cdot \tau] = +1$, sicchè, trasformando σ e τ mediante una corrispondenza $\mathfrak{T}$ di matrice T, si ottengon due cicli σ' e τ' pei quali si ha pure

$$[\sigma' \cdot \tau'] = +1.$$

Pel lemma IV, i cicli σ', τ' posson sostituirsi con due cicli ad essi omologhi intersecantisi (positivamente) solo nell'origine M' della catena costituita su σ' dal gruppo G dei punti corrispondenti ad M mediante $\mathfrak{T}$.

Dico che si è così ottenuta una corrispondenza univoca nel verso $R \to R'$.

Basta, a tale scopo, definire senza ambiguità, ma a meno di omologie, il modo di scegliere la coppia di cicli σ, τ passanti per M ed il verso di σ', cioè l'ordinamento della catena G.

Scegliamo come coppia σ, τ quella ottenuta da una, prefissata, delle retrosezioni assegnate su R, ad esempio da γ_1, γ_{p+1}, deformandola con continuità su R sino a far coincidere con M l'intersezione della coppia dei cicli che si deformano: σ sia il deformato di γ_1, τ quello di γ_{p+1}. In tal modo, σ' è determinato a meno di

[14] Si tenga presente che, nel caso in esame, si può supporre $R' = R$ e che l'indice di KRONECKER risulta un invariante topologico.

omologie, insieme a σ, e poichè σ non è omologo a zero nè è un divisore dello zero, non è tale neppur σ', quindi σ' non è omologo ([15]) al suo opposto. La catena G dei corrispondenti di M è dunque perfettamente determinata, così la sua origine M', che sarà il corrispondente di M.

Questa corrispondenza è algebrica. Invero, essa è certo (continua ed) analitica quindi, pensando alle curve C e D, le coordinate del punto M' corrispondente ad M son funzioni analitiche uniformi di quelle di M. E poichè queste coordinate assumono valore infinito soltanto un numero finito di volte, esse son funzioni razionali delle coordinate di M, variabile su C ([16]).

Segue immediatamente che, se $p>1$, la corrispondenza individuata è birazionale, perchè una corrispondenza algebrica fra due curve di egual genere >1, se univoca in un senso, è certamente biunivoca ([17]), quindi C e D son birazionalmente identiche.

9. - La corrispondenza birazionale così costruita trasforma, *a meno di omologie*, la coppia di cicli σ, τ di R, in quella σ', τ' su R', che ha come solo punto d'intersezione M'. Essa perciò opera su σ, τ come una corrispondenza della classe $(\mathfrak{T})$. Si osservi, però, che questa trasformazione birazionale potrebbe invece portare i cicli σ, τ negli opposti di quelli che s'intersecano soltanto in M', operando così come una della classe $(-\mathfrak{T})$. E ciò qualunque sia la retrosezione γ_i, γ_{p+i} da cui si parte, poichè il cambiamento della retrosezione non fa che mutar la coppia di righe di T, o di $-T$, che vien messa in giuoco.

Si conclude che la trasformazione birazionale che si è costruita è contenuta nella classe $(\mathfrak{T})$ od in quella cui appartiene una matrice che si ottien da T scambiando i segni degli elementi di due o più coppie di righe distanti fra loro di p posti.

Queste matrici si scrivono

$$\mathfrak{J}T=T'$$

dove $\mathfrak{J}$ è quella che si ottiene dalla matrice identica di ordine $2p$ cambiando segno a due o più coppie di elementi principali che distano per p termini.

Queste T' soddisfano ancora alla (I), perchè si ha $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_{-1}=\mathfrak{J}^{-1}$ ed

$$\mathfrak{J}I_0\mathfrak{J}=I_0,$$

([15]) Altrimenti sarebbe $2\sigma'\backsim 0$, cioè σ' sarebbe divisore dello zero e si avrebbe $[\sigma'\cdot\tau']=0$, mentre, per ipotesi, è $[\sigma'\cdot\tau']=[\sigma\cdot\tau]=+1$.

([16]) Cfr. CECIONI F.: *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse.* [Annali Università Toscane, vol. XII (1928-VI)], n. 22, nota a pié di pag. 81. Per l'analiticità della corrispondenza, si tenga presente che i cicli σ, τ dai quali si parte, così quelli σ', τ' ai quali si arriva (i primi intersecantisi solo in M, i secondi solo in M') causa l'algebricità di $\mathfrak{T}$, son tutti analitici.

([17]) Osservazione di H. WEBER. Cfr.: F. SEVERI: *Trattato di geometria algebrica* [Bologna, Zanichelli, 1926], vol. I, p. I, n.° 67, oss. Iª, pag. 210.

onde
$$T' I_0 T'_{-1} = \mathfrak{J} \cdot T I_0 T_{-1} \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{J} I_0 \mathfrak{J} = I_0 .$$

Occorre però assicurarsi che questa T' dà luogo effettivamente ad una classe di corrispondenze algebriche fra C e D, cioè che soddisfa ad una relazione come la (4), cui già soddisfa T. Orbene, da questa si ha
$$\pi\omega\mathfrak{J} = \Omega T_{-1}\mathfrak{J} = \Omega T'_{-1},$$
quindi, perchè accada quanto si è detto, occorre e basta che si abbia
$$\omega\mathfrak{J} = \pi'\omega,$$
cioè che $\mathfrak{J}$ dia luogo a una classe di corrispondenze algebriche di C in se stessa. Non è escluso che questo fatto effettivamente si verifichi ([18]) ma, *in generale,* non accade. Fra le possibili T' vi è la $-T$ che dà sempre luogo a una corrispondenza algebrica fra C e D. Perciò, in generale, la trasformazione birazionale considerata esisterà nella classe $(\mathfrak{T})$ o nella $(-\mathfrak{T})$.

10. - Può accadere che una trasformazione birazionale come quella in discorso esista in entrambe queste classi? Se così è, indicando ancora con $\mathfrak{T}$ e con $-\mathfrak{T}$ queste trasformazioni, il prodotto $-\mathfrak{T}.\ \mathfrak{T}^{-1}$ è una trasformazione birazionale della curva C in sé che appartiene alla matrice d'interi caratteristici
$$-T \cdot T^* = -I_{2p},$$
dove I_{2p} è la matrice identica di ordine $2p$ e T^* è la matrice relativa a $\mathfrak{T}^{-1}$, la quale ([19]) soddisfa ancora alla (I). Viceversa, se nella classe delle corrispondenze a valenza 1 individuata su C dalla matrice $-I_{2p}$ esiste una trasformazione birazionale di C in sé, cioè se questa curva è iperellittica (quindi lo è anche D) segue subito che il prodotto di questa per la corrispondenza birazionale esistente in $(\mathfrak{T})$ od $(-\mathfrak{T})$ dà una seconda trasformazione birazionale di C in D, che esisterà in $(-\mathfrak{T})$ od in $(\mathfrak{T})$.

Ciò è d'accordo col fatto che, scambiando T con $-T$, la coppia di cicli σ', τ' trasformata, a meno di omologie, di quella σ, τ passate per M, di cui al numero precedente, muta il solo verso ([20]), quindi, a norma del lemma IV, il punto M' può scambiarsi con un punto M'' distinto da M.

([18]) Posto $\mathfrak{J} = \left(\begin{array}{c|c} I' & 0 \\ \hline 0 & I' \end{array}\right)$, ove I' si ottiene da I cambiando segno a uno o più elementi principali, si constata subito che se $\omega = (I \mid \tau)$, con τ matrice diagonale, si ha
$$I'(I \mid \tau) = (I \mid \tau)\mathfrak{J} = (I' \mid I'\tau); \qquad I'\tau = \tau I'.$$
Resta solo da esaminare quando una tabella come questa appartiene a una curva.

([19]) Si noti che la relazione (I) esprime che $TT^* = T^*T = I_{2p}$.

([20]) Si osservi che qui il verso su σ', τ' è cambiato *prima* che da σ', τ' si deduca la coppia, ad essa omologa, che dà una sola intersezione. In principio di questo numero il cambiamento del verso si suppone operato *dopo*, cioè sulla coppia di cicli che s'intersecano soltanto in M'.

Analogamente, se esistessero due trasformazioni birazionali, una contenuta nella classe individuata da T, l'altra in quella assegnata da $T' = \mathfrak{J}T$, poichè si ha

$$\mathfrak{J}T \cdot T^* = \mathfrak{J},$$

segue che C ammetterebbe una trasformazione birazionale in sè appartenente alla classe della matrice $\mathfrak{J}$. È ovvio il viceversa.

11. - Passiamo ad esaminare che effetto può avere, sul ragionamento del n.° 8, l'operare con una retrosezione diversa da quella γ_1, γ_{p+1} ivi impiegata. Si constaterà un fatto del tutto analogo a quello discusso nel numero precedente, che qui presentiamo in forma alquanto diversa.

Operiamo, ad esempio, con la seconda retrosezione, γ_2, γ_{p+2}. Lo scambio di queste due retrosezioni provoca, sulla matrice ω dei periodi di C, lo scambio delle prime due colonne e di quelle di posto $p+1$ e $p+2$. Cioè, la ω diventa

$$(7) \qquad \omega' = \omega\mathfrak{J}, \qquad \mathfrak{J} = \left(\begin{array}{c|c} I_{(1,2)} & 0 \\ \hline 0 & I_{(1,2)} \end{array}\right)$$

dove con $I_{(1,2)}$ si indica la matrice ottenuta da quella identica di ordine p con lo scambio delle prime due righe (o colonne).

Questa nuova $\mathfrak{J}$ soddisfa ancora alle condizioni

$$(8) \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{-1} = \mathfrak{J}^{-1}, \qquad \mathfrak{J}I_0\mathfrak{J} = I_0.$$

L'ultima di queste relazioni dice, com'è ovvio a priori, che indicando con

$$\gamma^* = \gamma\mathfrak{J}$$

il $2p$-complesso simbolico di cicli ottenuto da γ con lo scambio della retrosezione γ_1, γ_{p+1} con quella γ_2, γ_{p+2}, si ha ancora

$$\| [\gamma_r^* \cdot \gamma_s^*] \| = I_0.$$

La matrice ω' è quella dei periodi (normali) sulle nuove retrosezioni γ^*, quindi è

$$\omega' I_0 \omega'_{-1} = 0$$

e la corrispondenza $\mathfrak{T}$ fra C e D dà luogo alle relazioni

$$(4') \qquad \pi\omega' = \Omega T'_{-1}, \qquad T' = \mathfrak{J}T$$

che seguono dalla (4) e dalla (7). Per l'ultima delle (8), si ha pure che la (I) si trasforma nella

$$(\mathrm{I}') \qquad T' \cdot I_0 \cdot T'_{-1} = I_0,$$

e ne conserva il significato.

Tuttavia, non può senz'altro affermarsi che T' competa ancora alla stessa classe $(\mathfrak{T})$ di corrispondenze da cui siam partiti. Invero, non può escludersi che, in casi particolari, la matrice $\mathfrak{J}I_0$ dia una forma riemanniana (alternata) di ω, cioè che si abbia

$$\omega\mathfrak{J}I_0\omega_{-1}=\omega' I_0\omega_{-1}=0.$$

In tal caso $\mathfrak{J}$ darebbe luogo a una classe di corrispondenze algebriche su C e la (7) si scriverebbe ([21])

$$\omega'=\pi\omega=\omega\mathfrak{J}. \tag{7'}$$

Causa l'ultima delle (8), in questa classe, o nella sua opposta, esisterebbe una corrispondenza biunivoca ([22]) e si avrebbe che T'(o $-T'$) appartiene al prodotto della trasformazione birazionale esistente in $(\mathfrak{T})$ o in $(-\mathfrak{T})$ per quella esistente nella classe ora detta.

Allora T' non apparterrebbe alle trasformazioni della classe $(\mathfrak{T})$, né $-T'$ a quelle di $(-\mathfrak{T})$, ma ad un'altra classe di corrispondenze fra C e D. Cioè, il cambiamento della retrosezione sulla quale si opera provocherebbe lo scambio delle due trasformazioni birazionali ora dette e da uno stesso punto M di R si perverrebbe a due punti distinti, M' ed M'', di R' corrispondenti di M in quelle due trasformazioni.

Dunque, non è possibile affermare senz'altro che, dopo lo scambio delle due retrosezioni, da uno stesso punto M di C si perviene ad uno stesso punto M' di D. Tale affermazione è possibile solo quando si sappia che lo scambio delle retrosezioni non induce, su C, alcuna trasformazione birazionale della curva C in sé.

12. - Chiudiamo osservando che il ragionamento del n.° 8 consiste nell'operare un cambiamento continuo di retrosezioni su R, in modo che i cicli γ_1, γ_{p+1} s'incrocino in un punto M variabile (mentre i rimanenti cicli restano fermi). Corrispondentemente la matrice ω dei periodi degli integrali u si muta in una del tipo

$$\omega'=\omega H_{-1},$$

([21]) La relazione

$$I_{(1,2)}(I\,|\,\tau)=(I\,|\,\tau)\mathfrak{J}, \qquad \omega=(I\,|\,\tau), \qquad I_{(1,2)}\tau=\tau I_{(1,2)},$$

è verificata non appena τ sia una matrice diagonale. Occorre solo assicurarsi quand'è che una tal ω appartiene a una curva.

([22]) Non è neppure escluso che questa corrispondenza, invece di presentarsi nella classe individuata da $\mathfrak{J}$ o da $-\mathfrak{J}$, si presenti in quella cui appartiene la matrice dedotta da $\mathfrak{J}$ cambiando segno a due o più coppie di elementi principali distanti per p posti. Per semplicità di discorso, consideriamo soltanto le classi assegnate da $\mathfrak{J}$, o da T, e dalle opposte, cioè il caso generale.

con H unimodulare e soddisfacente alla relazione

$$HI_0H_{-1}=I_0 \tag{9}$$

esprimente che i nuovi cicli $\gamma^*=\gamma H_{-1}$, accoppiati come i γ, danno ancora un sistema di retrosezioni su R.

Di conseguenza, la (4) diventa

$$\pi\omega'=\Omega T'_{-1}, \tag{4'}$$

ove $T'=HT$ soddisfa sempre, a causa della (9), alla relazione

$$T'I_0T'_{-1}=I_0.$$