ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CHRISTIAN PAUC

L'intégrale de Weierstrass-Bouligand-Menger. Ses applications au calcul des variations

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 1 (1939), p. 51-68
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_51_0>

L'INTÉGRALE DE WEIERSTRASS-BOULIGAND-MENGER SES APPLICATIONS AU CALCUL DES VARIATIONS (¹)

par CHRISTIAN PAUC (Roma).

Espaces à écarts réels.

Nous appelons avec M. MENGER (²) *espace à écarts réels* un ensemble H tel qu'à deux quelconques de ses points p et q ait été attribué un nombre positif, négatif ou nul $\delta(pq)$ dit leur écart, assujetti à l'unique condition

$$(p=q) \rightarrow (\delta(pq)=0).$$

Par longueur d'un polygone $P:(p_1,\dots,p_m)$ de H, nous entendons le nombre $\lambda(P)=\underset{i=1,\dots,m-1}{\text{somme}}\ \delta(p_i p_{i+1})$ si $m>1$, o si $m=1$.

Pour une courbe $\mathcal{C}$ de H nous définissons la longueur supérieure $\overline{\lambda}(\mathcal{C})$ et la longueur inférieure $\underline{\lambda}(\mathcal{C})$ comme la borne supérieure et la borne inférieure, respectivement, des nombres λ jouissant de la propriété suivante:

pour chacun d'eux, il existe une suite distinguée $P_1, P_2,\dots, P_n,\dots$ de sous-polygones de $\mathcal{C}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(P_n)=\lambda \quad (^3).$$

En vertu des définitions de l'égalité (⁴) pour les polygones et les courbes

$$(P_1=P_2)\rightarrow(\lambda(P_1)=\lambda(P_2)) \qquad (\mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2)\rightarrow((\overline{\lambda}(\mathcal{C}_1)=\overline{\lambda}(\mathcal{C}_2))\ \&\ (\underline{\lambda}(\mathcal{C}_1)=\underline{\lambda}(\mathcal{C}_2)))$$

Une courbe $\mathcal{C}$ est dite rectifiable au sens large lorsque $\overline{\lambda}(\mathcal{C})=\underline{\lambda}(\mathcal{C})$; la valeur

---

(¹) Les fondements géométriques de ce travail se trouvent dans une note aux Rend. della R. Acc. dei Lincei, XXVII, 1938, pp. 166-172; nous utilisons les notations et définitions qui y furent introduites.

(²) Pour cette définitions et les suivantes: Menger, Erg. eines math. Koll., 8, 1935-1936, pp. 6-8.

(³) L'ensemble des λ est fermé, aussi existe-t-il une suite distinguée maximante de sous-polygones de $\mathcal{C}$ $P_1'',\dots, P_n'',\dots$ et une suite distinguée minimante $P_1',\dots, P_n',\dots$ c'est-à-dire telles que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(P_n'')=\overline{\lambda}(\mathcal{C}), \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda(P_n')=\underline{\lambda}(\mathcal{C}).$$

(⁴) C'est ici qu'apparait l'opportunité (Zweckmässigkeit) de ces définitions.

commune $\lambda(\mathcal{C})$ est la longueur de $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ est dite rectifiable sans plus lorsque $\lambda(\mathcal{C})$ est finie.

Propriétés de la fonctionnelle λ. - λ jouit de la propriété d'additivité suivante vis-à-vis des polygones: $P_1, P_2, \ldots, P_{m'}$, désignant une suite finie de polygones adjacents c'est-à-dire tels que

$$\text{extrémité de } P_j = \text{origine de } P_{j+1} \text{ pour } j=1,\ldots, m'-1$$

alors:

$$\lambda(P_1+\ldots+P_{m'}) = \lambda(P_1)+\ldots+\lambda(P_{m'}).$$

THÉORÈME I. - *La condition nécessaire et suffisante pour que les segments d'une courbe* $\mathcal{C}$: $p[\alpha\beta]$ *rectifiable*:

$$\mathcal{C}_{\tau'\tau''}:\ p[\tau'\tau''], \qquad \alpha \leqq \tau' \leqq \tau'' \leqq \beta$$

soient rectifiables au sens large, est que l'écart $\delta(p(\tau')p(\tau''))$ *de deux points de la courbe correspondant à un couple* (τ', τ'') *de valeurs de* $[\alpha\beta]$ *avec* $\tau' < \tau''$, *tende uniformément vers* 0 *avec* $\tau''-\tau'$.

Si celle-ci est vérifiée $\lambda[\tau'\tau''] = \lambda(\mathcal{C}_{\tau'\tau''})$ *est une fonction de l'intervalle* $[\tau'\tau'']$, *finie, uniformément continue et additive au sens restreint, c'est-à-dire que pour toute subdivision confinale de* $[\tau'\tau'']$

$$\tau_0^* = \tau', \quad \tau_1^*, \ldots, \quad \tau^*_m, \quad \tau^*_{m+1} = \tau'',$$

nous avons:

$$\lambda[\tau'\tau''] = \underset{i=0,\ldots,m}{\text{somme}}\ \lambda[\tau_i^*\tau^*_{i+1}].$$

Voici un exemple d'une courbe rectifiable admettant un segment pour lequel $\bar{\lambda} \neq \underline{\lambda}$ (5): H est l'ensemble des nombres de l'intervalle $[-1\ \ +1]$, l'écart de deux d'entre eux τ' et τ'' est défini ainsi

$$\delta(\tau'\tau'') = 1 \quad \text{si} \quad \tau' < 0 \leqq \tau'', \qquad = 0 \quad \text{dans le cas contraire.}$$

Considérons la courbe $\mathcal{C}$: $p[-1\ \ +1]$ où $p(\tau) = \tau$ et ses deux segments

$$\mathcal{C}':\ p[-1\ \ 0], \qquad \mathcal{C}'':\ p[0\ \ 1]$$

$$\lambda(\mathcal{C}) = 1, \qquad \lambda(\mathcal{C}'') = 0 \quad \text{mais} \quad \bar{\lambda}(\mathcal{C}') = 1, \qquad \underline{\lambda}(\mathcal{C}') = 0.$$

Intégrales de Weierstrass-Bouligand-Menger.

Soit H) un espace métrique, $\delta(ab)$ la distance de deux quelconques de ses points a et b. Supposons donnée une fonction finie $\varphi(p, q)$ définie sur les couples ordonnés, (p, q), de points distincts de H; à l'aide de cette fonction nous pouvons définir un espace à écarts réels H_φ en posant

$$\delta_\varphi(pq) = \varphi(p, q) \cdot \delta(pq) \quad \text{si} \quad p \neq q, \qquad = 0 \quad \text{si} \quad p = q,$$

---

(5) Avec la définition de MENGER qui assujettit les sous-polygones d'une suite distinguée relative à une courbe à être confinaux, tout segment d'une courbe rectifiable est aussi rectifiable; mais alors les propriétés énoncées dans le théorème I ne sont plus vérifiées.

La métrique δ est appelée *métrique primaire*, la métrique δ_φ, *métrique secondaire* [6]; elles coïncident lorsque $\varphi \equiv 1$. Tout polygone de H, P: $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ admet désormais une longueur

$$\lambda(P) = \underset{i=1,\dots,m-1}{\text{somme}}\ \delta(p_i p_{i+1}) \quad \text{si} \quad m > 1, \qquad = 0 \quad \text{si} \quad m = 1$$

et une *φ-longueur*

$$\lambda_\varphi(P) = \underset{i=1,\dots,m-1}{\text{somme}}\ \delta_\varphi(p_i p_{i+1}) \quad \text{si} \quad m > 1, \qquad = 0 \quad \text{si} \quad m = 1.$$

Pour une courbe $\mathcal{C}$ nous désignons par $\lambda(\mathcal{C})$ sa longueur dans H), par $\overline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C})$ et $\underline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C})$ ses longueurs supérieure et inférieure dans H_φ ou φ-longueurs supérieure et inférieure; ce sont ces deux nombres que nous nommons respectivement *intégrales* (*curvilignes*) W.B.M [7] *par excès et par défaut de la fonction φ le long de $\mathcal{C}$*; φ portera désormais le nom d'*intégrant.* Lorsque $\overline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C}) = \underline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ est dite φ-rectifiable au sens large, la valeur commune $\lambda_\varphi(\mathcal{C})$ est la *φ-longueur* de $\mathcal{C}$, elle apparait comme l'*intégrale* (*curviligne*) W.B.M *de φ le long de $\mathcal{C}$*; les sommes définissant les φ-longueurs des sous-polygones P_n d'une suite distinguée relative à $\mathcal{C}$ $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ sont appelées *sommes riemanniennes* correspondantes. Quand $\lambda_\varphi(\mathcal{C})$ existe et est finie, $\mathcal{C}$ est dite φ-rectifiable sans plus.

Dans le cas où H est l'intervalle de nombres $[\alpha\beta]$, $\alpha \leqq \beta$, $\mathfrak{J}$ cet intervalle parcouru de α vers β, $\omega(\tau', \tau'')$ l'intégrant défini sur les couples de valeurs distinctes (τ', τ'') de $[\alpha\beta]$, $\overline{\lambda}_\omega(\mathfrak{J})$ et $\underline{\lambda}_\omega(\mathfrak{J})$ sont dites *intégrales* W.B.M *de $\omega(\tau', \tau'')$ prises de α à β et notées par $\overline{\lambda}_\omega[\alpha\beta]$* et $\underline{\lambda}_\omega[\alpha\beta]$. Les intégrales W.B.M curvilignes peuvent se ramener immédiatement à cette forme en introduisant une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$, soit $p[\alpha\beta]$; pour deux valeurs τ' et τ'' distinctes de $[\alpha\beta]$, $\delta_\varphi(p(\tau')p(\tau''))$ est une fonction de τ' et de τ'' que nous pouvons mettre sous la forme

$$\omega(\tau', \tau'') \cdot |\tau'' - \tau'|$$

désormais

$$\overline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C}) = \overline{\lambda}_\omega(\mathfrak{J}), \qquad \underline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C}) = \underline{\lambda}_\omega(\mathfrak{J}).$$

Si nous comparons la définition de l'intégrale W.B.M avec celle d'une intégrale curviligne selon RIEMANN, nous voyons qu'elle est basée comme cette dernière sur la même notion fondamentale, celle des sommes riemanniennes, mais elle en diffère en ce que

1) *l'intégrant $\varphi(p, q)$ qui y figure est fonction non d'un point sur $\mathcal{C}$ mais de deux points de H*;

---

[6] Ces désignations sont dues à M. MENGER qui les a introduites au cours d'un de ses colloquiums.

[7] Abréviation pour: au sens de WEIERSTRASS-BOULIGAND-MENGER.

2) *elle ne fait pas intervenir de représentation paramétrique particulière de* $\mathcal{C}$.

Ce dernier point est essentiel, car c'est à lui que les fonctionnelles $\bar{\lambda}_\varphi$ et $\underline{\lambda}_\varphi$ doivent d'emblée *leur caractère géométrique* (8).

Comme exemples d'intégrales W.B.M sur un intervalle $[\alpha\beta]$, citons les suivantes : soit $\psi(\xi)$ une fonction définie pour les ξ de $[\alpha\beta]$ et bornée ; considérons les intégrants φ_1, φ_2, φ_3 définis sur les couples (ξ', ξ'') de valeurs distinctes de $[\alpha\beta]$ par

$$\varphi_1(\xi', \xi'') = \left| \frac{\psi(\xi'') - \psi(\xi')}{\xi'' - \xi'} \right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2(\xi', \xi'') = \max. \psi(\xi) \\ \varphi_3(\xi', \xi'') = \min. \psi(\xi) \end{array}\right\} \text{ sur l'intervalle fermé d'extrémités } \xi' \text{ et } \xi''.$$

---

(8) La considération d'une fonctionnelle définie au moyen de sommes riemanniennes analogues à celles que nous venons d'introduire est due à WEIERSTRASS (Voir: TONELLI, Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni, Rend. della R. Acc. dei Lincei, XXI, 1912, pp. 448-453) qui avait en vue la généralisation de l'intégrale de RIEMANN trop restrictive pour les buts du Calcul des Variations: la définition de l'intégrale de RIEMANN n'était en effet pratiquement applicable qu'à des courbes d'un espace euclidien douées en chacun de leurs points d'une tangente variant continuement. La recherche de conditions d'existence de l'intégrale de WEIERSTRASS fut entreprise par M. OSGOOD en 1901 (cf. (31)) et par M. TONELLI en 1912 (cf. (31)) lequel en outre pour la première fois fit usage de cette intégrale (Sui massimi e minimi assoluto del Calcolo delle Variazioni, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, XXXII, 1911, p. 310-315).

L'intégrale de WEIERSTRASS retomba dans l'oubli après que M. TONELLI eût introduit l'intégrale curviligne de LEBESGUE, définie sous des conditions très générales sur toute courbe rectifiable, et basée sur elle ses recherches en Calcul des Variations (Fond. di Calc. delle Var., vol. I° et II°).

En 1926, M. FRÉCHET (Fund. Math., VII, p. 212) propose une traduction analytique directe de la définition géométrique de la longueur d'une courbe, définissant pour une courbe plane $\mathcal{C} : p[0\ 1]$, $p(\tau) = (\xi(\tau), \eta(\tau))$, l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ (cf. (12)) de la même façon que l'intégrale de STIELTJES.

Mais l'idée de considérer les fonctionnelles de courbes du Calcul des Variations comme des longueurs généralisées et de les traiter comme des éléments géométriques est due à M. BOULIGAND (Essai sur l'unité des méthodes directes, Hayez, Bruxelles, 1933, p. 32 et suivantes) qui par application de ce principe, a obtenu une démonstration très élégante et très simple d'un théorème d'existence de Calcul des Variations relatif aux espaces euclidiens.

M. MENGER, indépendamment de M. BOULIGAND, a développé sa méthode directe en Calcul des Variations en faisant usage systématiquement de fonctionnelles λ_φ (C. R. Paris, 1936, t. 201, p. 705 et. t. 202, p. 1007 et 1648; Erg. eines math. Koll., 8, pp. 1-32); c'est à lui que nous empruntons la plupart de nos notations en en différant cependant sur un point: l'intégrant apparait chez M. MENGER, comme habituellement en Calcul des Variations, comme fonction d'un point et d'une direction, direction abstraite dans le cas d'un espace métrique général H). La conception de l'intégrant φ comme fonction de deux points se prête plus aisément à la recherche de conditions nécessaires d'existence de la fonctionnelle λ_φ.

En se reportant aux résultats de LEBESGUE (Leçons sur l'Intégration, 1928, p. 53 et 25), on se rend compte que les intégrales W.B.M de φ_1, φ_2, φ_3 de α à β existent et représentent respectivement la variation totale et les intégrales riemanniennes par excès et par défaut de ψ sur $[\alpha\beta]$.

Il est à remarquer que, dans les applications classiques de la théorie de l'intégrale, par exemple lorsqu'on a à évaluer une longueur, une aire, un volume, un centre de gravité, un moment d'inertie, on se trouve en face d'une intégrale W.B.M que l'on ramène au moyen de certaines hypothèses de dérivabilité à une intégrale riemannienne, ou bien, plus généralement, à une intégrale de LEBESGUE (9). En indiquant quelques propriétés de l'intégrale W.B.M nous allons rencontrer cette réductibilité.

Disons que l'intégrant $\varphi(pq)$ dans l'espace H) est borné sur la courbe $\mathcal{C}: p[\alpha\beta]$ de H) lorsque $\varphi(p(\tau')p(\tau''))$ est borné sur l'ensemble des couples (τ', τ'') avec $\alpha \leqq \tau' < \tau'' \leqq \beta$, $p(\tau') \neq p(\tau'')$.

THÉORÈME II. - *L'intégrant* $\omega(\tau', \tau'')$ *étant borné sur l'intervalle* $[\alpha\beta]$ *considéré comme courbe.*

a) les fonctions d'intervalle $\bar{\lambda}_\omega$ *et* $\underline{\lambda}_\omega$ *sont absolument continues* (10) *et complétement additives; ce sont par conséquent des intégrales indéfinies selon Lebesgue* (11).

Précisons que par compléte additivité nous entendons que si un intervalle $I = [\xi'\xi'']$, sous-intervalle de $[\alpha\beta]$, est la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles $I_j = [\xi_j'\xi_j'']$ ayant deux à deux en commun au plus une extrémité:

$$\bar{\lambda}_\omega(I) = \underset{j}{\text{somme}}\ \bar{\lambda}_\omega(I_j), \qquad \underline{\lambda}_\omega(I) = \underset{j}{\text{somme}}\ \underline{\lambda}_\omega(I_j).$$

b). Si $\lambda_\omega[\alpha\beta]$ *existe:*

b_1). Tout intervalle $[\xi'\xi''] \subseteqq [\alpha\beta]$ *est* ω*-rectifiable.*

Posons pour $\xi \in [\alpha\beta]$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_s(\xi) = \text{lim. sup. } \omega(\tau', \tau'') \\ \omega_i(\xi) = \text{lim. inf. } \omega(\tau', \tau'') \end{array}\right. \quad \text{pour} \quad \left.\begin{array}{c} \tau' \\ \neq \\ \tau'' \end{array}\right\} \to \xi, \quad \text{avec} \quad \tau' \leqq \xi \leqq \tau''.$$

---

(9) Ici apparait la raison du rétablissement de la causalité au sens de M. BOULIGAND (Voir: *Structure des Théories*, Actualités Sc. et Ind., 548, Hermann, Paris) par l'emploi de l'intégrale W.B.M; celui-ci présente deux avantages fondamentaux.

1). Simplicité et transparence des raisonnements à caractère géométrique.

2). Absence d'hypothèses inutiles (dérivabilité de l'intégrant, existence de tangentes à la courbe,....).

(10) LEBESGUE, loc. cit., p. 158.

(11) LEBESGUE, loc. cit., p. 188.

b_2). *Presque partout sur* $[\alpha\beta]$: $\omega_s(\xi)=\omega_i(\xi)$, *soit* $=\omega(\xi)$ *et*

$$\lambda_\omega[\xi'\xi'']=\int_{\xi'}^{\xi''}\omega(\tau)\cdot d\tau \qquad (^{12})$$

l'intégrale étant entendue au sens de Lebesgue.

$\Sigma:(\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_m)$ étant une subdivision de $[\alpha\beta]$ avec $\tau_1 \neq \tau_m$ nous introduisons

$$\tilde{\omega}(\Sigma)=\frac{\lambda_\omega(\Sigma)-\delta_\omega(\tau_1\tau_m)}{\tau_m-\tau_1}$$

puis pour $\xi\,\varepsilon\,[\alpha\beta]$ nous désignons par $\tilde{\omega}_s(\xi)$ et $\tilde{\omega}_i(\xi)$ respectivement la limite supérieure et la limite inférieure des $\tilde{\omega}(\Sigma)$ pour les subdivisions Σ convergeant vers ξ et encadrant ξ: $\tilde{\omega}_i(\xi)\leqq 0\leqq\tilde{\omega}_s(\xi)$. Nous disons que ω *est localement linéaire en* ξ lorsque

$$\tilde{\omega}_s(\xi)=\tilde{\omega}_i(\xi)=0.$$

b_3) ω *est localement linéaire presque partout sur* $[\alpha\beta]$; *en un point* ξ *de linéarité locale de* ω

$$\lim.\ \frac{\lambda_\omega[\tau'\tau'']-\delta_\omega[\tau'\tau'']}{\tau''-\tau'}=0$$

pour $\left.\begin{matrix}\tau'\\ \neq\\ \tau''\end{matrix}\right\}\to\xi$ avec $\tau'\leqq\xi\leqq\tau''$.

Signalons en passant un cas particulier d'intégrant $\omega(\tau', \tau'')$ sur lequel le Dr. A. WALD a attiré notre attention

$$\omega(\tau', \tau'')=\omega^*(\delta) \quad \text{où} \quad \delta=|\tau''-\tau'|$$

si alors

$$\omega_s=\lim_{\delta\to 0}\text{sup. }\omega^*(\delta), \qquad \omega_i=\lim_{\delta\to 0}\text{inf. }\omega^*(\delta)$$

$$\overline{\lambda}_\omega[\xi'\xi'']=\omega_s\cdot(\xi''-\xi'), \qquad \underline{\lambda}_\omega[\xi'\xi'']=\omega_i\cdot(\xi''-\xi').$$

---

(12) M. ARONSZAJN vient de nous communiquer que pour intégrant ω borné quelconque

$$\overline{\lambda}_\omega[\xi'\xi'']=\int_{\xi'}^{\xi''}\omega_s(\tau)\cdot d\tau, \qquad \underline{\lambda}_\omega[\xi'\xi'']=\int_{\xi'}^{\xi''}\omega_i(\tau)\cdot d\tau$$

les intégrales étant entendues au sens de LEBESGUE, d'où découle le résultat suivant que nous avions présumé en commun:

la condition nécessaire et suffisante pour que, ω étant supposé borné, $\lambda_\omega[\alpha\beta]$ existe est que

$$\text{presque partout sur } [\alpha\beta], \qquad \omega_s(\xi)=\omega_i(\xi).$$

L'intégrale W.B.M, $\lambda_\omega[\xi'\xi'']$ pourrait assez naturellement s'écrire

$$\int_{\xi'}^{\xi''}\omega(\tau, \tau+d\tau)\cdot d\tau$$

nous éviterons comme M.M. BOULIGAND et MENGER l'emploi de ces symboles.

THÉORÈME III. - *L'intégrant $\varphi(p, q)$ étant borné sur la courbe $\mathcal{C}: p[\alpha\beta]$ et celle-ci φ-rectifiable, les sous-courbes élémentaires $\mathcal{C}_e^*$ de $\mathcal{C}$ sont aussi φ-rectifiables et $\lambda_\varphi(\mathcal{C}_e^*)$ est une fonction continue de $\mathcal{C}_e^*$.*

THÉORÈME IV. - *$\mathcal{C}$ étant une courbe rectifiable de H) dont la représentation en prenant l'arc λ comme paramètre est $s[0\ \lambda(\mathcal{C})]$, φ un intégrant borné sur $\mathcal{C}$ et, pour λ' et λ'' sur l'intervalle* $[0\ \lambda(\mathcal{C})]$

$$\omega(\lambda', \lambda'') = \begin{cases} \varphi(s(\lambda'), s(\lambda'')) & \text{si} \quad s(\lambda') \neq s(\lambda'') \\ 0 & \text{si} \quad s(\lambda') = s(\lambda'') \end{cases}$$

nous avons

$$\bar{\lambda}_\varphi(\mathcal{C}) = \bar{\lambda}_\omega[0\ \lambda(\mathcal{C})], \qquad \underline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C}) = \underline{\lambda}_\omega[0\ \lambda(\mathcal{C})].$$

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est φ-rectifiable, toutes les sous-courbes $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$ sont φ-rectifiables et $\lambda_\varphi(\mathcal{C}^*)$ est une fonction continue de $\mathcal{C}^*$.

Existence et semi-continuité de λ_φ sur un champ de courbes.

Soit $\varphi(p, q)$ un intégrant dans l'espace métrique H), nous disons qu'il est > 0, $\geqq 0$, borné,.... sur l'ensemble $E \subseteqq H$ lorsqu'il est respectivement > 0, $\geqq 0$, borné,.... sur l'ensemble des couples de points distincts de E.

Nous posons pour un polygone de H $P: (p_1, ..., p_m)$ non réductible à un point

norme de P $\quad \nu(P) = \max.\ \delta(p_i p_{i+1}) \quad$ pour $\quad i = 1, ..., m-1$

diamètre de P $\quad \delta(P) = \max.\ \delta(p_{j'} p_{j''}) \quad$ pour $\quad \left.\begin{matrix} j' \\ j'' \end{matrix}\right\} = 1, ..., m$

norme relative de P $\quad \nu_r(P) = \dfrac{\nu(P)}{\delta(P)}$

$$\pi_\varphi(P) = \frac{\lambda_\varphi(P) - \delta_\varphi(p_1 p_m)}{\lambda(P)}, \qquad \varkappa_\varphi(P) = \frac{\lambda_\varphi(P)}{\lambda(P)}$$

puis pour $p \varepsilon H$:

$$\bar{\pi}_\varphi(p) = \text{lim. sup. } \pi_\varphi(P), \qquad \underline{\pi}_\varphi(p) = \text{lim. inf. } \pi_\varphi(P)$$

pour les polygones P de H d'origine p, non réductibles à p et de diamètre tendant vers 0,

$$\bar{\pi}^*_\varphi(p) = \text{lim. sup. } \pi_\varphi(P), \qquad \underline{\pi}^*_\varphi(p) = \text{lim. inf. } \pi_\varphi(P)$$

pour les polygones P de H, d'origine p, non réductibles à p, de diamètre et de norme relative tendant vers 0, enfin

$$\bar{\varkappa}_\varphi(p) = \text{lim. sup. } \varkappa_\varphi(P), \qquad \underline{\varkappa}_\varphi(p) = \text{lim. inf. } \varkappa_\varphi(P)$$

pour les polygones P de H fermés, de longueur > 0 et convergeant vers le point p,

$$\bar{\varkappa}^*_\varphi(p) = \text{lim. sup. } \varkappa_\varphi(P), \qquad \underline{\varkappa}^*_\varphi(p) = \text{lim. inf. } \varkappa_\varphi(P)$$

pour les polygones P de H fermés, de longueur >0, de norme relative tendant vers 0 et convergeant vers le point p.

Notons les inégalités

$$\underline{\pi}_\varphi(p) \leqq \underline{\pi}^*_\varphi(p) \leqq 0 \leqq \overline{\pi}^*_\varphi(p) \leqq \overline{\pi}_\varphi(p)$$
$$\underline{\varkappa}_\varphi(p) \leqq \underline{\varkappa}^*_\varphi(p) \leqq \overline{\varkappa}^*_\varphi(p) \leqq \overline{\varkappa}_\varphi(p).$$

THÉORÈME V [13]. - *Pour φ borné et $\underline{\pi}^*_\varphi(p)=0$ quelque soit $p \, \varepsilon \, H$:*

λ_φ est définie et finie sur toute courbe rectifiable de H),

λ_φ est semi-continue inférieurement sur toute famille de courbes de H) de longueurs uniformément bornées.

Sous l'hypothèse supplémentaire: $\underline{\varkappa}^*_\varphi(p) >$ nombre posifif fixe, quelque soit $p \, \varepsilon \, H$:

λ_φ est définie et semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes de H); $\lambda_\varphi(\mathcal{C}) = +\infty$ dans le cas et seulement dans le cas où $\lambda(\mathcal{C}) = +\infty$.

De ce théorème nous déduisons aisèment un *corrélatif* par changement de φ en $-\varphi$ en remarquant que

$$\overline{\pi}^*_{-\varphi} = -\underline{\pi}^*_\varphi, \qquad \underline{\pi}^*_{-\varphi} = -\overline{\pi}^*_\varphi, \qquad \overline{\varkappa}^*_{-\varphi} = -\underline{\varkappa}^*_\varphi, \qquad \underline{\varkappa}^*_{-\varphi} = -\overline{\varkappa}^*_\varphi.$$

THÉORÈME VI. - *Pour φ borné et $\overline{\pi}^*_\varphi(p) = \underline{\pi}^*_\varphi(p) = 0$ quel que soit p sur H.*

λ_φ est définie et finie sur toute courbe rectifiable $\mathcal{C}$ de H) et

$$\lambda_\varphi(-\mathcal{C}) = -\lambda_\varphi(\mathcal{C})$$

λ_φ est continue sur toute famille de courbes de H) de longueurs uniformément bornées.

Intégrant selon Menger [14].

Nous supposons donnée une correspondance ϑ appliquant l'ensemble des couples ordonnés de points distincts de H, (p, q) sur un ensemble Θ dont la nature n'est pas précisée et nous notons par ϑ_{pq} l'élément de Θ attribué au couple (p, q) appelé encore *direction abstraite de p vers q.*

Un intégrant de H) selon M. MENGER est une fonction $\varphi(p;\, \vartheta)$ définie et finie pour tout $p \, \varepsilon \, H$ et $\vartheta \, \varepsilon \, \Theta$; l'intégrant à notre sens s'en déduit en posant pour $p \neq q$

$$\varphi(p, q) = \varphi(p;\, \vartheta_{pq}).$$

A côté de celui-ci s'introduit pour $p_0 \, \varepsilon \, H$ fixé la fonction φ_{p_0} définie pour $q \neq r$ par

$$\varphi_{p_0}(q, r) = \varphi(p_0;\, \vartheta_{qr})$$

la métrique $\delta_{\varphi p_0}$ correspondant à φ_{p_0} est la *métrique tangentielle en p_0* [14],

---

[13] Cf. les théorèmes IX_a et IX_b donnés plus loin, dus à M. MENGER.

[14] Erg. eines math. Koll., 8, 1935-1936, pp. 7-8.

l'espace $H_{\varphi p_0}$ *l'espace tangent à* H_φ *en* p_0 ([14]); nous désignons pour un polygone $P:(p_1,\dots, p_m)$ de H, par $\lambda_{\varphi p_0}(P)$ sa longueur dans $H_{\varphi p_0}$,

$$=\underset{i=1,\dots,\,m-1}{\text{somme}}\ \delta_{\varphi p_0}(p_i p_{i+1}) \quad \text{si} \quad m>1, \qquad =0 \quad \text{si} \quad m=1.$$

φ est dit positif, non négatif, nul,.... en $p_0 \varepsilon H$ lorsque $\varphi(p_0;\vartheta)$ est >0, $\geqq 0$, $=0$,...., quelque soit la direction ϑ; φ est dit >0, $\geqq 0$, $=0$,.... sur un ensemble $E \subseteqq H$ lorsqu'il est >0, $\geqq 0$, $=0$, en tout $p_0 \varepsilon E$.

Posons pour p, q, r sur H: $\tau(p,q,r)=\delta_{\varphi p}(pq)+\delta_{\varphi p}(qr)-\delta_{\varphi p}(pr)$; nous disons, suivant M. MENGER ([14]), que φ est en $p_0 \varepsilon H$

quasi-régulier (sous-entendu positif)	lorsque $\tau(p_0,q,r)\geqq 0$	quelque soient q et r sur H
quasi-régulier négatif	lorsque $\tau(p_0,q,r)\leqq 0$	
linéaire	lorsque $\tau(p_0,q,r)=0$	

puis que φ est quasi-régulier, quasi-régulier négatif, linéaire, lorsqu'il l'est respectivement quelque soit p_0 de H.

THÉORÈME VII. - *$\varphi(p;\vartheta)$ étant un intégrant borné* ([15]), *quasi-régulier positif ou négatif, pour p_0 fixé sur H, $\varphi(p_0, q)$ et $\delta_\varphi(p_0 q)$ sont des fonctions continues de q.*

THÉORÈME VIII. - *$\varphi(p;\vartheta)$ étant un intégrant borné* ([15]), *semi-continu inférieurement en p, au point p_0 de H, uniformément par rapport à ϑ* ([16]):

$$(\varphi \ \textit{quasi-régulier en}\ p_0) \rightarrow (\underline{\pi}_\varphi(p_0)=0).$$

Si nous combinons cette proposition à sa corrélative obtenue en changeant φ en $-\varphi$, nous obtenons la suivante:

$\varphi(p;\vartheta)$ étant un intégrant borné, continu en p au point p_0 de H, uniformément par rapport à ϑ

$$(\varphi \ \textit{linéaire en}\ p_0) \rightarrow (\underline{\pi}_\varphi(p_0)=\overline{\pi}_\varphi(p_0)=0.$$

Cas des espaces euclidiens. - Supposons désormais que H) soit un sous-espace de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$, ϑ_{pq} représentant la direction de p vers q au sens habituel; introduisant un système d'axes rectangulaires dans $\mathcal{E}_n$, nous adjoindrons à $\varphi(p;\vartheta)$ *l'intégrant au sens classique*

$$\varphi(\xi_1,\dots,\xi_n;\ \xi_1',\dots,\xi_n')=\sqrt{\xi'^2_1+\dots+\xi'^2_n}\cdot\varphi(p;\vartheta)$$

([15]) Sous-entendu: sur H.

([16]) C'est-à-dire que: quelque soit $\varepsilon>0$, il existe un $\delta>0$, tel que pour tout $p'\varepsilon H$ avec $\delta(p_0p')<\delta$

$$\varphi(p';\vartheta)>\varphi(p_0;\vartheta)-\varepsilon, \qquad \text{quelque soit } \vartheta.$$

Nous avions supposé primitivement la continuité de l'intégrant; l'idée de la remplacer par une semi-continuité est due à M. M. ARONSZAJN et MAC SHANE.

pour $p=(\xi_1,\ldots, \xi_n)$, $\vartheta=$direction du vecteur de composantes $\xi_1',\ldots, \xi_n'$ supposées non toutes nulles; cet intégrant est une fonction positivement homogène en $\xi_1',\ldots, \xi_n'$ (17).

Posons, comme précédemment pour p, q, r sur H

$$\tau(p, q, r)=\delta_{\varphi p}(pq)+\delta_{\varphi p}(qr)-\delta_{\varphi p}(pr)$$

nous disons *suivant M. Menger* que φ est en $p_0 \varepsilon H$

régulier (sous-entendu positif) lorsque $\tau(p_0, q, r)>0$ ⎫ quelque soient q et r distincts sur H non alignés avec p_0
régulier négatif lorsque $\tau(p_0, q, r)<0$ ⎭

puis que φ est régulier, régulier négatif lorsqu'il l'est respectivement quelque soit p_0 de H.

Rappelons que la *fonction χ de Menger* (18) est définie pour $p \varepsilon H$ par:

$$\chi(p)=\min_{\vartheta} \cdot [\varphi(p\,;\ \vartheta)+\varphi(p\,;\ -\vartheta)]$$

$-\vartheta=$direction opposée à ϑ. Nous posons de façon analogue

$$\chi^-(p)=\max_{\vartheta} \cdot [\varphi(p\,;\ \vartheta)+\varphi(p\,;\ -\vartheta)].$$

THÉORÈME IX. - *Si φ est au point p_0 de H, semi-continu inférieurement en p uniformément par rapport à ϑ* (16) *et quasi-régulier*

$$(\chi(p_0)>0) \rightarrow (\underline{\varkappa}_\varphi(p_0)>0) \quad (19).$$

Si φ est au point p_0 semi-continu supérieurement en p, uniformèment par rapport à ϑ

$$(\underline{\varkappa}_\varphi(p_0)>0) \rightarrow (\chi(p_0)>0) \quad (20).$$

Par conséquent: si φ est au point p_0 continu en p uniformément par rapport à ϑ et quasi-régulier

$$(\chi(p_0)>0) \sim (\underline{\varkappa}_\varphi(p_0)>0).$$

THÉORÈME X. - *Sous les hypothèses que H est fermé* (21) *et que φ est en tout point p_0 de H continu en p uniformément par rapport à ϑ:*

---

(17) BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Teubner, Leipzig, 1933, p. 194.

(18) « *Symmetrisierungsminimum* ». Erg. eines math. Koll., 8, p. 3 et p. 26.

(19) Proposition due à M. MENGER; voir référence précédente. De façon plus précise

$$\underline{\varkappa}_\varphi(p_0) \geqq \chi(p_0) \cdot \varrho(n)$$

$\varrho(n)$ désignant « l'extensibilité » (Streckbarkeit) de l'espace $\mathcal{E}_n$; pour la définition et la détermination de ce nombre, se reporter à: A. E. MAYER. *Größte Polygone mit gegebenen Seitenvektoren*, Commentarii Math. Helv., 10, 1937-1938, pp. 288-301

(20) Plus précisèment: $\chi(p_0) \geqq 2\underline{\varkappa}_\varphi(p_0)$.

(21) H étant considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{E}_n$.

a) (*quasi-régularité de* φ) $\rightarrow$ (φ*-rectificabilité des courbes rectifiables de* H) & *semi-continuité inférieure de* λ_φ *sur toute famille de courbes de* H) *de longueurs uniformèment bornées*);

b) (*quasi-régularité de* φ & *positivité de* χ) $\rightarrow$ (*existence et semi-continuité inférieure de* λ_φ *sur toutes les courbes de* H); $\lambda_\varphi(\mathcal{C}) = +\infty$ *dans le cas et seulement dans le cas où* $\lambda(\mathcal{C}) = +\infty$);

Remarquons ici que

(*quasi-régularité et positivité de* φ) $\rightarrow$ (*positivité de* χ)

(*régularité de* φ) $\rightarrow$ (*quasi-régularité de* φ & *positivité de* χ).

c) (*quasi-régularité de* φ) & (*nullité de* φ *en tout point* p *de* H *pour lequel* $\chi(p) = 0$ (22) *et existence d'un voisinage de* p *dans* H *sur lequel* φ *est* $\geqq 0$) $\rightarrow$ (*semi-continuité inférieure de* λ_φ *sur toutes les courbes rectifiables de* H));

Notons que si $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n; \xi_1', \ldots, \xi_n')$ admet des dérivées premières en $\xi_1', \ldots, \xi_n'$, en un point p de H où $\chi(p) = 0$, φ ne peut être non négatif sans y être nul (23).

d) (*quasi-régularité de* φ) & (*existence en tout point* p *intérieur à* H (21) *pour lequel* $\chi(p) = 0$ *d'un voisinage de* p, $\subseteqq H$ *tel que la* φ*-longueur de toute courbe fermée rectifiable située sur lui soit* $\geqq 0$) $\rightarrow$ (*semi-continuité inférieure de* λ_φ *sur toutes les courbes rectifiables intérieures à* H (24)) (25).

Des théorèmes IX et X se déduisent aisèment des corrélatifs par changement de φ en $-\varphi$.

Définitions relatives à la convexité des cônes et des surfaces coniques.

Un ensemble K de $\mathcal{E}_{n+1}$ est appelé un cône (26) lorsqu'il existe dans $\mathcal{E}_{n+1}$ un point s dit son sommet tel que.

1) $K \supset \{s\}$.

2) quelque soit $x \varepsilon K$ et $\neq s$, tous les points de la demi-droite d'origine s et portant x appartiennent à K.

Par *plan d'appui* (26) *à* K *le long d'une génératrice* T_0, nous entendons un plan de $\mathcal{E}_{n+1}$ — variètè linéaire n — dimensionnelle passant par T_0 et tel que K soit inclus entièrement dans une des régions fermées que ce plan limite

---

(22) L'hypothèse de la nullité de φ en un point p où $\chi(p) = 0$ est indispensable; M. Aronszajn nous a communiqué uu exemple où φ est $\geqq 0$ et quasi-régulier et tel cependant que λ_φ ne soit pas semi-continue inférieurement.

(23) Cf.: Pauc, Rend. della R. Acc. dei Lincei, XXVI, pp. 372-373.

(24) C'est-à-dire dont tous les points sont intérieurs à H.

(25) X_a et X_b sont dus à Menger; pour X_c et X_d, cf. après lecture de l'alinéa suivant: Tonelli, *Fond. di Calc. delle Var.*, vol. I°, pp. 272 et 284.

(26) T. Bonnesen et W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Springer, 1934, pp. 2-6.

dans $\mathcal{E}_{n+1}$; si ce plan n'a en commun avec K que la génératrice T_0, nous l'appelons *plan d'appui strict* ([27]).

Nous nommons un cône fermé convexe C^*

proprement convexe ([28]) s'il ne contient aucune droite;

strictement convexe ([29]) si tout point intérieur au segment joignant deux points de C^* non alignés avec le sommet, est intérieur à C^*.

Par *surface conique convexe, proprement convexe, strictement convexe,* nous entendons la frontière d'un cône fermé $\subset \mathcal{E}_{n+1}$ respectivement convexe, proprement convexe, strictement convexe.

Figurative d'un intégrant en un point. - Soit $\varphi(\xi_1,\dots, \xi_n;\ \xi_1',\dots, \xi_n')$ un intégrant de H) sous-espace de $\mathcal{E}_n$ et $p_0=(\xi_1^{(0)},\dots, \xi_n^{(0)})$ un point de H; assimillons $\mathcal{E}_n$ à la variètè $\xi_{n+1}=0$ d'un espace $\mathcal{E}_{n+1}$; nous introduisons avec M. HADAMARD ([30]) le cône $S^*_{\varphi p_0}$ de sommet p_0 défini par $\xi_{n+1}=\psi_{p_0}(\xi_1,\dots, \xi_n)$ où

$$\psi_{p_0}(\xi_1,\dots, \xi_n)=\begin{cases} 0 & \text{si } (\xi_1,\dots, \xi_n)=p_0, \\ \varphi(\xi_1^{(0)},\dots, \xi_n^{(0)};\ \xi_1-\xi_1^{(0)},\dots, \xi_n-\xi_n^{(0)}) & \text{si } (\xi_1,\dots, \xi_n)\neq p_0 \end{cases}$$

dit: *figurative de φ en p_0*.

ϑ_0 étant une direction quelconque de $\mathcal{E}_n$, nous désignons par $R_{p_0\vartheta_0}$ la demi-droite (ou rayon) de $\mathcal{E}_n$ d'origine p_0 et de direction ϑ_0, par $T_{p_0\vartheta_0}$ la génératrice de $S^*_{\varphi p_0}$ qui se projette orthogonalement sur $\mathcal{E}_n$ suivant $R_{p_0\vartheta_0}$; par $R^+_{p_0}$ et $R^-_{p_0}$ les rayons d'origine p_0 paralléles respectivement à la direction positive et à la direction négative de l'axe des ξ_{n+1}.

Un *plan d'appui* à un cône de $\mathcal{E}_{n+1}$ non paralléle à l'axe des ξ_{n+1} est dit *positif* (*négatif*) si ce cône est inclus dans la région fermée supérieure (inférieure) que ce plan limite dans $\mathcal{E}_{n+1}$.

Par *plan d'appui local positif* (*négatif, positif strict, négatif strict*) à $S^*_{\varphi p_0}$ le long de $T_{p_0\vartheta_0}$, nous entendons un plan qui soit plan d'appui positif (négatif, positif strict, négatif strict) au cône lieu des génératrices $T_{p_0\vartheta}$ telles que

angle de ϑ_0 avec $\vartheta < \varepsilon$ positif suffisamment petit

le long de $T_{p_0\vartheta_0}$.

Convenons enfin de dire que $S^*_{\varphi p_0}$ *est positivement* (*négativement*) *convexe lorsqu'elle est la frontière d'un cône convexe incluant* $R^+_{p_0}$ ($R^-_{p_0}$).

Nous pouvons alors énoncer les *équivalences géométriques* suivantes

($S^*_{\varphi p_0}$ *est* + *convexe*) $\backsim$ ($S^*_{\varphi p_0}$ *admet un plan d'appui* + *le long de chaque génératrice*).

([27]) A distinguer du « plan d'appui au sens strict ».

([28]) Cf.: ARONSZAJN, Rend. della R. Acc. dei Lincei, XXVI, p. 374.

([29]) A distinguer de « convexe au sens strict ».

([30]) *Leçons sur le Calcul des Variations*, tome 1, Paris, 1910, p. 90. Voir aussi: TONELLI, Fond. di Calc. delle Var., Vol. I°, p. 212; BOULIGAND, loc. cit., p. 14 et p. 32.

($S^*_{\varphi p_0}$ *est proprement* $+$ *convexe*) $\sim$ ($S^*_{\varphi p_0}$ *est* $+$ *convexe et n'inclut aucune droite*) $\sim$ ($S^*_{\varphi p_0}$ *est* $+$ *convexe & il existe un plan* (31) *passant par* p_0 *ne contenant aucune génératrice de* $S^*_{\varphi p_0}$).

($S^*_{\varphi p_0}$ *est strictement* $+$ *convexe*) $\sim$ ($S^*_{\varphi p_0}$ *admet un plan d'appui* $+$ *strict le long de chaque génératrice*).

Si $\varphi(p_0;\ \vartheta)$ est semi-continu supérieurement en ϑ.

($S^*_{\varphi p_0}$ *est* $+$ *convexe*) $\sim$ ($S^*_{\varphi p_0}$ *admet un plan d'appui local* $+$ *le long de chaque génératrice*).

($S^*_{\varphi p_0}$ *est* $+$ *strictement convexe*) $\sim$ ($S^*_{\varphi p_0}$ *admet un plan d'appui local* $+$ *strict le long de chaque génératrice*).

Signalons que le long d'une génératrice suivant laquelle $S^*_{\varphi p_0}$ admet un plan tangent, tout plan d'appui local donc aussi tout plan d'appui à $C_{\varphi p_0}$ est nécessairement confondu avec le plan tangent.

THÉORÈME XI. - $T_{p_0\vartheta_0}$ *étant la génératrice de* $S^*_{\varphi p_0}$ *correspondant à la direction* ϑ_0 *de* $\mathcal{E}_n$:

(*il existe un plan d'appui* $+$ *à* $S^*_{\varphi p_0}$ *le long de* $T_{p_0\vartheta_0}$) $\sim$ (*pour tout polygone* $P\colon (p_1,\ldots, p_m)$ *de* H *avec* $p_m \neq p_0$, $\vartheta_{p_0 p_m} = \vartheta_0$:

$$\lambda_{\varphi p_0}(P) \geqq \delta_{\varphi p_0}(p_0 p_m))$$

(*il existe un plan d'appui* $+$ *strict à* $S^*_{\varphi p_0}$ *le long de* $T_{p_0\vartheta_0}$) $\sim$ (*pour tout polygone* $P\colon (p_1,\ldots, p_m)$ *de* H *avec* $p_m \neq p_0$, $\vartheta_{p_0 p_m} = \vartheta_0$ *et au moins un côté de direction* $\neq \vartheta_0$:

$$\lambda_{\varphi p_0}(P) > \delta_{\varphi p_0}(p_0 p_m)).$$

THÉORÈME XII. - *Pour* $p_0 \in H$

(*quasi-régularité* $+$ *de* φ *en* p_0) $\sim$ (*convexité* $+$ *de* $S^*_{\varphi p_0}$)

(*quasi-régularité* $+$ *de* φ *en* p_0 & $(\chi(p_0) > 0)$) $\sim$ (*convexité* $+$ *propre de* $S^*_{\varphi p_0}$) (31)

(*régularité* $+$ *de* φ *en* p_0) $\sim$ (*convexité* $+$ *stricte de* $S^*_{\varphi p_0}$)

(*linéarité de* φ *en* p_0) $\sim$ (*planéité de* $S^*_{\varphi p_0}$).

Les corrélatifs des résultats précédents par passage de φ à $-\varphi$ s'obtiennent aisément, remarquant en particulier que

$$S^*_{-\varphi p_0} = \text{cône opposé par le sommet à } S^*_{\varphi p_0}.$$

Liaison entre la théorie précédente et celle de Tonelli.

XIII. - THÉORÈME FONDAMENTAL D'OSGOOD-TONELLI-ARONSZAJN. — $\varphi(p;\ \vartheta)$ *étant un intégrant défini sur* $H \subseteqq \mathcal{E}_n$ *et continu par rapport au système*

---

(31) L'existence lorsque φ est quasi-régulier positif en p_0 et que $\chi(p_0)$ est > 0, d'une forme linéaire en $\xi_1',\ldots, \xi_n'$, $\pi(\xi_1',\ldots, \xi_n')$ telle que

$$\varphi(p_0;\ \xi_1',\ldots, \xi_n') > \pi(\xi_1',\ldots, \xi_n') \quad \text{pour} \quad (\xi_1',\ldots, \xi_n') \neq (0,\ldots, 0)$$

a été vue aussi par M. ARONSZAJN (loc. cit. en (28), p. 375) qui en a souligné l'importance.

$(p\,;\,\vartheta)$, *toute courbe rectifiable* $\mathcal{C}$ *de* H) *est* φ*-rectifiable et* $\lambda_\varphi(\mathcal{C})$ *n'est autre que l'intégrale de* φ *le long de* $\mathcal{C}$ *au sens de Lebesgue-Tonelli* ([32]).

Par utilisation du procédé de démonstration de M. ARONSZAJN nous avons retrouvé *sous les hypothèses de l'énoncé précédent* le

XIV. - THÉORÈME DE CONVERGENCE DE TONELLI ([33]). — $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m, \ldots$ *étant une suite de courbes rectifiables de* H) *convergeant vers une courbe* $\mathcal{C}_0$ *de* H) *rectifiable et telle que*

$$\lim.\ \lambda(\mathcal{C}_m) = \lambda(\mathcal{C}_0)$$

alors:

$$\lim.\ \lambda_\varphi(\mathcal{C}_m) = \lambda_\varphi(\mathcal{C}_0).$$

Dans le cas de $\mathcal{E}_2$ et d'un intégrant $\varphi(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1', \xi_2')$ défini sur $H \subseteqq \mathcal{E}_2$, continu par rapport à l'ensemble de ses arguments et admettant des dérivées $\dfrac{\delta^2\varphi}{\delta\xi_1'^2}$, $\dfrac{\delta^2\varphi}{\delta\xi_1'\cdot\delta\xi_2'}$, $\dfrac{\delta^2\varphi}{\delta\xi_2'^2}$ continues ([34]), pour $p_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ de H:

([32]) Pour la définition de l'intégrale curviligne de LEBESGUE ou intégrale de LEBESGUE-TONELLI, voir: TONELLI, Fond. di Calc. delle Var., Vol. I°, p. 217.

L'existence de λ_φ sur une courbe rectifiable $\mathcal{C}$ a été établie par M. OSGOOD (On a fundamental propriety of a minimum in the Calculus of Variations, Trans. of the Am. Math. Soc., II, 1901, p. 273) dans le cas d'un intégrant de $\mathcal{E}_2$, $\varphi(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1', \xi_2')$ positif, admettant des dérivées des trois premiers ordres en ξ_1, ξ_2, ξ_1' et ξ_2', finies et continues et à fonction de LEGENDRE φ_1 (Voir ([37])) positive; M. OSGOOD a en outre démontré (ref. préc., p. 293) que, $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m, \ldots$ étant une suite de lignes polygonales inscrites dans $\mathcal{C}$ et convergeant vers $\mathcal{C}$, l'intégrale de RIEMANN de φ le long de $\mathcal{P}_m$, égale à la somme des intégrales de RIEMANN de φ le long des cotés de $\mathcal{P}_m$, tend vers $\lambda_\varphi(\mathcal{C})$ lorsque $m \to \infty$.

M. TONELLI (Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni, Rend. della R. Acc. dei Lincei, XXI, 1912, pp. 451-452) a montré l'existence de λ_φ sur une courbe rectifiable pour un intégrant de $\mathcal{E}_2$, $\varphi(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1', \xi_2')$ admettant des dérivées des trois premiers ordres finies et continues, et sa coïncidence avec l'intégrale curviligne de LEBESGUE correspondante.

Le théorème XIII sous la forme donnée dans le texte est dû à M. ARONSZAJN.

M. TONELLI nous a récemment fait observer que son raisonnement était applicable sous l'hypothèse de la continuité de φ en $(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')$ et de l'existence et la continuité des dérivées des deux premiers ordres de φ par rapport à ξ_1' et ξ_2'.

([33]) Ce théorème fut donné pour la première fois dans le cas d'un intégrant de $\mathcal{E}_2$, $\varphi(\xi_1, \xi_2,;\ \xi_1', \xi_2')$ admettant des dérivées finies et continues des trois premiers ordres en ξ_1, ξ_2, ξ_1', ξ_2' par M. TONELLI (Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni, Rend. della R. Acc. dei Lincei, XXI, 1912, pp. 554-556); un cas particulier à savoir lorsque $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m, \ldots$ est une suite de lignes polygonales inscrites dans $\mathcal{C}$, de côtés tendant vers 0, avait déjà été indiqué par M. OSGOOD en 1901 (Voir ([32])).

M. TONELLI dans ses Fond. di Calc. delle Var., Vol. I°, p. 229, remarque que son théorème de convergence, toujours dans le cas du plan, est valide en supposant seulement que φ est continu par rapport à l'ensemble de ses arguments.

([34]) Ce sont les hypothèses de M. TONELLI. Voir: Fond. di Calc. delle Var., Vol. I°, p. 203. Signalons à ce propos la remarque de M. TONELLI. (Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 1934, p. 410) au sujet de (*quasi-régularité de Menger* [35] *en* p_0) $\sim$ (*quasi-régularité de Tonelli* [36] *en* p_0)

(*régularité de Menger* [35] *en* p_0) $\sim$ (*quasi-régularité normale de Tonelli* [36] *en* p_0)

(*quasi-régularité de Menger* [35] *en* p_0 & $(\chi(p_0)>0)$) $\sim$ (*quasi-régularité semi-normale de Tonelli* [36] *en* p_0).

ϑ_0 désignant une direction faisant l'angle θ_0 avec la direction positive de l'axe des ξ_1, $T_{p_0\vartheta_0}$ la génératrice qui lui correspond sur $S^*_{\varphi p_0}$, $\varepsilon(\xi_1, \xi_2; \xi_1', \xi_2'; \tilde{\xi}_1', \tilde{\xi}_2')$, $\varphi_1(\xi_1, \xi_2; \xi_1', \xi_2')$ les fonctions de WEIERSTRASS et de LEGENDRE [37] relatives à φ

($\varepsilon(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}; \cos\theta_0, \sin\theta_0; \cos\theta, \sin\theta) \geqq 0$ *quelque soit* θ *avec* $0 \leqq \theta < 2\pi$) $\sim$ (*existence d'un plan d'appui* + *à* $S^*_{\varphi p_0}$ *le long de* $T_{p_0\vartheta_0}$)

($\varepsilon(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}; \cos\theta_0, \sin\theta_0; \cos\theta, \sin\theta) >_\theta$ *quelque soit* $\theta \neq \theta_0$ *avec* $0 \leqq \theta < 2\pi$) $\sim$ (*existence d'un plan d'appui* + *strict à* $S^*_{\varphi p_0}$ *le long de* $T_{p_0\vartheta_0}$)

($\varphi_1(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}; \cos\theta_0, \sin\theta_0) \geqq 0$) $\sim$ (*existence d'un plan d'appui local* + *à* $S^*_{\varphi p_0}$ *le long de* $T_{p_0\vartheta_0}$)

($\varphi_1(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}; \cos\theta_0, \sin\theta_0) > 0$) $\rightarrow$ (*existence d'un plan d'appui local* + *strict à* $S^*_{\varphi p_0}$ *le long de* $T_{p_0\vartheta_0}$).

THÉORÈME XV. - *$\varphi(p\,;\vartheta)$ étant un intégrant défini sur $H \subseteqq \mathcal{E}_n$ et continu par rapport à $(p\,;\vartheta)$*

une condition nécessaire pour que λ_φ soit semi-continue inférieurement sur toute famille de courbes de H) de longueurs uniformèment bornées est

---

l'article de M. BOULIGAND mentionné en (8); M. TONELLI note comment ses procédés de raisonnement sont applicables si l'on s'affranchit de l'hypothèse de l'existence des dérivées de φ par rapport à ξ_1' et ξ_2', en s'appuyant sur le fait que si φ est quasi-régulier, donc $S^*_{\varphi p_0}$ convexe, la fonction $\varphi(\xi_1, \xi_2; \cos\theta, \sin\theta)$ posséde, quelque soit θ, une dérivée en θ à droite et une à gauche.

Dans le mémoire en question, p. 405, M. TONELLI démontre un lemme de nature géométrique pour parvenir à un théorème extrémement général, p. 411, relatif au cas ordinaire du Calcul des Variations, c'est-à-dire où il s'agit d'un intégrant $\varphi(\xi_1, \xi_2; \xi_2')$. Observons que l'étude de ce cas ne ressortit pas de la théorie que nous venons de développer: la fonctionnelle définie sur les courbes

$$\mathfrak{C}: \quad \xi_2 = \psi(\xi_1), \qquad \alpha \leqq \xi_1 \leqq \beta$$

est une longueur lorsque l'on prend comme écart de deux points (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) avec $\eta_1 \neq \xi_1$, le nombre

$$\varphi\left(\eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2; \frac{\eta_2 - \xi_2}{\eta_1 - \xi_1}\right) \cdot |\eta_1 - \xi_1|.$$

(35) Notions définies à l'alinéa « Intégrant selon MENGER ».

(36) TONELLI, Fond. di Calc. delle Var., Vol. I°, p. 224.

(37) TONELLI, ibidem, pp. 206 et 209; BOLZA, loc. cit., pp. 196 et 243.

qu'en chaque point intérieur à H ([21]) *et en tout point d'accumulation de tels points,* φ *soit quasi-régulier*

pour que λ_φ *soit semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes rectifiables de H), il est nécessaire que, outre la condition précédente soit vérifiée la suivante:*

en tout point p de H, il existe un voisinage de p dans H) tel que la φ*-longueur de toute courbe fermée rectifiable située sur lui soit* $\geqq 0$ ([38]).

Notons la conséquence suivante: *une condition nécessaire pour que* λ_φ *soit continue sur la famille de toutes les courbes rectifiables de H), est que:*

en tout point intérieur à H ([21]) *et en tout point d'accumulation de tels points,* φ *soit linéaire*

il existe un voisinage de p dans H) tel que la φ*-longueur de toute courbe rectifiable fermée située sur lui soit nulle* ([39]).

THÉORÈME XVI. - $\varphi(p\,;\,\vartheta)$ *étant un intégrant défini sur* $H \subseteqq \mathcal{E}_n$ *et continu par rapport à* $(p\,;\,\vartheta)$, $\mathcal{C}_0$ *une courbe rectifiable intérieure à H,* $p[0\ \lambda(\mathcal{C})]$ *sa représentation au moyen de l'arc* λ.

a) une condition nécessaire — et suffisante si $\varphi \geqq 0$ *— pour que, quelque soit la suite de courbes* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m, \ldots$ *de longueurs uniformèment bornées convergeant vers* $\mathcal{C}_0$*, l'on ait:*

$$\text{lim. inf. } \lambda_\varphi(\mathcal{C}_m) \geqq \lambda_\varphi(\mathcal{C}_0)$$

est que:

$\mathcal{S}$ $\left\{\right.$ *presque partout sur* $\mathcal{C}_0$*, c'est-à-dire sauf au plus aux points* $p(\lambda)$ *correspondant aux* λ *d'un ensemble de mesure nulle, la surface conique d'étalonnage en* $p(\tau)$ *admette le long de la génératrice correspondant à la direction d'une demi-tangente positive à* $\mathcal{C}_0$ *en* $\tilde{p}$: $p(\tau)$*, un plan d'appui positif* ([40]).

b) une condition nécessaire pour que, pour les mêmes suites $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m, \ldots,$ *l'on ait constamment*

$$\text{lim. } \lambda_\varphi(\mathcal{C}_m) = \lambda_\varphi(\mathcal{C}_0)$$

est que $\varphi(p\,;\,\vartheta)$ *soit linéaire presque partout sur* $\mathcal{C}_0$ ([41]).

c) si φ *est positif,* $\mathcal{S}$ *est une condition suffisante pour que* λ_φ *soit semi-continue inférieurement en* $\mathcal{C}_0$ ([42]).

([38]) TONELLI, Fond. di Calc. delle Var., Vol. I°, pp. 231-235.

([39]) TONELLI, ibidem, p. 242.

([40]) TONELLI, ibidem, p. 256.

([41]) TONELLI, ibidem, p. 259.

([42]) TONELLI, ibidem, p. 290. Cette proposition est inexacte si l'on remplace dans l'énonce de $\mathcal{S}$ «presque partout sur $\mathcal{C}_0$» par «pour les λ d'un ensemble dense dans $[0, \lambda(\mathcal{C})]$» même si φ est > 0 ainsi qu'il résulte d'un exemple de M. ARONSZAJN.

d) si $\mathcal{C}_0$ vérifie $\mathcal{S}$ et si, presque partout sur $\mathcal{C}_0$, la surface conique d'étalonnage admet un plan d'appui positif strict, λ_φ est semi-continue inférieurement en $\mathcal{C}_0$ ([43]).

Minimantes et Maximantes de λ_φ relativement à une famille de courbes.

Revenons à un espace métrique général $H)$ et à un intégrant φ défini sur ses couples de points distincts et soit $\mathfrak{C}$ une famille de courbes de $H)$ appartenant au domaine de définition de λ_φ; une courbe $\mathcal{C}'$ de $\mathfrak{C}$ pour laquelle

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}') = \underset{\mathcal{C}\,\varepsilon\,\mathfrak{C}}{\text{borne inférieure de}}\ \lambda_\varphi(\mathcal{C})$$

est appelée une *minimante de λ_φ sur $\mathfrak{C}$*; une courbe $\mathcal{C}''$ de $\mathfrak{C}$ pour laquelle

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}'') = \underset{\mathcal{C}\,\varepsilon\,\mathfrak{C}}{\text{borne supérieure de}}\ \lambda_\varphi(\mathcal{C})$$

est appelée une *maximante de λ_φ* sur $\mathfrak{C}$.

Des théorèmes d'existence de minimantes et de maximantes résultent des propositions qui précèdent sur l'existence et la semi-continuité de λ_φ par application du « **Principe de Tonelli** » ([44]); nous nous bornons ici à donner une *application de la notion de sous-courbe d'une courbe, aux minimantes et aux maximantes.*

Introduisons pour une famille $\mathfrak{C}$ de courbes l'hypothèse suivante.

Γ { *$\mathcal{C}$ appartenant à $\mathfrak{C}$, toute courbe obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en en parcourant une boucle une seconde fois ou au contraire en la supprimant appartient encore à $\mathfrak{C}$.*

Une telle hypothèse est d'une extrême généralité si l'on remarque que les familles $\mathfrak{C}$ intervenant dans les problèmes classiques, constituées par les courbes d'une certaine espèce (rectifiables, à tangente continue,....) joignant deux ensembles, la vérifient.

THÉORÈME XVII. - *$\mathfrak{C}$ étant une famille de courbes de $H)$ faisant partie du domaine de définition de λ_φ et satisfaisant à Γ, $\mathcal{C}$ une minimante ou maximante de λ_φ relativement à $\mathfrak{C}$ telle que $\lambda_\varphi(\mathcal{C})$ soit finie, pour toute boucle $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$*

$$\lambda_\varphi(\mathcal{B}) = 0.$$

Conséquences: 1) pour toute sous-courbe élémentaire de $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{C}_e^*$

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}_e^*) = \lambda_\varphi(\mathcal{C}).$$

([43]) Cfr. TONELLI, Fond. di Calc. delle Var., Vol. I°, p. 288.

([44]) MENGER, Erg. eines math. Koll., 8, p. 12.

2) si l'on sait de l'intégrant φ que la φ-longueur d'une courbe fermée quelconque non réduite à un point est $\neq 0$, ainsi si $\varphi \equiv 1$, on peut affirmer que $\mathfrak{C}$ est un arc.

3) si $\mathfrak{C}$ est fermée et φ borné sur $\mathfrak{C}$, toute sous-courbe $\mathfrak{C}^*$ de $\mathfrak{C}$ est φ-rectifiable et $\lambda_\varphi(\mathfrak{C}^*) = \lambda_\varphi(\mathfrak{C})$ ([45]).

([45]) Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à M. TONELLI pour les précieuses références qu'il a bien voulu nous signaler et M.M. FRÉCHET et ARONSZAJN pour leurs si utiles critiques.