Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Landolino Giuliano

Sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili a variazione limitata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 1 (1939), p. 41-50

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_41_0>

SULLA DIFFERENZIABILITÀ ASINTOTICA DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI A VARIAZIONE LIMITATA (*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

1. - Riprendendo i lavori di RADEMACHER (1) sulla differenziabilità totale (nel senso di STOLZ) di una funzione di due variabili reali, allargando le ipotesi enunciate da questo Autore, e dopo una approfondita analisi sulle condizioni di esistenza del differenziale totale, W. STEPANOFF (2) fu portato a porre il seguente concetto di differenziabilità totale *asintotica*, più largo di quello posto dallo STOLZ:

« *Diremo che una funzione* $f(x, y)$ *definita in un insieme misurabile* E, *è asintoticamente differenziabile nel punto* (x, y) *di* E, *se esiste un insieme misurabile* E_{xy} *appartenente ad* E, *avente in tale punto densità* 1, *in modo che se* $(x+h, y+k)$ *appartiene ad* E_{xy}, *l'incremento corrispondente della funzione si possa esprimere come segue*:

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=A(x, y)\cdot h+B(x, y)\cdot k+\sqrt{h^2+k^2}\cdot R(x, y;\ h, k)$$

con $R(x, y;\ h, k)\rightarrow 0$ *quando* $\sqrt{h^2+k^2}\rightarrow 0$, *il limite essendo calcolato per i punti* $(x+h, y+k)$ *di* E_{xy} ».

Intorno ai concetti introdotti da RADEMACHER e da STEPANOFF hanno lavorato U. S. HASLAM-JONES (3) e J. C. BURKILL (4), estendendo le considerazioni di quegli Autori ed enunciando alcune notevoli proprietà per particolari classi di funzioni. Essi fra l'altro hanno dimostrato che ogni funzione a variazione limitata secondo ARZELÀ è totalmente differenziabile (nel senso di STOLZ), quasi dappertutto. Un tale risultato non è valido però per la classe di funzioni, più larga, a variazione limitata secondo TONELLI, neanche, come è noto (5), se si ammette l'ipotesi della assoluta continuità. Nel lavoro citato in (4) viene però dimostrato

---

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) H. RADEMACHER: *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit,* I e II. Mathematische Annalen, 79 (1919), pp. 340-359 e 81 (1923), pp. 52-63.

(2) W. STEPANOFF: *Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale.* Recueil de la Soc. Math. de Moscou, 32 (1924), pp. 511-526.

(3) U. S. HASLAM-JONES: *Derivate planes and tangent planes of a measurable function.* Quarterly Journal of Math. Oxford, 3 (1932), pp. 120-132.

(4) J. C. BURKILL and U. S. HASLAM-JONES: *Note on the differentiability of functions of two variables.* Journal of the London Math. Society, vol. VII (1932), pp. 297-305.

(5) Cfr. loc. cit. in (2) pp. 515-516; SAKS: *On the surfaces without tangent planes.* Annals of Mathematics (1933-1934), pp. 114-124.

che le funzioni quasi continue che sono a variazione limitata secondo TONELLI e che soddisfano ad un'ulteriore condizione (che indicherò più oltre), godono della differenziabilità totale asintotica, quasi dappertutto.

Uno degli scopi della presente breve Nota è di provare come si possa fare a meno di porre tale ulteriore condizione ed inoltre che il risultato rimane valido anche per quelle funzioni più generali che il TONELLI ha chiamato generalmente a variazione limitata ([6]), e che qui vanno supposte anche quasi continue. Ma, mentre questo risultato potremmo ottenerlo molto rapidamente sfruttando una proposizione dovuta allo STEPANOFF, noi preferiamo di dedurlo da alcune considerazioni e da un teorema, che qui proveremo e che ne estende un altro dovuto a BURKILL e HASHAM-JONES, considerazioni e teorema che sono molto utili anche per altre ricerche.

2. - La funzione $f(x, y)$ che supporrò definita nel quadrato

$$Q: \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad ([7]),$$

è ivi a variazione limitata ([8]) se, indicata con $V_y(\bar{x}, y_0)$ $(0 \leqslant \bar{x} \leqslant 1, 0 \leqslant y_0 \leqslant 1)$ la variazione totale della funzione della sola y, $f(\bar{x}, y)$ per y variabile in $(0, y_0)$ e con $V_x(x_0, \bar{y})$ $(0 \leqslant x_0 \leqslant 1, 0 \leqslant \bar{y} \leqslant 1)$ quella della $f(x, \bar{y})$ per x variabile in $(0, x_0)$, le due funzioni $V_y(x, 1)$, $V_x(1, y)$, rispettivamente della x e della y, sono finite in quasi tutto $(0, 1)$, quasi continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE).

Ad ogni funzione $f(x, y)$ a variazione limitata vengono così a corrispondere due funzioni $V_x(x, y)$ e $V_y(x, y)$ definite in Q e se la $f(x, y)$ è in Q continua, le $V_x(x, y)$ e $V_y(x, y)$ risultano quasi continue; ciò non è però più vero se la $f(x, y)$ è in Q soltanto quasi continua; è precisamente, in questo caso generale, l'ipotesi della quasi continuità superficiale delle $V_x(x, y)$ e $V_y(x, y)$ che BURKILL E HASLAM-JONES hanno aggiunto per dimostrare la differenziabilità totale asintotica quasi dappertutto della $f(x, y)$.

Come ho già detto, prenderò senz'altro in esame *le funzioni quasi continue* $f(x,y)$ *generalmente a variazione limitata*, e richiamo la loro definizione ([9]): « Una funzione $f(x, y)$ è, nel quadrato fondamentale Q di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$, *generalmente a variazione limitata*, se esiste un insieme E di punti di Q di misura superficiale nulla, tale che, indicate con $V_x(x_0, y)$, $V_y(x, y_0)$ $(0 \leqslant x_0 \leqslant 1,$ $0 \leqslant y_0 \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$ le variazioni totali della $f(x, y)$ considerata rispet-

([6]) L. TONELLI: *Sulle funzioni generalmente a variazione limitata*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (1936), pp. 315-320.

([7]) Ciò solo per semplicità, valendo, tutto quel che dirò, per funzioni $f(x, y)$ definite in un *campo* (insieme misurabile) qualunque A del piano (x, y).

([8]) Intenderò sempre, d'ora in poi, a variazione limitata, secondo TONELLI.

([9]) Cfr. L. TONELLI, loc. cit. in ([6]) e L. CESARI: *Sulle funzioni a variazione limitata*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1936, pp. 299-313.

tivamente come funzione della sola x in $(0, x_0)$ e della sola y in $(0, y_0)$ — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ nei punti di E — le $V_x(1, y)$ e $V_y(x, 1)$ risultino, come funzioni rispettivamente di y e di x nell'intervallo $(0, 1)$, quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE) ».

3. - L. CESARI (loc. cit. in [9]), sviluppando, fra l'altro, per altre ricerche, un'osservazione del TONELLI [10], e partendo dalla funzione $f(x, y)$ quasi continua e generalmente a variazione limitata in Q, costruisce [11] una funzione quasi continua in Q, $\bar{f}(x, y)$, la quale è quasi dappertutto in Q uguale alla $f(x, y)$ e gode inoltre della proprietà che, se $\bar{x}$ è un punto non appartenente ad un opportuno insieme a_x di $(0, 1)$ di misura lineare nulla, la $\bar{f}(\bar{x}, y)$ considerata come funzione soltanto della y è a variazione limitata, ha sole discontinuità a destra ed è continua per $y=0$. Per questa $\bar{f}(\bar{x}, y)$ vale perciò il noto teorema [12] secondo il quale le somme $\sum_1^n |\bar{f}(\bar{x}, y_{i+1}) - \bar{f}(\bar{x}, y_i)|$ $(0=y_1<y_2< \dots <y_n=1)$ tendono uniformemente alla variazione totale della $\bar{f}(\bar{x}, y)$ in $(0, 1)$ quando tende a zero la massima parte in cui i punti y_i dividono l'intervallo $(0, 1)$. Indico con $\bar{V}_y(x, y)$ la variazione totale della $\bar{f}(x, y)$, considerata come funzione della sola y sull'intervallo $(0, y)$, dove è $0 \leq y \leq 1$ (variazione totale che è calcolata tenendo conto di *tutti* i valori assunti dalla $\bar{f}(x, y)$). È allora facile dedurre, col solito ragionamento che si fa per le funzioni continue [13], che per ogni $\bar{x}$ non appartenente ad a_x, la $\bar{V}_y(\bar{x}, y)$ è funzione di y continua a sinistra. Inoltre, come ha mostrato il CESARI [14], per ogni $\bar{y}$ di $(0, 1)$ la $\bar{V}_y(x, \bar{y})$ è funzione quasi continua di x in $(0, 1)$.

4. - Mi propongo ora di dimostrare che *la $\bar{V}_y(x, y)$ è funzione quasi continua, come funzione di (x, y), in tutto Q.* Per questo, osservo anzitutto che, essendo l'insieme a_x di misura lineare nulla, sul segmento $(0, 1)$ dell'asse delle x è possibile costruire un plurintervallo aperto $\Delta_{a_x} < \frac{1}{2n}$, con n intero positivo, che racchiuda tutti i punti di a_x. Chiamo poi A_x l'insieme, di misura superficiale nulla, dei punti (x, y) di Q in cui x appartiene ad a_x ed è $0 \leq y \leq 1$, e scelgo un insieme

---

[10] L. TONELLI: *Serie Trigonometriche*. Bologna, Zanichelli, 1928, pag. 449, nota 1.

[11] Cfr. loc. cit. in [9], pp. 303-305.

[12] Il teorema nella forma più generale trovasi in L. TONELLI: *Sopra alcuni polinomi di approssimazione*. Annali di Matematica, t. XXV, s. III, 1916, pp. 275-316, n.° 14. Per le funzioni continue verso destra tale teorema fu ritrovato recentemente da T. VIOLA: *Funzioni a variazione limitata continue verso destra*. Rendiconti Accademia dei Lincei, 1932, vol. XV, pp. 626-629.

[13] L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I, pag. 43. Zanichelli, Bologna, 1921.

[14] Cfr. loc. cit. in [9], pag. 305.

numerabile uniformemente denso di punti y_i di (0, 1) (per esempio l'insieme dei punti di ordinata razionale di (0, 1) dell'asse delle y). Per la quasi continuità in (0, 1) della funzione della sola x, $\overline{V}_y(x, y_1)$, è possibile costruire sul segmento (0, 1) dell'asse delle x un plurintervallo aperto $\Delta_1 < \frac{1}{n \cdot 2^2}$ a prescindere dal quale la $\overline{V}_y(x, y_1)$ è funzione, della sola x, continua; analogamente è possibile costruire un plurintervallo aperto $\Delta_2 < \frac{1}{n \cdot 2^3}$ sul segmento (0, 1) dell'asse delle x, a prescindere dal quale la $\overline{V}_y(x, y_2)$ è funzione, della sola x, continua; e così, in generale, è possibile costruire un plurintervallo aperto $\Delta_m < \frac{1}{n \cdot 2^{m+1}}$ sul segmento (0, 1) dell'asse delle x a prescindere dal quale la $\overline{V}_y(x, y_m)$ è funzione, della sola x, continua. Costruisco ora un plurintervallo aperto Δ tale che sia

$$\Delta \leqslant \Delta_{a_x} + \Sigma \Delta_m < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2 \cdot n}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m} + \dots\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

e che contenga tutti gli intervalli di Δ_{a_x}, $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \dots$ L'insieme $\overline{\Delta}$ dei punti (x, y) tali che x appartenga a Δ, e $0 \leqslant y \leqslant 1$, che è quindi formato da un numero finito o da una infinità numerabile di rettangoli non sovrapponentisi, coi lati paralleli all'asse delle y di lunghezza uguale all'unità, ha misura superficiale $< \frac{1}{n}$. $\overline{\Delta}$ contiene inoltre tutti i punti di A_x. Chiamando Q' l'insieme $Q - \overline{\Delta}$, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di Q' e di continuità per la $\bar{f}(\bar{x}, y)$ come funzione della sola y, e quindi di continuità per la $\overline{V}_y(\bar{x}, y)$ considerata come funzione della sola y, è possibile, in corrispondenza a un numero positivo arbitrario ε, determinare due numeri $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che si abbia

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y}) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \end{array} \right.$$

e si può sempre fare in modo che i punti $(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2)$, $(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1)$ cadano su due rette del sistema $y = y_i$. Si può poi trovare un numero $\delta^* > 0$ tale che, per tutti gli x soddisfacenti alla $|x - \bar{x}| \leqslant \delta^*$ e se i punti $(x, \bar{y} + \delta_2)$ $(x, \bar{y} - \delta_1)$ appartengono a Q', si abbia

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} |\overline{V}_y(x, \bar{y} + \delta_2) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\overline{V}_y(x, \bar{y} - \delta_1) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{array} \right.$$

Se (x, y) è un punto qualunque di Q' con $|x - \bar{x}| \leqslant \delta^*$, $\bar{y} - \delta_1 \leqslant y \leqslant \bar{y} + \delta_2$, essendo la $\overline{V}_y(x, y)$ funzione non decrescente di y per ogni x fissato e osservando che i punti $(x, \bar{y} + \delta_2)$ $(x, \bar{y} - \delta_1)$ appartengono necessariamente a Q', dalle (1) e (2) si deduce

$$|\overline{V}_y(x, y) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon.$$

La $\overline{V}_y(x, y)$ è così continua in $(\bar{x}, \bar{y})$ a prescindere dai punti di $\overline{\Delta}$. Si osservi ora che essendo su ogni parallela all' asse delle y, tranne quelle appartenenti a $\overline{\Delta}$, la $\overline{f}(x, y)$ a variazione limitata, su ognuna di tali parallele esistono al più un' infinità numerabile di punti di discontinuità per la $\overline{f}(x, y)$. Essi complessivamente costituiscono quindi (come facilmente si vede) un insieme di misura superficiale nulla, e per quanto sopra si è notato, si può dire che quasi dappertutto in Q' la $\overline{V}_y(x, y)$ è funzione continua, e, pertanto, che essa è quasi continua in Q, essendo la misura di $Q - Q'$ uguale a quella di $\overline{\Delta}$ e perciò $< \frac{1}{n}$, con n intero positivo arbitrario.

5\. - Di quanto si è stabilito al numero precedente darò una seconda dimostrazione. Osservo subito che, per il nostro scopo, si può senz'altro trascurare l'insieme A_x definito al n.° 4. Scelto anche qui un insieme numerabile uniformemente denso di punti y_i di $0 \leqslant y \leqslant 1$, dico Λ l'insieme dei punti di $Q - A_x$ per cui è $\overline{V}_y(x, y) > m$, m essendo un numero fissato arbitrariamente. Essendo misurabile linearmente (n.° 3) la funzione di x, $\overline{V}_y(x, y_i)$ (in cui suppongo fissato y_i), è misurabile linearmente l'insieme dei punti λ_{y_i} di $Q - A_x$ che cadono sulla retta $y = y_i$ e per cui è $\overline{V}_y(x, y_i) > m$. Chiamo Λ_{y_i} l'insieme di tutti i punti (x, y) di Q tali che x sia l'ascissa di un punto di λ_{y_i} e $y_i \leqslant y \leqslant 1$. Come è noto, Λ_{y_i} risulta superficialmente misurabile (è anzi la misura di Λ_{y_i} uguale a quella di λ_{y_i} moltiplicata per $(1 - y_i)$). Poichè $\overline{V}_y(x, y)$ è funzione non decrescente di y per ogni x fissato, Λ_{y_i} fa parte di Λ. Se poi (x_0, y_0) è un punto di $Q - A_x$ per cui è $\overline{V}_y(x_0, y_0) > m$, dico che allora esso dovrà appartenere a un Λ_{y_i}. Infatti, non appartenendo x_0 ad a_x, la funzione $\overline{V}_y(x_0, y)$ è continua a sinistra come funzione di y, e quindi alla sinistra di (x_0, y_0) sulla retta $x = x_0$ esiste un intorno in cui è sempre $\overline{V}_y(x_0, y) > m$ e in tale intorno un punto y_j per cui è anche $\overline{V}_y(x_0, y_j) > m$. È così visto che (x_0, y_0) appartiene a Λ_{y_j}. Risulta dunque $\Lambda = \Sigma \Lambda_{y_i}$, da cui segue che Λ è misurabile superficialmente. La $\overline{V}_y(x, y)$ è pertanto superficialmente misurabile in $Q - A_x$ e perciò anche in Q.

6\. - Analogamente a quanto si è fatto per la $\overline{f}(x, y)$, si può costruire in Q una funzione quasi continua $\overline{\overline{f}}(x, y)$, quasi dappertutto uguale alla $f(x, y)$, per la quale la corrispondente variazione totale, come funzione della sola x, $\overline{\overline{V}}_x(x, y)$ risulta quasi continua come funzione di (x, y) in tutto Q, e inoltre la $\overline{\overline{V}}_x(\bar{x}, y)$ è funzione quasi continua della y in $(0, 1)$ per ogni $\bar{x}$ di $(0, 1)$. Ne viene allora, analogamente a quanto ha fatto vedere il Cesari ([15]), che si può determinare un insieme E' contenente E (n.° 2) di punti di Q, di misura superficiale nulla, in modo che, dette $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ le variazioni totali della $f(x, y)$, calcolate senza tenere alcun conto dei valori della $f(x, y)$ in E', si abbia, quasi dappertutto in Q, $V_x^*(x, y) = \overline{\overline{V}}_x(x, y)$, $V_y^*(x, y) = \overline{V}_y(x, y)$ — donde risulta che $V_x^*(x, y)$

([15]) Cfr. loc. cit. in ([9]), pag. 305.

e $V_y^*(x, y)$ sono funzioni di (x, y) quasi continue in Q — e in modo anche che $V_x^*(\bar{x}, y)$ e $V_y^*(x, \bar{y})$ risultino funzioni quasi continue rispettivamente di y e di x per tutti gli $\bar{x}$ e $\bar{y}$ di $(0, 1)$. Essendo poi $V_x^*(x, y) \leqslant V_x(1, y)$, $V_y^*(x, y) \leqslant V_y(x, 1)$, le $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ risultano finite quasi dappertutto in Q, e le $V_x^*(1, y)$, $V_y^*(x, 1)$ risultano, come funzioni rispettivamente di y e di x, integrabili in $(0, 1)$.

7. - Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA: *Se $f(x, y)$ è una funzione quasi continua in Q ed ivi generalmente a variazione limitata, dato un numero positivo arbitrario σ, esistono un numero positivo N ed un insieme E^* di punti di Q, tali che si abbia $m(Q) - m(E^*) < \sigma$* [16], *e*

$$\frac{|f(x', y') - f(x, y)|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \leqslant N,$$

per ogni coppia (x, y), (x', y') di punti di E^*.

Senza restrizione per la generalità della proposizione che si vuole dimostrare, si può sempre supporre che $f(x, y)$ sia quasi continua linearmente sui lati del quadrato Q. Si può anche supporre che su questi lati l'insieme E' (considerato al n.° 6) abbia soltanto punti costituenti insiemi lineari di misura nulla. Si dica J l'insieme delle rette parallele all'asse x su cui $V_x^*(1, y)$ [17] non risulti finita, di quelle pure parallele all'asse x su cui l'insieme E' sechi insiemi di misura lineare non nulla od eventualmente non misurabili (linearmente), ed infine di quelle, sempre parallele all'asse delle x, che passano per i punti $(0, y)$ appartenenti ad E'. L'insieme dei valori y' corrispondenti a tutte queste parallele risulta di misura lineare nulla.

Sull'insieme E'' costituito dai punti del quadrato Q che non appartengono alle rette del sistema J, nè all'insieme E', si definiscano le due funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ mediante le due eguaglianze [17]:

$$(1) \qquad \begin{cases} V_x^*(x, y) = P(x, y) + Q(x, y) \\ f(x, y) - f(0, y) = P(x, y) - Q(x, y), \end{cases}$$

da cui risulta che, essendo

$$P(x, y) = \frac{V_x^*(x, y) + f(x, y) - f(0, y)}{2}$$

$$Q(x, y) = \frac{V_x^*(x, y) - f(x, y) + f(0, y)}{2},$$

le $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono in E'' (per quanto si è visto al n.° 6) funzioni quasi continue di (x, y) e, inoltre, funzioni non negative e non decrescenti di x per ogni y

(16) Con $m(Q)$ e $m(E^*)$ indico le misure di Q e di E^*.

(17) Si tenga presente che $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ sono calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ sull'insieme E' (considerato al n.° 6).

fissato. Se $y = y_0$ è una retta non appartenente all'insieme J, l'insieme dei punti π_{y_0} che E'' sega su essa ha misura lineare eguale a 1. Chiamo ω_{y_0} l'insieme (di misura lineare nulla) complementare di π_{y_0} rispetto al segmento (0, 1), su cui quindi $P(x, y_0)$ e $Q(x, y_0)$ non sono definite. Poichè $P(x, y_0)$ nell'insieme π_{y_0} è funzione finita non decrescente, non negativa di x, se $\bar{x}$ è un punto di ω_{y_0}, esisterà finito il limite di $P(x, y_0)$ per $x \to \bar{x} - 0$, con (x, y_0) appartenente a π_{y_0}; assumo tale limite come valore di $P(x, y_0)$ nel punto $(\bar{x}, y_0)$. Così facendo per ogni punto di ω_{y_0}, e ponendo $P(x, y_0) = 0$ per $x < 0$ e $P(x, y_0) = P(1, y_0)$ per $x > 1$, la $P(x, y_0)$ viene ad essere definita su tutta la retta $y = y_0$, su cui risulta non negativa, non decrescente. Per ogni punto (x, y) di Q in cui la $P(x, y)$ risulta così definita (quindi esclusi *tutti e soli* i punti (x, y') essendo $y = y'$ una retta del sistema J), si indichi con $p(x, y)$ l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{P(x+h, y) - P(x, y)}{h} \right|$$

considerata per tutti i valori di $h \neq 0$.

Mostrerò anzitutto che $p(x, y)$ è funzione quasi continua di (x, y). Se $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n, \ldots$ è un insieme numerabile uniformemente denso di numeri non nulli dell'intervallo $(-1, 1)$, per essere la $P(x, y)$ funzione non decrescente di x, per ogni y fissato $(y \neq y')$, si può considerare $p(x, y)$ come estremo superiore dell'espressione:

$$\left| \frac{P(x+h_r, y) - P(x, y)}{h_r} \right|.$$

Poichè l'espressione entro il segno di valore assoluto è, per ogni h_r, funzione quasi continua di (x, y), tale è $p(x, y)$ come estremo superiore di un insieme numerabile di tali funzioni.

Fissato ora un numero positivo L e detto e l'insieme dei punti (x, y) in cui è $p(x, y) > \frac{1}{8} L$, si consideri la sezione $e(y_0)$ di e con la retta $y = y_0$ e si osservi che ad ogni punto di $e(y_0)$ è associato almeno un segmento, di lunghezza $|\bar{h}|$ della retta $y = y_0$, che ha tale punto come estremo e per cui è:

$$\left| \frac{P(x+\bar{h}, y) - P(x, y)}{\bar{h}} \right| > \frac{1}{8} L.$$

Ricordando un lemma del VITALI [18], si può scegliere un numero finito di

---

[18] Il lemma è il seguente:

« Sia E un insieme lineare di misura esterna finita $m_e(E)$. Supponiamo che ad ogni punto P di E siano associati uno o più intervalli chiusi contenenti P come punto interno o come estremo. Dato allora un numero $\varepsilon > 0$, si può scegliere un insieme $\mathcal{E}$ di un numero finito di intervalli associati non sovrapponentisi tali che $m(\mathcal{E}) > \frac{1}{3} m_e(E) - \varepsilon$ ».

In una forma leggermente diversa, ma del resto perfettamente equivalente, esso si trova in VITALI: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*. Atti Accademia Scienze, Torino, vol. XLIII, 1908, pag. 230.

tali segmenti in modo che risultino non sovrapponentisi e che, dette $|\bar{h}_1|$, $|\bar{h}_2|, \ldots,$ $|\bar{h}_s|$ le loro lunghezze, risulti

$$m(e(y_0)) \leqslant 4 \sum_1^s |\bar{h}_i| < 4 \cdot 8L^{-1} \sum_1^s | P(x+\bar{h}_i, y) - P(x, y) | <$$
$$< 32L^{-1}P(1, y_0) \leqslant 32L^{-1} V_x^*(1, y_0).$$

Da qui integrando si ha:

$$m(e) = \int_0^1 m(e(y))dy < 32L^{-1} \int_0^1 V_x^*(1, y)dy = AL^{-1},$$

dove A è una costante positiva indipendente da L.

Ragionando analogamente su $Q(x, y)$ come si è fatto su $P(x, y)$, si ha, per la seconda delle uguaglianze (1),

$$\left| \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \right| \leqslant \frac{1}{8} L + \frac{1}{8} L = \frac{1}{4} L, \tag{2}$$

essendo (x, y) e $(x+h, y)$ due punti qualunque del quadrato Q, purchè non appartenenti ad un certo insieme di misura superficiale $< 2AL^{-1}$.

Analogamente si dimostra che in un insieme corrispondente è

$$\left| \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \right| \leqslant \frac{1}{4} L. \tag{3}$$

Preso dunque un $\sigma > 0$ ad arbitrio, si possono trovare un numero $L > 0$ ed un insieme chiuso H di punti di Q tali che $m(Q) - m(H) < \frac{\sigma}{3}$ ed in modo che quando (x, y) appartiene ad H valga la (2) se anche $(x+h, y)$ appartiene ad H e valga pure la (3) se anche $(x, y+k)$ appartiene ad H.

Si indichi ora con Δ un insieme chiuso di punti di Q tale che $m(Q) - m(\Delta) < \frac{\sigma}{3}$ e sul quale la $f(x, y)$ risulti funzione continua, e si dica M il massimo modulo di $f(x, y)$ su Δ. Si esamini l'insieme chiuso $\bar{E}$ dei punti comuni ad H e a Δ. È $m(\bar{E}) > m(Q) - \frac{2\sigma}{3}$. Segando l'insieme $\bar{E}$ con la retta $y = \bar{y}$ si ottiene un insieme lineare $\bar{E}_{\bar{y}}$ chiuso (e quindi misurabile). Quasi tutti i punti di $\bar{E}_{\bar{y}}$ sono, per un noto teorema del LEBESGUE, punti di densità lineare 1 (rispetto a $\bar{E}_{\bar{y}}$); e questi punti di densità lineare 1 costituiscono un insieme $\bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$ di cui ogni punto è quindi di densità lineare 1 rispetto all'insieme $\bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$ stesso (avendo escluso dall'insieme $\bar{E}_{\bar{y}}$ solo l'insieme di misura lineare nulla $\bar{E}_{\bar{y}} - \bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$). Si indichi ora con $\bar{\bar{E}}$ l'insieme superficiale di tutti i punti degli $\bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$ per tutti gli $\bar{y}$. Questo insieme $\overline{\overline{E}}$ è misurabile superficialmente ([19]). È poi $m(\overline{\overline{E}})=m(\overline{E})>m(Q)-\frac{2\sigma}{3}$. Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un qualunque punto di $\overline{\overline{E}}$ e si dica $m(\bar{x}, \bar{y}, n)$ la misura dell'insieme dei punti di $\overline{\overline{E}}$ che cadono nell'intervallo di ampiezza $\frac{2}{n}$ della retta $y=\bar{y}$ e avente il centro in $(\bar{x}, \bar{y})$. Si ponga $\varphi_n(x, y)=\frac{n}{2}\, m(\bar{x}, \bar{y}, n)$. Le funzioni $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$,...., $\varphi_n(x, y)$,.... definite in $\overline{\overline{E}}$ sono ivi quasi continue ([20]) e convergono in tutto $\overline{\overline{E}}$ al valore 1, per $n\to\infty$; per il noto teorema di SEVERINI-EGOROFF è quindi possibile determinare un insieme chiuso E^* di punti di $\overline{\overline{E}}$ soddisfacente alla condizione $m(E^*)>m(\overline{\overline{E}})-\frac{\sigma}{3}>m(Q)-\sigma$ e in cui la convergenza di $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$,...., $\varphi_n(x, y)$,.... verso il valore 1 è uniforme. È dunque possibile trovare un $\bar{n}>8$ tale che, *per ogni indice* $n\geqslant\bar{n}$ *e per ogni punto* (x, y) *di* E^* *si abbia* $\varphi_n(x, y)>\frac{8}{9}$; e allora, se è $0<\delta\leqslant\frac{1}{\bar{n}}$, posto $\frac{1}{n_1+1}<\delta\leqslant\frac{1}{n_1}$, si avrà per un qualunque punto (x', y') di E^*, e indicando con $\overline{\overline{E}}(2\delta)$ l'insieme dei punti di $\overline{\overline{E}}$ che cadono nell'intervallo $(x'-\delta, x'+\delta)$ della retta $y=y'$:

$$m[\overline{\overline{E}}(2\delta)]\geqslant m(x', y', n_1)-\left(\frac{2}{n_1}-\frac{2}{n_1+1}\right)=m(x', y', n_1)-$$
$$-\frac{2}{n_1(n_1+1)}>\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{n_1}-\frac{2}{9n_1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{n_1}\geqslant\frac{7}{9}\cdot 2\delta.$$

Se ora (x, y) e (x', y') sono due punti qualunque di E^* con $|x-x'|\leqslant\frac{1}{\bar{n}}$, i punti di $\overline{\overline{E}}$ che cadono nell'intervallo di estremi (x', y'), (x, y'), come pure quelli che cadono nell'intervallo (di uguale ampiezza $\bar{\delta}=|x-x'|$) di estremi (x, y), (x', y), costituiscono due insiemi ciascuno di misura $>\frac{5}{9}\,\bar{\delta}$.

Ne segue che esisterà necessariamente una retta $x=x^*$, con x^* compreso fra x e x', tale che i punti (x^*, y') e (x^*, y) appartengano entrambi ad $\overline{\overline{E}}$. È allora, per le (2) e (3) (e poichè $\overline{\overline{E}}$ appartiene ad H):

$$\frac{|f(x, y)-f(x', y')|}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\leqslant\left|\frac{f(x', y')-f(x^*, y')}{x'-x^*}\right|+\left|\frac{f(x^*, y')-f(x^*, y)}{y'-y}\right|+$$
$$+\left|\frac{f(x^*, y)-f(x, y)}{x^*-x}\right|\leqslant\frac{1}{4}\,L+\frac{1}{4}\,L+\frac{1}{4}\,L=\frac{3}{4}\,L<L.$$

([19]) Per questo basta osservare che, dicendo $\varphi(x, y)$ la funzione caratteristica relativa all'insieme $\overline{E}$, la funzione $\psi(x, y)=\int_0^x\varphi(x, y)dx$ è superficialmente misurabile (cfr. L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti.* Rendic. Accad. Lincei, 1909, XVIII, pag. 248) e che tale è anche $\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}$; donde segue che è superficialmente misurabile l'insieme dei punti in cui è $\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}=1$.

([20]) Infatti, detta $\varphi(x, y)$ la funzione caratteristica dell'insieme $\overline{\overline{E}}$, è

$$\varphi_n(x, y)=\frac{n}{2}\left\{\int_0^{x+\frac{1}{n}}\varphi(x, y)dx-\int_0^{x-\frac{1}{n}}\varphi(x, y)dx\right\}.$$

Se, infine, (x, y) e (x', y') sono due punti di E^* per cui è $|x-x'|>\frac{1}{\bar{n}}$, si ha

$$\frac{|f(x, y)-f(x', y')|}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\leq 2M\bar{n}.$$

Se si dice ora N il più grande dei due numeri L e $2M\bar{n}$, si può dire che, prefissato arbitrariamente un $\sigma>0$, è stato possibile trovare un numero $N>0$ ed un insieme E^* di Q tale che $m(Q)-m(E^*)<\sigma$ in modo che, se (x, y) e (x', y') sono due punti qualunque di E^*, si abbia:

$$\frac{|f(x, y)-f(x', y')|}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\leq N.$$

Il teorema è così dimostrato.

8. - Dalla proposizione precedente e per un teorema di RADEMACHER-STEPANOFF segue che la $f(x, y)$, considerata soltanto sull'insieme E^*, è totalmente differenziabile (nel senso di STOLZ) quasi dappertutto in E^*; e poichè, per il già ricordato teorema del LEBESGUE, quasi tutti i punti di E^* sono punti di densità superficiale eguale a 1, si può affermare che in quasi tutti i punti di E^* la densità superficiale di E^* è 1, e la $f(x, y)$ è, considerata soltanto su E^*, totalmente differenziabile (nel senso di STOLZ). Se (x_0, y_0) è uno di tali punti, vuol dire che esiste un insieme misurabile (l'insieme E^*) avente nel punto (x_0, y_0) densità superficiale 1, in modo che, se (x_0+h, y_0+k) è un punto qualunque di E^*, si abbia:

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=A(x_0, y_0)h+B(x_0, y_0)k+ \\ +\sqrt{h^2+k^2}\,R(x_0, y_0;\ h, k)$$

con $R(x_0, y_0;\ h, k)\to 0$ quando $\sqrt{h^2+k^2}\to 0$, il limite essendo considerato soltanto per i punti (x_0+h, y_0+k) di E^*. Perciò, considerando ora la $f(x, y)$ su *tutto* Q, risulta che essa è asintoticamente differenziabile in (x_0, y_0) e quindi quasi dappertutto in E^*. Poichè il numero $\sigma>0$ del teorema del n.° 7 è arbitrario, ne viene che la $f(x, y)$ è asintoticamente differenziabile *quasi dappertutto in* Q. E siccome ogni funzione a variazione limitata è anche generalmente a variazione limitata, si può enunciare il risultato:

« *Ogni funzione* $f(x, y)$ *quasi continua, la quale sia a variazione limitata, o* (*più in generale*) *generalmente a variazione limitata, è asintoticamente differenziabile quasi dappertutto nel campo* ([21]) *in cui è definita* ».

([21]) Cfr. nota ([7]).