SILVIO CINQUINI

Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 1 (1939), p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_1_0>

PROBLEMI DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI (NON LINEARI) DEL SECONDO ORDINE (*)

di SILVIO CINQUINI (Pisa).

In una recente Nota (1) mi sono occupato di problemi di valori al contorno relativi ad alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie non lineari, ed ho messo in rilievo che, sotto opportune condizioni, l'esistenza della soluzione di tali problemi può dimostrarsi rapidamente, quando si riconduca tale questione ad un problema di Calcolo delle Variazioni e si faccia uso dei teoremi di esistenza dell'estremo forniti dai metodi diretti.

Anche il presente lavoro è dedicato a problemi di valori al contorno relativi ad equazioni differenziali ordinarie (non lineari), ma il metodo seguito, che si giova di considerazioni di carattere elementare, è completamente diverso da quello della Nota precedente e pertanto riesce utile sotto condizioni differenti da quelle della citata Nota.

Dei problemi in questione si sono occupati parecchi Autori fra i quali, oltre al PICARD e al NICCOLETTI, sono da citare C. SEVERINI (2), R. CACCIOPPOLI (3) e G. SCORZA-DRAGONI (4).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) S. CINQUINI: *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali non lineari.* (Bollettino Unione Matematica Italiana, A. XVII (1938)).

(2) C. SEVERINI: *Sopra gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo, con valori prestabiliti in punti dati.* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1904-1905), pp. 853-869).

(3) R. CACCIOPPOLI: *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. XI (1930), pp. 794-799). - *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti* (idem, Vol. XIII, (1931), pp. 498-502).

Altri lavori dello stesso A. trovansi nei Rend. del Seminario Matematico di Padova, Vol. III (1932) e nei Rend. del Seminario Matematico di Roma, Vol. I (1931-1933), Parte I.

(4) G. SCORZA-DRAGONI: *Il problema dei valori limiti studiato in grande per gli integrali di un'equazione differenziale del secondo ordine.* (Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. 69 (1931), pp. 77-112 e Mathematische Annalen, Vol. 105 (1931), pp. 133-143). *A prcposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per un'equazione differenziale del secondo ordine.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. XXII (1935), pp. 44-48).

Quest'ultimo Autore si è occupato delle equazioni del secondo ordine, per le quali ha dato, fra l'altro, il seguente teorema:

Se $\varphi(x, y, y')$ *è continua e limitata nel cilindro*

$$C:\quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad -\infty < y' < +\infty, \qquad (y_1(x) \leqslant y_2(x))$$

e se l'equazione

$$y'' = \varphi(x, y, y') \tag{I}$$

ha $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *come integrali in tutto* $a \leqslant x \leqslant b$, *essa ammette sempre una soluzione,* $y_0(x)$, *per la quale sia*

$$y_0(x_0) = y_0, \qquad y_0(x_1) = y_1,$$

se

$$a \leqslant x_0 < x_1 \leqslant b, \qquad y_1(x_0) \leqslant y_0 \leqslant y_2(x_0), \qquad y_1(x_1) \leqslant y_1 \leqslant y_2(x_1) \quad (^5).$$

La dimostrazione di questo teorema data dall'Autore (dimostrazione che va opportunamente corretta ([6])) sfrutta un teorema di unicità, provato nella Nota stessa, ed è basata su un risultato ottenuto dal CACCIOPPOLI con considerazioni topologiche, che parecchi anni prima avevano introdotte BIRKHOFF e KELLOG. Il CACCIOPPOLI considera l'equazione differenziale

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{II}$$

dove F, definita per $a \leqslant x \leqslant b$, *e per ogni sistema di valori degli altri argomenti, è continua e limitata,* e dimostra che *esistono integrali dell'equazione* (II) *assumenti in n punti qualunque valori prestabiliti.*

Quest'ultimo Autore si occupa anche del caso, in cui *la funzione F non sia limitata, ma, posto* $\omega = \sqrt{y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2}$, *sia*

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{F}{\omega} = 0,$$

uniformemente rispetto ad x, imponendo per condizioni al contorno una qualunque di quelle valevoli a determinare un polinomio di grado $n-1$.

Nel presente lavoro mi propongo, innanzi tutto, di dare una dimostrazione di carattere elementare ([7]) del teorema sopra citato dello SCORZA-DRAGONI, riprendendo, con opportuni accorgimenti, il metodo del SEVERINI che si basa sulla consi-

---

([5]) Vedi luogo cit. per ultimo in ([4]), pag. 45. Nelle due ultime disuguaglianze di tale enunciato vi è una svista tipografica ed esse devono essere sostituite da quelle da noi sopra scritte.

([6]) Infatti le funzioni $\varphi_1(x, y, y')$ e $\varphi_2(x, y, y')$ — contrariamente a quanto afferma l'A. — *non sono* sempre *crescenti* rispetto ad y, perchè la $\varphi(x, y, y')$ *non* è supposta diversa da zero.

([7]) Rileviamo che anche lo SCORZA-DRAGONI dà una dimostrazione elementare di un caso particolare del teorema sopra riportato: nell'ipotesi che la funzione φ soddisfi alla condizione di LIPSCHITZ rispetto alle y e y'. (Vedi luogo cit. per secondo in ([4]), pp. 137-138).

derazione di equazioni differenziali il cui secondo membro approssima il secondo membro della (I) ed è lipschitziano (l'approssimazione viene fatta, in tutto il § 1, mediante funzioni razionali intere, opportunamente modificate per valori sufficientemente grandi delle variabili): ciò permette di condurre la dimostrazione in modo da non aver bisogno di ricorrere al criterio di BIRKHOFF e KELLOG, (usato in seguito anche dal CACCIOPPOLI), sull'esistenza di un elemento unito in una trasformazione funzionale.

Il metodo che ho seguito per dimostrare la proposizione dello SCORZA-DRAGONI permette di dare parecchi nuovi teoremi, alcuni dei quali estendono quello del citato Autore al caso in cui la funzione φ, definita nel campo C, non sia limitata, ma soddisfi ad opportune condizioni; altri trattano invece il caso, analogo a quello considerato dal CACCIOPPOLI, in cui non si conosca alcun integrale dell'equazione differenziale in questione, ma si richieda un integrale, contenuto in una striscia del piano (x, y) a lati paralleli all'asse y, nella quale è definita la funzione φ, e congiungente due punti assegnati della striscia.

Si hanno così parecchi nuovi risultati che non sono contenuti nemmeno nella più generale proposizione del CACCIOPPOLI, la quale, nel caso $n=2$, viene anzi ad essere contenuta come caso particolare in uno dei teoremi del presente lavoro.

Con un nuovo metodo di dimostrazione che è anche esso di carattere elementare e che pure non fa uso del citato criterio di BIRKHOFF e KELLOG, stabilisco (§ 2) altri due nuovi teoremi. Questo secondo procedimento riesce anche più efficace del precedente, perchè tutta la dimostrazione viene svolta senza uscire dal campo C, di cui nell'enunciato della SCORZA-DRAGONI. A tal uopo l'approssimazione della funzione $\varphi(x, y, y')$ viene fatta mediante funzioni $\varphi_n(x, y, y')$, che non sono più polinomi, ma che sono ancora a rapporto incrementale limitato rispetto alle sole variabili y e y' e che vengono costruite in modo che le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$, di cui nell'enunciato dello SCORZA-DRAGONI, siano integrali anche di ognuna delle equazioni differenziali $y''=\varphi_n(x, y, y')$.

Per brevità, in tutta la presente Memoria, mi limito alla considerazione dei problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine; ma i semplicissimi procedimenti usati riescono pure utili, oltrechè per stabilire altri teoremi (alcuni dei quali evidenti) relativi ai problemi ora citati, anche per i problemi di valori limiti relativi ad equazioni differenziali ordinarie (non lineari) di ordine superiore al secondo, come si vedrà in prossimi lavori.

§ 1.

1. - TEOREMA I (dato dallo SCORZA-DRAGONI: nuova dimostrazione). *Sia $f(x, y, y')$ una funzione finita e continua nel campo*

$$C:\quad a\leq x\leq b,\qquad y_1(x)\leq y\leq y_2(x),\qquad -\infty<y'<+\infty,$$

ove $y_1(x) \leq y_2(x)$, $(a \leq x \leq b)$; *siano* $y_1(x)$ e $y_2(x)$, *in tutto* (a, b), *due integrali dell'equazione differenziale*

$$(1) \qquad y'' = f(x, y, y'),$$

e inoltre esista un numero finito M, *tale che, in tutto* C, *sia*

$$(2) \qquad |f(x, y, y')| \leq M;$$

allora se (x_i, y_i), $(i=0, 1)$ *sono due punti qualunque soddisfacenti alle disuguaglianze*

$$a \leq x_0 < x_1 \leq b, \qquad y_1(x_i) \leq y_i \leq y_2(x_i), \qquad (i=0, 1),$$

l'equazione (1) *ammette almeno una soluzione* $y = y_0(x)$, (x_0, x_1), *con*

$$(3) \qquad y_1(x) \leq y_0(x) \leq y_2(x),$$

la quale soddisfa alle condizioni

$$(4) \qquad y_0(x_0) = y_0, \qquad y_0(x_1) = y_1.$$

Infatti, si definisca in tutto il campo

$$C_\infty: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

una funzione $f_0(x, y, y')$ ponendo

$$f_0(x, y, y') \equiv f(x, y, y'), \quad \text{per ogni} \quad (x, y, y') \quad \text{di} \quad C;$$

$$f_0(x, y, y') \equiv \frac{(y - y_2(x))^2}{1 + (y - y_2(x))^2} + f(x, y_2(x), y'), \quad \text{per} \quad y > y_2(x);$$

$$f_0(x, y, y') \equiv -\frac{(y - y_1(x))^2}{1 + (y - y_1(x))^2} + f(x, y_1(x), y'), \quad \text{per} \quad y < y_1(x);$$

e si osservi che, in virtù della (2), risulta in tutto C_∞

$$(5) \qquad |f_0(x, y, y')| < M + 1.$$

Poi, posto

$$R = \left| \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right|, \qquad L_1 = R + (M+1)(x_1 - x_0),$$

e indicato con Γ il maggiore dei massimi moduli, in (x_0, x_1), delle funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$, poniamo

$$L_0 = \Gamma + 2L_1(x_1 - x_0).$$

Considerata una successione di funzioni razionali intere

$$P_n(x, y, y'), \qquad (n = 1, 2, ...),$$

la quale in tutto il campo

$$C_L: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \qquad -L_0 \leq y \leq L_0, \qquad -2L_1 \leq y' \leq 2L_1,$$

converga uniformemente alla funzione $f_0(x, y, y')$, si definisca, in tutto C_∞, una successione di funzioni

$$Q_n(x, y, y'), \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

ponendo, in tutto il campo C_L

$$Q_n(x, y, y') \equiv P_n(x, y, y');$$

poi, per ogni (x, y) relativo ad un punto di C_L,

$$Q_n(x, y, y') \equiv Q_n(x, y, 2L_1), \quad \text{per} \quad y' > 2L_1,$$
$$Q_n(x, y, y') \equiv Q_n(x, y, -2L_1), \quad \text{per} \quad y' < -2L_1,$$

e finalmente

$$Q_n(x, y, y') \equiv Q_n(x, L_0, y'), \quad \text{per} \quad y > L_0,$$
$$Q_n(x, y, y') \equiv Q_n(x, -L_0, y'), \quad \text{per} \quad y < -L_0.$$

Ogni funzione $Q_n(x, y, y')$, $(n=1, 2, \ldots)$ risulta continua e limitata in tutto C_∞, ed è ivi a rapporto incrementale limitato rispetto a tutte le sue variabili. Inoltre in virtù della (5) è possibile determinare un numero intero $\bar{n}$, in modo che, per ogni $n > \bar{n}$, risulti in tutto C_∞

$$(6) \qquad |Q_n(x, y, y')| < M+1.$$

Si consideri, per $n > \bar{n}$, l'equazione differenziale

$$(7) \qquad y'' = Q_n(x, y, y'),$$

e si osservi che, fissato comunque un valore $\bar{y}'$ dell'intervallo $(-L_1, L_1)$, esiste un integrale $y = \bar{y}_n(x)$ della (7), soddisfacente alle condizioni $\bar{y}_n(x_0) = y_0$, $\bar{y}_n'(x_0) = \bar{y}'$ e per il quale, in virtù della (6), è in tutto (x_0, x_1)

$$(8) \qquad |\bar{y}_n'(x)| \leqslant 2L_1;$$

inoltre, tenendo ancora conto della (6), per $\bar{y}' \geqslant L_1$ risulta sempre $\bar{y}_n'(x) \geqslant R$, e quindi $\bar{y}_n(x_1) \geqslant y_1$, e per $\bar{y}' \leqslant -L_1$ risulta sempre $\bar{y}_n'(x) \leqslant -R$, e quindi $\bar{y}_n(x_1) \leqslant y_1$.

Quindi, siccome la soluzione $y = \bar{y}_n(x)$ della (7) varia con continuità al variare di $\bar{y}'$ possiamo affermare che, per ogni $n > \bar{n}$, esiste almeno un valore di $\bar{y}'$ nell'intervallo $(-L_1, L_1)$, in corrispondenza del quale l'integrale $\bar{y}_n(x)$ della (7), che indicheremo con $y = y_n(x)$, soddisfa alle condizioni

$$(9) \qquad y_n(x_0) = y_0, \qquad y_n(x_1) = y_1.$$

Inoltre in tutto (x_0, x_1), e per $n > \bar{n}$, risulta

$$(10) \qquad |y_n'(x)| \leqslant 2L_1, \qquad |y_n(x)| \leqslant L_0,$$

cioè ogni punto $(x, y_n(x), y_n'(x))$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ appartiene al campo C_L, e quindi la funzione $y = y_n(x)$ è un integrale dell'equazione

$$y'' = P_n(x, y, y')$$

soddisfacente alle condizioni (9).

Ma per le (10) e per la (6) dalla successione $\{y_n(x)\}$ possiamo estrarre una successione parziale $\{y_{r_n}(x)\}$, in modo che questa successione e la $\{y'_{r_n}(x)\}$ convergano uniformemente in tutto (x_0, x_1) rispettivamente verso due funzioni $y_0(x)$, $y_0'(x)$, $\left(\text{con } y_0'(x) = \frac{dy_0(x)}{dx}\right)$. Ogni punto $(x, y_0(x), y_0'(x))$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ appartiene allora al campo C_L, e la funzione $y = y_0(x)$ è un integrale dell'equazione

$$y'' = f_0(x, y, y'),$$

e soddisfa alle condizioni (4).

Per provare il nostro asserto resta da dimostrare che sono verificate le (3).

Infatti ([8]), supposto che vi sia un valore x' dell'intervallo (x_0, x_1) per il quale sia $y_0(x') < y_1(x')$, consideriamo il massimo intervallo (x_0', x_1'), contenente x' e nel cui interno è sempre $y_0(x) < y_1(x)$; sarà $x_0 \leq x_0' < x_1' \leq x_1$, $y_0(x_0') = y_1(x_0')$, $y_0(x_1') = y_1(x_1')$.

In (x_0', x_1') vi dovrà essere almeno un valore ξ, per il quale la differenza $y_1(x) - y_0(x)$ avrà un massimo. Quindi sarà $y_1'(\xi) = y_0'(\xi)$, e, siccome $f_0(x, y, y')$ è, per $y < y_1(x)$, funzione crescente di y, risulterà

$$y_1''(\xi) - y_0''(\xi) = f_0(\xi, y_1(\xi), y_1'(\xi)) - f_0(\xi, y_0(\xi), y_1'(\xi)) > 0,$$

ma ciò è assurdo, perchè, essendo ξ un punto di massimo della differenza $y_1(x) - y_0(x)$, deve essere $y_1''(\xi) - y_0''(\xi) \leq 0$.

Dunque, in tutto (x_0, x_1), deve essere $y_1(x) \leq y_0(x)$, e siccome in modo analogo si prova che è $y_0(x) \leq y_2(x)$, il nostro teorema risulta con ciò provato.

2. - UN LEMMA DEL TONELLI.

Per estendere il teorema del n.° 1 al caso in cui la funzione $f(x, y, y')$ non sia limitata in tutto il campo C, è opportuno richiamare, in alcune forme particolari, un lemma del TONELLI ([9]).

([8]) G. SCORZA-DRAGONI ha dimostrato (vedi luogo cit. per ultimo in ([4])) il seguente teorema di unicità: *Se $f(x, y, y')$ è continua, crescente rispetto ad y, e se $y_0(x)$ e $y_1(x)$ sono due integrali dell'equazione $y'' = f(x, y, y')$ definiti nell'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$, e verificanti le $y_0(x_0) = y_1(x_0)$, $y_0(x_1) = y_1(x_1)$, allora è identicamente, in tutto (x_0, x_1), $y_0(x) = y_1(x)$.*

Ora questa proposizione è evidente in forza della semplice osservazione che noi facciamo nel testo.

([9]) Vedi L. TONELLI: *Sulle proprietà delle estremanti.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. III, (1934), pp. 231-237), n.° 8.

α). *Se $z(x)$ è una funzione, assolutamente continua nell'intervallo (a, b)' la quale per quasi-tutti gli x di (a, b) verifica la disuguaglianza*

$$|z'(x)| \leq \gamma(x)\,|z(x)| + \delta(x),$$

ove $\gamma(x)$ e $\delta(x)$ sono due funzioni non negative e integrabili ([10]) *sull'intervallo (a, b); posto*

$$\Phi = \int_a^b \{\gamma(x) + \delta(x)\}\, dx,$$

risulta in tutto (a, b)

$$|z(x)| \leq (1 + |z(a')|)e^{\Phi},$$

ove a' è un valore qualunque dell'intervallo (a, b).

β). *Se $u(x)$ è una funzione assolutamente continua, insieme con la sua derivata del primo ordine, sull'intervallo (a, b), se è in tutto (a, b) $u_1 \leq u(x) \leq u_2$, e se in quasi-tutto questo intervallo è verificata la disuguaglianza*

$$|u''(x)| \leq \gamma(u(x))u'^2(x) + \delta(x),$$

ove $\gamma(u)$ è non negativa e integrabile sull'intervallo (u_1, u_2) e $\delta(x)$ è non negativa e integrabile sull'intervallo (a, b), posto

$$\Phi = \int_{u_1}^{u_2} \gamma(u)\,du + \int_a^b \delta(x)\,dx,$$

risulta in tutto (a, b)

$$|u'(x)| \leq (1 + |u'(a')|)e^{\Phi},$$

ove a' è un valore qualunque dell'intervallo (a, b).

Basta riprendere il ragionamento del TONELLI, osservando che se (x_0, x) è un intervallo di (a, b) in cui è sempre $u'(x) \geq 1$, risulta

$$\left|\int_{x_0}^{x} \gamma(u(x))u'(x)\,dx\right| = \left|\int_{u(x_0)}^{u(x)} \gamma(u)\,du\right| \leq \int_{u_1}^{u_2} \gamma(u)\,du$$

γ). *Anche quando non si conoscono « a priori » i limiti superiore e inferiore della funzione $u(x)$ nell'intervallo (a, b), il lemma del capoverso β) continua a sussistere supponendo che esista finito l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(u)\,du$, e ponendo*

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(u)\,du + \int_a^b \delta(x)\,dx.$$

([10]) In tutto il presente lavoro l'integrabilità va intesa sempre nel senso del LEBESGUE.

3. - TEOREMA II.

Nel teorema I, alla condizione che la funzione $f(x, y, y')$ sia limitata in tutto C, possiamo sostituire la seguente:

Esistano due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$, non negative e integrabili sull'intervallo (a, b) in modo che, in tutto il campo C, sia verificata la disuguaglianza

$$|f(x, y, y')| \leq \varphi(x) + \psi(x) |y'|. \tag{11}$$

Ripetiamo la dimostrazione del n.° 1 con le seguenti modificazioni:

In virtù della (11) risulta in tutto C_∞

$$|f_0(x, y, y')| < 1 + \varphi(x) + \psi(x) |y'|. \tag{12}$$

Posto

$$H = \int_{x_0}^{x_1} \{2 + \varphi(x) + \psi(x)\} dx,$$

$$L_1 = (1 + R)e^H,$$

definiamo il campo C_L in modo analogo al n.° 1, e determiniamo $\bar{n}$ in modo che, per $n > \bar{n}$, risulti (in virtù della (12)) in C_L, e quindi anche in tutto C_∞,

$$|Q_n(x, y, y')| \leq 2 + \varphi(x) + \psi(x) |y'|. \tag{13}$$

Se $\bar{y}'$ è un qualunque numero reale, esiste un integrale $y = \bar{y}_n(x)$ della (7) soddisfacente alle condizioni $\bar{y}_n(x_0) = y_0$, $\bar{y}_n'(x_0) = \bar{y}'$, e per il quale, se è $n > \bar{n}$, tenendo conto della (13) ed in virtù del lemma del n.° 2, a), risulta in tutto (x_0, x_1)

$$|\bar{y}_n'(x)| \leq (1 + |\bar{y}'|)e^H. \tag{14}$$

Siccome poi, se esiste un x di (x_0, x_1), per il quale è $|y_n'(x)| = R$, risulta in tutto (x_0, x_1)

$$|\bar{y}_n'(x)| \leq (1 + R)e^H, \tag{15}$$

ne segue immediatamente che se $y = \bar{y}_n(x)$ è un integrale della (7) che esce dal punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ con coefficiente angolare $> L_1$, su tale curva integrale non esistono tangenti parallele al segmento $\overline{P_0P_1}$, (ove $P_1 \equiv (x_1, y_1)$), e quindi risulta $\bar{y}_n(x_1) > y_1$.

In modo analogo, se $y = \bar{y}_n(x)$ è un integrale della (7) che esce dal punto P_0 con coefficiente angolare $< -L_1$, risulta $\bar{y}_n(x_1) < y_1$.

Perciò, analogamente a quanto si è visto al n.° 1, esiste sicuramente almeno un valore y_n' dell'intervallo $(-L_1, L_1)$, in corrispondenza al quale esiste un integrale $y = y_n(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ della (7), con $y_n(x_0) = y_0$, $y_n'(x_0) = y_n'$, e per il quale risulta $y_n(x_1) = y_1$. Inoltre per la (15) in tutto (x_0, x_1) risulta

$$|y_n'(x)| \leq L_1.$$

Basta quindi ripetere tutta la dimostrazione del n.° 1 con qualche evidente complemento.

OSSERVAZIONE. - *Il teorema del presente numero non è contenuto nei teoremi del* CACCIOPPOLI, *citati nell'introduzione.*

Per esempio, il teorema del presente numero assicura l'esistenza di almeno un integrale dell'equazione

$$y''=\frac{y'^3}{1+\sqrt{x}y'^2} \tag{16}$$

congiungente i punti $(0, y_0)$, (x_1, y_1), ove x_1, y_0, y_1 sono tre numeri reali qualunque con $x_1>0$. Infatti, siccome, evidentemente, ogni curva $y=C$ (costante) è un integrale particolare della (16), basta osservare che il secondo membro della (16) verifica la condizione relativa alla (11) per

$$\varphi(x)\equiv 0, \qquad \psi(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Invece non è soddisfatta la condizione del CACCIOPPOLI $\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{F}{\omega}=0$, perchè, per $x=0$, il secondo membro della (16) si riduce a y'^3, e quindi il rapporto $f(x, y, y'):\sqrt{y^2+y'^2}$, evidentemente, non può tendere uniformemente a zero, in tutto l'intervallo $(0, x_1)$, per $\sqrt{y^2+y'^2}\to\infty$.

Osserviamo inoltre che non è applicabile alcuno dei teoremi dati dallo SCORZA-DRAGONI.

4. - TEOREMA III.

Sia $f(x, y, y')$ *una funzione finita e continua nel campo*

$$C':\quad a\leq x\leq b, \qquad -\infty<y<+\infty, \qquad -\infty<y'<+\infty,$$

e considerati due punti qualunque (x_0, y_0), (x_1, y_1) *con* $a\leq x_0<x_1\leq b$, *supponiamo che esistano tre funzioni* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, *non negative e integrabili sull'intervallo* (x_0, x_1), *con*

$$\int_{x_0}^{x_1}\{[2(x_1-x_0)+|y_1-y_0|]\alpha(x)+\beta(x)\}\,dx<1, \tag{17}$$

in modo che, per ogni x *di* (x_0, x_1) *e per ogni coppia* y, y', *sia*

$$|f(x, y, y')|\leq\alpha(x)|y|+\beta(x)|y'|+\gamma(x); \tag{18}$$

allora l'equazione (1)

$$y''=f(x, y, y')$$

ammette almeno una soluzione $y=y_0(x)$, $(x_0\leq x\leq x_1)$ *soddisfacente alle condizioni*

$$y_0(x_0)=y_0, \qquad y_0(x_1)=y_1.$$

Mostriamo che è possibile ricondurre il teorema in questione a quello del numero precedente, determinando, in tutto (x_0, x_1), due integrali dell'equazione (1)

$$y = y_1(x), \qquad y = y_2(x),$$

con $y_1(x) \leq y_2(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$, $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, e per i quali risulta

$$y_1(x_1) < y_1 < y_2(x_1);$$

allora nel campo

$$C: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

così determinato, la funzione f soddisferà ad una disuguaglianza analoga alla (11).

Infatti, scelto comunque un valore y_0', osserviamo innanzi tutto che, se $y = y(x)$ è un'integrale della (1), soddisfacente alle condizioni $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, risulta, in tutto (x_0, x_1), in virtù delle (17) e (18)

$$|y'(x)| \leq A(1 + |y_0'|), \tag{19}$$

con [11]

$$A = \frac{1 + |y_0| \int_{x_0}^{x_1} \alpha(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} \gamma(x)dx}{1 - \int_{x_0}^{x_1} [(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx}; \tag{20}$$

---

[11] Infatti, se $(x_0, \bar{x})$ è il massimo intervallo di (x_0, x_1) in cui vale la (19), in tutto $(x_0, \bar{x})$ è in virtù della (18)

$$|y'(x) - y_0'| = \left| \int_{x_0}^{x} y''(x)dx \right| \leq \int_{x_0}^{x} \{ \alpha(x)|y| + \beta(x)|y'| + \gamma(x) \} dx \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \alpha(x) \left\{ |y_0| + \int_{x_0}^{x} |y'|\, dx \right\} dx + A(1 + |y_0'|) \int_{x_0}^{x} \beta(x)dx + \int_{x_0}^{x} \gamma(x)dx \leq$$

$$\leq |y_0| \int_{x_0}^{x} \alpha(x)dx + A(1 + |y_0'|) \int_{x_0}^{x} \{ (x - x_0)\alpha(x) + \beta(x) \} dx + \int_{x_0}^{x} \gamma(x)dx$$

ed anche

$$|y'(\bar{x})| \leq |y_0'| + |y_0| \int_{x_0}^{\bar{x}} \alpha(x)dx + A(1 + |y_0'|) \int_{x_0}^{\bar{x}} [(x - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx + \int_{x_0}^{\bar{x}} \gamma(x)dx.$$

Se $\bar{x} < x_1$, sarebbe $|y'(\bar{x})| = A(1 + |y_0'|)$, onde

$$A(1 + |y_0'|) \leq |y_0'| + |y_0| \int_{x_0}^{\bar{x}} \alpha(x)dx + A(1 + |y_0'|) \int_{x_0}^{\bar{x}} [(x - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx + \int_{x_0}^{\bar{x}} \gamma(x)dx,$$

e tale disuguaglianza è valida anche se y_0 e y_0' sono i valori di $y(x)$ e $y'(x)$ in un punto qualunque dell'intervallo (x_0, x_1).

Sia ora x_ω un punto di (x_0, x_1), tale che $y'(x_\omega) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Dalla (19), in cui si faccia $y_0 = y(x_\omega)$ e $y_0' = y'(x_\omega)$, si deduce ([12]), posto

$$A_1 = \frac{y_0\left[1 - \int_{x_0}^{x_1}\{(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)\}\,dx\right] + [x_1 - x_0 + |y_1 - y_0|]\left[1 + \int_{x_0}^{x_1}\gamma(x)dx\right]}{1 - \int_{x_0}^{x_1}\{[2(x_1 - x_0) + |y_1 - y_0|]\alpha(x) + \beta(x)\}\,dx},$$

$$|y(x_\omega)| \leq A_1. \tag{21}$$

Quindi, per ogni integrale $y = y(x)$ della (1) che abbia dei punti x_ω, vale, in tutto (x_0, x_1), la disuguaglianza

$$|y'(x)| \leq A_2,$$

ove si è posto

$$A_2 = (1 + R)\,\frac{1 + A_1\int_{x_0}^{x_1}\alpha(x)dx + \int_{x_0}^{x_1}\gamma(x)dx}{1 - \int_{x_0}^{x_1}\{(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)\}\,dx}.$$

---

da cui

$$A(1 + |y_0'|)\left[1 - \int_{x_0}^{\bar{x}}\{(x - x_0)\alpha(x) + \beta(x)\}\,dx\right] \leq |y_0'| + |y_0|\int_{x_0}^{\bar{x}}\alpha(x)dx + \int_{x_0}^{\bar{x}}\gamma(x)dx,$$

$$A\left[1 - \int_{x_0}^{\bar{x}}\{(x - x_0)\alpha(x) + \beta(x)\}\,dx\right] < 1 + |y_0|\int_{x_0}^{\bar{x}}\alpha(x)dx + \int_{x_0}^{\bar{x}}\gamma(x)dx.$$

Dunque se A ha il valore indicato dalla (20), ove, in virtù della (17), è sicuramente

$$\int_{x_0}^{x_1}[(x - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx < 1,$$

$\bar{x}$ non può essere minore di x_1, e il nostro asserto è così provato.

([12]) Infatti, posto $y(x_\omega) = y_\omega$, $y'(x_\omega) = y_\omega'$, e detto x_ω' un valore di (x_0, x_ω) in cui è $y'(x_\omega') = \dfrac{y_\omega - y_0}{x_\omega - x_0}$, dovrà essere per la (19)

$$\left|\frac{y_\omega - y_0}{x_\omega - x_0}\right| \leq (1 + |y_\omega'|)\,\frac{1 + |y_\omega|\int_{x_0}^{x_1}\alpha(x)dx + \int_{x_0}^{x_1}\gamma(x)dx}{1 - \int_{x_0}^{x_1}[(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx},$$

Perciò se $y=y(x)$ è un integrale della (1) che esce dal punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ con coefficiente angolare maggiore di A_2, su tale curva integrale non esistono tangenti parallele al segmento $\overline{P_0P_1}$, ove $P_1 \equiv (x_1, y_1)$. Quindi, ogni integrale che esce da P_0 con coefficiente angolare maggiore di A_2 non può tagliare il segmento $\overline{P_0P_1}$, ed è, ad eccezione del punto P_0, tutto al disopra di tale segmento, essendo evidentemente $A_2 > R$.

Analogamente, ogni integrale che esce da P_0 con coefficiente angolare minore di $-A_2$ resta, ad eccezione del punto P_0, tutto al disotto del segmento $\overline{P_0P_1}$.

Quindi, fissati due numeri y_1', y_2' con $y_1' < -A_2$, $y_2' > A_2$, esistono due integrali della (1)

$$y=y_i(x), \quad (i=1, 2),$$

soddisfacenti alle condizioni $y_i(x_0)=y_0$, $y_i'(x_0)=y_i'$, e per i quali risulta

$$y_1(x) < y_2(x), \quad (x_0 < x \leq x_1) \quad \text{e} \quad y_1(x_1) < y_1 < y_2(x_1).$$

Indicato con λ il maggiore dei massimi moduli delle funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ nell'intervallo (x_0, x_1), in tutto il campo

$$C: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

la funzione $f(x, y, y')$ soddisfa, in virtù della (18), alla disuguaglianza

$$|f(x, y, y')| \leq \beta(x)\,|y'| + [\lambda\alpha(x) + \gamma(x)],$$

e sono quindi soddisfatte le condizioni del teorema del n.° 3 per

$$\varphi(x) \equiv \lambda\alpha(x) + \gamma(x), \qquad \psi(x) \equiv \beta(x).$$

OSSERVAZIONE. - *Il teorema del presente numero contiene, come caso particolare, i teoremi citati del* CACCIOPPOLI *per* $n=2$.

---

e quindi

$$|y_\omega| \leq |y_0| + (x_1 - x_0)(1 + |y_\omega'|)\,\frac{1 + |y_\omega|\int_{x_0}^{x_1}\alpha(x)dx + \int_{x_0}^{x_1}\gamma(x)dx}{1 - \int_{x_0}^{x_1}[(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx},$$

$$|y_\omega|\left\{1 - \int_{x_0}^{x_1}[(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx - (1 + |y_\omega'|)(x_1 - x_0)\int_{x_0}^{x_1}\alpha(x)dx\right\} \leq$$

$$\leq |y_0|\left\{1 - \int_{x_0}^{x_1}[(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)]dx\right\} + (1 + |y_\omega'|)(x_1 - x_0)\left[1 + \int_{x_0}^{x_1}\gamma(x)dx\right],$$

da cui immediatamente la (21).

Infatti, fissato un numero $\sigma > 0$, con

$$\sigma < \frac{1}{(x_1 - x_0)[2(x_1 - x_0) + |y_1 - y_0| + 1]}, \tag{22}$$

in virtù dell'ipotesi, fatta dal CACCIOPPOLI, $\frac{f(x, y, y')}{\sqrt{y^2 + y'^2}} \to 0$, uniformemente rispetto ad x in tutto (a, b) per $\sqrt{y^2 + y'^2} \to \infty$, possiamo determinare un numero $N > 0$, in modo che, per ogni coppia (y, y') con $\sqrt{y^2 + y'^2} \geqslant N$, risulti in tutto (x_0, x_1)

$$|f(x, y, y')| < \sigma \sqrt{y^2 + y'^2} < \sigma\{|y| + |y'|\},$$

e quindi, indicato con G il massimo modulo della funzione $f(x, y, y')$ per ogni x di (x_0, x_1) e per ogni coppia y, y' con $y^2 + y'^2 \leqslant N^2$, risulta in tutto il campo

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < y' < +\infty,$$
$$|f(x, y, y')| < \sigma\{|y| + |y'|\} + G,$$

ed è quindi verificata la condizione (18) per $\alpha(x) = \beta(x) = \sigma$, $\gamma(x) = G$, insieme con la (17), in virtù della (22).

ESEMPIO. - La funzione

$$f(x, y, y') \equiv \frac{y^{2+\frac{2}{3}}}{1 + y^2} + \frac{y'^3}{1 + \sqrt{x}\, y'^2}$$

soddisfa su ogni intervallo $(0, x_1)$, con $0 < x_1 < \frac{1}{4}$, alle condizioni del nostro teorema, ma non (come è evidente) a quelle dei teoremi di CACCIOPPOLI.

Infatti, fissato $\sigma > 0$ in modo che sia

$$\sigma < \frac{1 - 2\sqrt{x_1}}{x_1[2x_1 + |y_1 - y_0|]},$$

abbiamo per ogni y tale che sia $|y| \geqslant \frac{1}{\sigma^3}$

$$|f(x, y, y')| \leqslant \sigma|y| + \frac{1}{\sqrt{x}}|y'|,$$

e quindi, in tutto il campo

$$0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad \left[x_1 < \frac{1}{4}\right], \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

risulta

$$|f(x, y, y')| \leqslant \sigma|y| + \frac{1}{\sqrt{x}}|y'| + \frac{1}{\sigma^2},$$

e, in conseguenza del modo in cui è stato scelto σ, è soddisfatta la (17).

5. - TEOREMA IV.

In tutti i precedenti teoremi si è sempre supposto che la funzione $f(x, y, y')$ sia finita e continua in ogni punto (x, y, y') del campo in cui è definita. Sotto opportune condizioni si può anche abbondonare l'ipotesi che la funzione $f(x, y, y')$ sia continua rispetto alla variabile x, come faremo nel presente n.° e in quelli seguenti. Dimostriamo, per esempio, il seguente teorema:

Sia $g(x, y, y')$ una funzione finita e continua nel campo

$$C: \quad a \leq x \leq b, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

ove $y_1(x) \leq y_2(x)$, ed esista un numero finito M, tale che sia in tutto (a, b)

$$|g(x, y, y')| \leq M;$$

sia $p(x)$ una funzione integrabile sull'intervallo (a, b) ed ivi non negativa (oppure non positiva), e siano $y_1(x)$, $y_2(x)$, in tutto (a, b), due integrali dell'equazione

$$y' = y'(a) + \int_a^x p(x) g(x, y, y') dx;$$

allora, se (x_i, y_i), $(i=0, 1)$ sono due punti qualunque soddisfacenti alle disuguaglianze

$$a \leq x_0 < x_1 \leq b, \qquad y_1(x_i) \leq y_i \leq y_2(x_i), \qquad (i=0, 1),$$

l'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^x p(x) g(x, y, y') dx \tag{23}$$

ammette almeno una soluzione $y = y_0(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ con

$$y_1(x) \leq y_0(x) \leq y_2(x), \qquad (x_0 \leq x \leq x_1), \tag{24}$$

soddisfacente alle condizioni

$$y_0(x_0) = y_0, \qquad y_0(x_1) = y_1. \tag{25}$$

Supposto, per fissare le idee, $p(x) \geq 0$, e definita, in tutto il campo C_∞ di cui al n.° 1 e nel modo allora indicato per la $f_0(x, y, y')$, una funzione $g_0(x, y, y')$, la quale, per $y > y_2(x)$ e per $y < y_1(x)$, risulta funzione crescente della y, si ponga

$$I = \int_{x_0}^{x_1} p(x) dx, \qquad L_1 = R + I(M+1),$$

e si ripeta quanto si è detto al n.° 1, intendendo che le funzioni razionali intere $P_n(x, y, y')$ convergano uniformemente, in tutto il campo C_L, alla $g_0(x, y, y')$

e che invece della (7), si consideri l'equazione

$$y'=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x} p(x)\,Q_n(x,\,y,\,y')\,dx.$$

Sono ancora verificate le (10) e per provare che la successione $\{y_n'(x)\}$ è costituita di funzioni ugualmente continue sull'intervallo $(x_0,\,x_1)$, basta tener presente che, se $x',\,x''$ sono due valori qualunque, con $x'<x''$, dell'intervallo $(x_0,\,x_1)$, è

$$|\,y_n'(x')-y_n'(x'')\,|=\left|\int_{x'}^{x''} p(x)\,Q_n(x,\,y_n(x),\,y_n'(x))\,dx\right|\leqslant (M+1)\int_{x'}^{x''} p(x)\,dx.$$

Si conclude quindi, in modo analogo al n.° 1, che esiste almeno un integrale $y=y_0(x)$ dell'equazione

$$y'=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x} p(x)\,g_0(x,\,y,\,y')\,dx,$$

soddisfacente alle (25), e per poter affermare che esso è anche integrale della (23), basta dimostrare che sono soddisfatte le disuguaglianze (24). A tal uopo occorre modificare nel seguente modo l'osservazione fatta alla fine del n.° 1.

Supposto che esista un valore $\bar{x}$ di $(x_0,\,x_1)$, per il quale sia $y_0(\bar{x})<y_1(\bar{x})$, indichiamo con $(x_0',\,x_1')$ il massimo intervallo che lo contiene e nei cui punti interni è sempre $y_0(x)<y_1(x)$. Avremo

$$y_0(x_0')=y_1(x_0'),\qquad y_0(x_1')=y_1(x_1').$$

Sia ξ l'ultimo punto di massimo assoluto della differenza $y_1(x)-y_0(x)$ in $(x_0',\,x_1')$. Sarà

$$x_0'<\xi<x_1',\qquad y_1'(\xi)-y_0'(\xi)=0,$$

e perciò

$$g_0(\xi,\,y_1(\xi),\,y_1'(\xi))-g_0(\xi,\,y_0(\xi),\,y_1'(\xi))=2\eta>0.$$

Per la continuità della $g_0(x,\,y,\,y')$ e delle $y_0(x)$, $y_0'(x)$, $y_1(x)$, $y_1'(x)$, in tutto un intervallo $(\xi,\,\xi_1)$ di $(\xi,\,x_1')$ è

$$g_0(x,\,y_1(x),\,y_1'(x))-g_0(x,\,y_0(x),\,y_0'(x))>\eta,$$

e quindi, *per essere* $p(x)\geqslant 0$,

$$p(x)[g_0(x,\,y_1(x),\,y_1'(x))-g_0(x,\,y_0(x),\,y_0'(x))]\geqslant \eta p(x)\,;$$

e perciò risulta

$$y_1'(x)-y_0'(x)=\int_{\xi}^{x} p(x)[g(x,\,y_1(x),\,y_1'(x))-g(x,\,y_0(x),\,y_0'(x))]\,dx\geqslant \eta\int_{\xi}^{x} p(x)\,dx\geqslant 0.$$

Ne segue, per ogni x di (ξ, ξ_1),

$$y_1(x) - y_0(x) \geqslant y_1(\xi) - y_0(\xi),$$

e quindi ξ non sarebbe l'ultimo punto di massimo assoluto della differenza $y_1(x) - y_0(x)$ nell'intervallo (x_0', x_1'). Il nostro asserto è così provato.

OSSERVAZIONE. - Dopo quanto si è detto in questo numero si vede facilmente come possano estendersi i teoremi II e III, considerando una funzione $f(x, y, y')$ soddisfacente rispettivamente alla (11) e alla (18) (quest'ultima sotto la condizione (17)) e tale che sia $f(x, y, y') = p(x) g(x, y, y')$, con $p(x)$ funzione non negativa (o non positiva) e integrabile, e $g(x, y, y')$ funzione finita e continua.

6. - TEOREMA V.

Sia $g(x, y, y')$ una funzione finita e continua nel campo

$$C': \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

e si supponga che esistano due funzioni $\psi_0(y)$, $\psi_1(x)$ non negative e integrabili rispettivamente sugli intervalli $(-\infty, +\infty)$, (a, b) in modo che sia in tutto il campo C'

$$| g(x, y, y') | \leqslant \psi_0(y) y'^2 + \psi_1(x)$$

e sia $\psi(x)$ una funzione integrabile (sempre nel senso del LEBESGUE) *sull'intervallo (a, b).*

Allora se (x_i, y_i), $(i = 0, 1)$ sono due punti qualunque con $a \leqslant x_0 < x_1 \leqslant b$, l'equazione

$$(26) \qquad y'(x) = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} \{ g(x, y, y') + \psi(x) \} dx,$$

ammette, in tutto (x_0, x_1), almeno una soluzione $y = y_0(x)$ soddisfacente alle condizioni (25)

$$y_0(x_0) = y_0, \qquad y_0(x_1) = y_1.$$

Infatti, posto

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(y) dy + \int_{x_0}^{x_1} \{ 2 + \psi_1(x) + | \psi(x) | \} dx,$$

$$L_1 = (1 + R) e^K,$$

consideriamo, come nel n.° 1, il campo

$$C_L: \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad -L_0 \leqslant y \leqslant L_0, \qquad -2L_1 \leqslant y' \leqslant 2L_1,$$

dove ora Γ è il maggiore tra $|y_0|$ e $|y_1|$, e riprendiamo la dimostrazione del numero detto, conducendola in modo analogo a quanto abbiamo fatto nel n.° 3, considerando però invece della $f_0(x, y, y')$ la stessa $g(x, y, y')$, modificando in modo evidente la definizione delle $Q_n(x, y, y')$ e utilizzando il lemma del n.° 2, γ).

Si dimostra anche qui l'esistenza di almeno un integrale $y=y_n(x)$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ dell'equazione

$$y'(x)=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x}[Q_n(x, y, y')+\psi(x)]dx,$$

congiungente i punti P_0, P_1, (ove $P_i \equiv (x_i, y_i)$, $i=1, 2$), e risulta in tutto (x_0, x_1), e per $n > \bar{n}$

$$|y_n'(x)| \leqslant 2L_1,$$

e quindi anche

$$|y_n(x)| \leqslant L_0.$$

Con considerazioni analoghe a quelle del n.º 5 si prova l'uguale continuità, sull'intervallo (x_0, x_1), delle derivate $\{y_n'(x)\}$, e tenendo conto anche delle due ultime disuguaglianze si conclude immediatamente che esiste almeno una curva integrale dell'equazione (26), $y=y_0(x)$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$, soddisfacente alle condizioni (25).

ESEMPIO. - L'equazione

$$y''=\frac{y'^4}{1+y'^2(1+y^2)}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

soddisfa alle condizioni del teorema del presente numero anche quando il punto $x=0$ non sia esterno all'intervallo (x_0, x_1).

§ 2.

7. - TEOREMA VI.

La dimostrazione del teorema IV è basata sull'ipotesi che la funzione $p(x)$ non cambi di segno nell'intervallo (a, b). Vogliamo ora abbandonare tale ipotesi e a tal uopo conviene modificare il procedimento seguito nel § 1, sviluppando la dimostrazione senza uscire dal campo C. *Si dà così un nuovo procedimento generale di dimostrazione*, che riesce utile anche in molti altri casi e che potrebbe servire pure alla dimostrazione di alcuni dei teoremi del § 1.

Generalizziamo dunque il teorema IV supponendo, per quanto riguarda la funzione $p(x)$, soltanto che essa sia integrabile (nel senso del LEBESGUE*) sull'intervallo (a, b).*

a). Supponiamo, nel presente capoverso, che, per ogni x di (x_0, x_1), sia sempre

$$y_2(x) > y_1(x).$$

Posto

$$I'=\int_{x_0}^{x_1}|p(x)|dx,$$

$$H=1+R+I'M+|y_1'(x_0)|+|y_2'(x_0)|,$$

abbiamo in tutto (x_0, x_1)

$$|y_i'(x)| \leq H-1, \qquad (i=1, 2). \tag{27}$$

Inoltre ogni curva $y=y_0(x)$ integrale dell'equazione (23) e congiungente i punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, e tale che ogni punto $(x, y_0(x), y_0'(x))$,

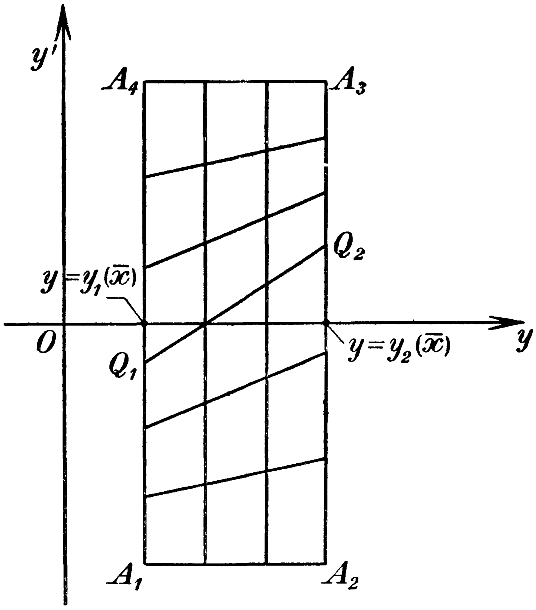

Fig. 1.

$(x_0 \leq x \leq x_1)$ appartenga al campo C, avrà almeno una tangente parallela al segmento $\overline{P_0P_1}$, e quindi sarà in tutto (x_0, x_1)

$$|y_0'(x)| < H. \tag{28}$$

Per ogni intero positivo n definiamo nel campo C una funzione $g_n(x, y, y')$ nel seguente modo.

Fissiamo un $\bar{x}$ di (x_0, x_1) e definiamo $g_n(\bar{x}, y, y')$ nel campo

$$y_1(\bar{x}) \leq y \leq y_2(\bar{x}), \qquad -\infty < y' < +\infty$$

con il seguente procedimento.

Consideriamo nel piano (y, y') il rettangolo $R_{\bar{x}}$, a lati paralleli agli assi y, y', delimitato dalle quattro rette

$$y=y_1(\bar{x}), \qquad y=y_2(\bar{x}) \qquad y'=H, \qquad y'=-H,$$

e poniamo

$$A_1 \equiv (y_1(\bar{x}), \ -H)\,; \qquad A_2 \equiv (y_2(\bar{x}), \ -H)\,; \qquad A_3 \equiv (y_2(\bar{x}), H)\,; \qquad A_4 \equiv (y_1(\bar{x}), H).$$

Sui lati A_1A_4 e A_2A_3 segniamo i punti Q_1, Q_2 per i quali è, rispettivamente, $y'=y_1'(\bar{x})$, $y'=y_2'(\bar{x})$, e osserviamo che, in virtù delle (27), tali punti risultano interni ai segmenti A_1A_4 e A_2A_3 rispettivamente.

Dividiamo l'intervallo $(y_1(\bar{x}), y_2(\bar{x}))$ dell'asse delle y in n parti uguali e per i punti di divisione conduciamo le parallele all'asse y' in modo da dividere $R_{\bar{x}}$ in n rettangoli uguali. Congiungiamo i punti Q_1 e Q_2; poi diviso in n parti uguali ciascuno dei segmenti $\overline{Q_1A_4}$ e $\overline{Q_2A_3}$, congiungiamo ordinatamente i punti di divisione di $\overline{Q_1A_4}$ con quelli di $\overline{Q_2A_3}$; analogamente dividiamo in n parti uguali ciascuno dei segmenti $\overline{A_1Q_1}$ e $\overline{A_2Q_2}$ e congiungiamo ordinatamente i punti di divisione. Tutte queste congiungenti insieme con le parallele condotte all'asse y' dividono il rettangolo $R_{\bar{x}}$ in tanti trapezi. Decomposto ognuno di questi trapezi in due triangoli con una diagonale, il rettangolo $R_{\bar{x}}$ risulta suddiviso in tanti triangoli T. Nei vertici di ciascun triangolo T poniamo $g_n(\bar{x}, y, y')=g(\bar{x}, y, y')$, poi completiamo la definizione della funzione $g_n(\bar{x}, y, y')$ in ogni T in modo che, in ognuno di questi triangoli, g_n risulti funzione lineare nelle y e y', cioè in modo che $z=g_n(\bar{x}, y, y')$ sia su ogni T, una superficie piana.

Si ponga poi

$$g_n(\bar{x}, y, y')=g_n(\bar{x}, y, H), \text{ per } y'>H,$$
$$g_n(\bar{x}, y, y')=g_n(\bar{x}, y, -H), \text{ per } y'<-H.$$

Fatta tale costruzione per ogni $\bar{x}$ di (x_0, x_1), la $g_n(x, y, y')$ risulta definita in tutto il campo

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

nel quale risulta, per ogni n,

$$|g_n(x, y, y')| \leqslant M,$$

e la funzione g_n è continua rispetto a (x, y, y') e lipschitziana rispetto alle y e y'.

Inoltre nel campo

$$C_H\colon \ x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad -H \leqslant y' \leqslant H,$$

la g_n (x, y, y') converge uniformemente alla $g(x, y, y')$, per $n \to \infty$.

Per ogni x di (x_0, x_1) è

$$g_n(x, y_i(x), y_i'(x))=g(x, y_i(x), y_i'(x)), \qquad (i=1, 2),$$

e perciò le due curve $y=y_i(x)$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$, $(i=1, 2)$ sono integrali dell'equazione

$$(29) \qquad y'=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x} p(x) g_n(x, y, y')dx.$$

Inoltre per ogni curva $y=y(x)$ integrale della (29) e congiungente i punti P_0, P_1 è verificata la disuguaglianza

$$|y'(x)|<H.$$

Tenendo conto di noti risultati sulle equazioni differenziali ([13]) possiamo concludere, in virtù di un ragionamento elementare già fatto anche da G. SCORZA-DRAGONI ([14]), che esiste un integrale $y=y_n(x)$ della (29), che congiunge i punti P_0 e P_1 e per il quale ogni punto $(x, y_n(x), y_n'(x))$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ appartiene al campo C_H.

Facendo tendere n all'infinito e con considerazioni analoghe a quelle del n.° 5 si conclude che esiste un integrale $y=y_0(x)$ dell'equazione (23), che congiunge i punti P_0, P_1, e per il quale sono, evidentemente, soddisfatte le (24). Il nostro asserto è con ciò provato sotto l'ipotesi supplementare, fatta all'inizio del presente capoverso, $y_1(x)<y_2(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$.

b) Per eliminare tale ipotesi, osserviamo che, se nella disuguaglianza $y_1(x) \leq y_2(x)$ non vale sempre il segno di $<$, questo dovrà valere per uno almeno dei due valori x_0, x_1, perchè, in caso contrario, risulterebbe necessariamente $y_1(x_i)=y_i=y_2(x_i)$, $(i=1, 2)$, e il nostro teorema sarebbe evidente.

Supponiamo dunque, per fissare le idee, $y_2(x_0)>y_1(x_0)$, e sia ξ_0 il primo punto di (x_0, x_1) in cui è $y_2(\xi_0)=y_1(\xi_0)$.

Considerato il punto $x_\mu=\xi_0-\dfrac{1}{\mu}$, con μ numero intero positivo tale che sia $\xi_0-\dfrac{1}{\mu}>x_0$, abbiamo, in tutto (x_0, x_μ), $y_2(x)>y_1(x)$, e quindi per quanto si è visto in *a*) esiste un integrale $y=y_0(x)$ dell'equazione (23), per il quale ogni punto $(x, y_0(x), y_0'(x))$, $(x_0 \leq x \leq x_\mu)$ appartiene al campo C, e che unisce i punti P_0 e $(x_\mu, y_2(x_\mu))$, e quindi, per $\mu \to \infty$, si ottiene un integrale $y=y_\infty(x)$ della (23) che unisce i punti P_0 e $(\xi_0, y_2(\xi_0))$.

Sia poi ξ_1 l'ultimo punto di (x_0, x_1), in cui è $y_2(\xi_1)=y_1(\xi_1)$; allora l'integrale $y=y_\infty(x)$ viene continuato anche in (ξ_0, ξ_1), ponendovi $y_\infty(x)=y_2(x)$, e finalmente, con procedimento analogo a quello seguito per l'intervallo (x_0, ξ_0), si può continuare tale integrale anche sull'intervallo (ξ_1, x_1), se è $\xi_1<x_1$.

8. - TEOREMA VII.

Il procedimento seguito nel numero precedente riesce utile anche per dimostrare altri teoremi, quale, per esempio, il seguente:

Sia $g(x, y, y')$ una funzione finita e continua nel campo

$$C:\quad a \leq x \leq b, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \qquad -\infty<y'<+\infty,$$

([13]) Vedi per esempio, C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, (Teubner, 1918, Leipzig), Cap. XI.

([14]) Vedi luogo cit. in ([6]).

ove $y_1(x) \leqq y_2(x)$, $(a \leqq x \leqq b)$; *siano* l_1, l_2 *due numeri finiti tali che, in tutto* (a, b), *sia* $l_1 \leqq y_i(x) \leqq l_2$, $(i=1, 2)$ *e si supponga che esistano due funzioni* $\psi_0(y)$, $\psi_1(x)$, *non negative e integrabili, rispettivamente, sugli intervalli* (l_1, l_2), (a, b), *in modo che, in tutto il campo C, sia*

$$|g(x, y, y')| \leqq \psi_0(y)y'^2 + \psi_1(x);$$

sia $\psi(x)$ *una funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) sull'intervallo* (a, b), *e siano* $y=y_i(x)$, $(i=1, 2)$ *due integrali dell'equazione*

$$y' = y'(a) + \int_a^x \{g(x, y, y') + \psi(x)\}\, dx;$$

allora se (x_i, y_i), $(i=0, 1)$ *sono due punti qualunque, soddisfacenti alle condizioni* $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$, $y_1(x_i) \leqq y_i \leqq y_2(x_i)$, $(i=0, 1)$, *l'equazione*

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^x \{g(x, y, y') + \psi(x)\}\, dx$$

ammette almeno una soluzione $y=y_0(x)$, $(x_0 \leqq x \leqq x_1)$ *con*

$$y_1(x) \leqq y_0(x) \leqq y_2(x), \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1),$$

soddisfacente alle condizioni $y_0(x_0)=y_0$, $y_0(x_1)=y_1$.

Basta ripetere, con poche modificazioni, la dimostrazione del numero precedente.

Supposto anche qui, dapprima, che, per ogni x di (x_0, x_1), sia

$$y_2(x) > y_1(x)$$

si ponga

$$K = \int_{l_1}^{l_2} \psi_0(y)\, dy + \int_{x_0}^{x_1} \{1 + \psi_1(x) + |\psi(x)|\}\, dx,$$
$$H = 1 + [1 + R + |y_1'(x_0)| + |y_2'(x_0)|]e^K,$$

e si osservi che, in virtù del lemma del n.° 2, β), sono verificate le (27) e (28).

Tutto il resto della dimostrazione procede in modo analogo al numero precedente.

ESEMPIO:
$$y'' = \frac{y'^4}{1 + y'^2 \sqrt[3]{y^2}}.$$

Aggiunta fatta nel novembre 1938-XVII.

Alcuni estratti della presente Memoria furono presentati al concorso di Analisi Matematica per la R. Università di Cagliari, chiusosi il 15 maggio 1938-XVI e G. SCORZA-DRAGONI ha potuto così prendere visione del presente lavoro fin dall'estate scorsa. Ciò gli è riuscito molto utile, perchè Egli è venuto a conoscere l'errore in cui era incorso nella sua nota lincea del 1935 (vedi luogo citato in ([4])) e che aveva ripetuto per ben due volte nella sua recentissima Memoria « *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine* », fatta comporre nella primavera del corrente anno, e pubblicata nel corrente mese nei Rend. del Seminario Matematico di Roma (Vol. 2 (1938), pp. 177-215).

A quest'ultimo lavoro lo SCORZA-DRAGONI ha perciò fatto seguire una « *Aggiunta ecc.* » (ibidem, pp. 253-254) nella quale riconosce e corregge l'errore cui abbiamo accennato. Tale aggiunta si chiude con le seguenti parole: « Al CINQUINI evidentemente è sfuggito che nemmeno la $\varphi \neq 0$ sarebbe sufficiente per garentire la crescenza delle φ_i rispetto a y ».

Lo SCORZA-DRAGONI tiene, così, a far sapere ai suoi lettori che l'errore da Lui commesso è più grave di quello che risulterebbe dall'osservazione che io avevo fatto; e a tal riguardo nulla avrei da aggiungere. Ma siccome l'affermazione dello SCORZA-DRAGONI vorrebbe essere un appunto a me rivolto, debbo rilevare che i fatti la smentiscono completamente e che nulla effettivamente mi è « sfuggito », perchè, pur essendo ricorso in alcune mie dimostrazioni (vedi per esempio, n.° 1) ad un artificio analogo a quello dello SCORZA-DRAGONI, l'ho fatto, a differenza da tale Autore, in modo perfettamente corretto, come lo stesso SCORZA-DRAGONI ha riconosciuto nella sua « *Aggiunta* », nella quale ha utilizzato proprio la mia costruzione per correggere i suoi errori. È vero che in tale costruzione, in luogo di una semplice funzione razionale da me usata, Egli ha preferito adoperare una trascendente, ma questo dipende soltanto dalla diversità delle nostre tendenze.

Non sarà inopportuno aggiungere che allo SCORZA-DRAGONI è completamente sfuggito il fatto che l'essenziale nell'errore da Lui ripetutamente commesso sta appunto nel non essere verificata la disuguaglianza $\varphi \neq 0$. Infatti, se fosse $\varphi \neq 0$, si avrebbe, data la continuità della φ, o sempre $\varphi > 0$ — ed allora nessun appunto potrebbe esser fatto alla dimostrazione dello SCORZA-DRAGONI — o sempre $\varphi < 0$ ed allora sarebbe bastato il semplice cambiamento del segno più nel segno meno davanti alla funzione tgh, perchè, nella Nota lincea, tutto procedesse regolarmente!