

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

Sulla sommabilità per linee e per colonne delle serie doppie di Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 7, n° 3-4 (1938), p. 249-278

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_249_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA SOMMABILITÀ PER LINEE E PER COLONNE DELLE SERIE DOPPIE DI FOURIER (*)

di SANDRO FAEDO (Roma).

Introduzione.

Il criterio di DIRICHLET-JORDAN sulla convergenza della serie di FOURIER di una funzione di una variabile a variazione limitata è stato esteso da vari Autori alla convergenza delle serie doppie, nel senso di STOLZ e PRINGSHEIM, in corrispondenza a varie definizioni di funzioni di due variabili a variazione limitata.

Fra queste estensioni le più importanti sono quelle date dall'HARDY (1) e dal TONELLI (2), rispettivamente per le funzioni di due variabili a variazione limitata secondo HARDY e secondo la definizione più generale del TONELLI (vedi § 2).

Il criterio del DE LA VALLÉE POUSSIN (3) è stato invece esteso da W. H. YOUNG (4) soltanto a quelle funzioni di due variabili per cui la corrispondente

$$g(u, v) = \frac{1}{4uv} \int_{-u}^u \int_{-v}^v f(x+u, y+v) dudv$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) C. H. HARDY: *On double Fourier series*. Quart. Journ., vol. XXXVII (1906), pp. 53-79.

(2) L. TONELLI: *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier*. Annali di Matematica, s. IV, t. IV (1927), pp. 29-72.

(3) CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier*. Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XXXI (1911), pp. 296-299.

« In ogni punto x , per il quale

$$g(h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+a) da$$

è a variazione limitata per h in $(-\delta, \delta)$, la serie di Fourier di $f(x)$ converge verso $g(+0)$ ».

(4) W. H. YOUNG: *On multiple Fourier series*. Proc. London Math. Soc., s. 2, vol. XI (1912), pp. 133-184.

In questa forma è stato dato più tardi da J. J. GERGEN (Trans. of Americ. Math. Soc. 1933). YOUNG supponeva invece che fosse a variazione limitata secondo HARDY la funzione

$$g^*(u, v) = \frac{1}{4 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_{-u}^u \int_{-v}^v f(x+u, y+v) dudv.$$

è a variazione limitata secondo HARDY in $(0, 0; \pi, \pi)$ e ancora non è nota l'estensione a quelle funzioni la cui $g(u, v)$ sia a variazione limitata secondo TONELLI.

Quanto alla sommabilità per linee e per colonne il TONELLI ha dato, nella Memoria citata, alcuni criteri (*per le funzioni a variazione limitata nel suo senso*) che corrispondono a quello di DIRICHLET-JORDAN per le serie semplici.

Scopo del presente lavoro è di estendere il criterio del DE LA VALLÉE POUSSIN alla sommabilità per linee e per colonne delle serie doppie di FOURIER:

Data una funzione $f(x, y)$ integrabile e periodica di periodo 2π rispetto a x e a y , poniamo

$$g_{(u)}(u, v) = \frac{1}{2u} \int_{-u}^u \frac{f(x+2u, y+2v) + f(x+2u, y-2v)}{2} du,$$

$$g_{(v)}(u, v) = \frac{1}{2v} \int_{-v}^v \frac{f(x+2u, y+2v) + f(x-2u, y+2v)}{2} dv$$

rispettivamente per tutti i v e gli u in $(0, \frac{\pi}{2})$ per cui esistono finiti

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2u, y+2v) + f(x+2u, y-2v)] du,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2u, y+2v) + f(x-2u, y+2v)] dv.$$

Indicata con $V_{(u)}(u, v)$ [$V_{(v)}(u, v)$] la variazione totale di $g_{(u)}(u, v)$ [$g_{(v)}(u, v)$] in $(0, u)$ [$(0, v)$] come funzione della sola u [v] otteniamo il seguente teorema:

«*Se in un punto (x, y) la $g_{(u)}(u, v)$ [$g_{(v)}(u, v)$] ha la $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, v)$ [$V_{(v)}(u, \frac{\pi}{2})$] integrabile ⁽⁵⁾ rispetto a v [u] in $(0, \frac{\pi}{2})$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che in quasi tutto $(0, \delta)$ $g_{(u)}(+0, v)$ [$g_{(v)}(u, +0)$] coincide con una funzione $\varphi(v)$ [$\psi(u)$] a variazione limitata, la serie doppia di Fourier di $f(x, y)$ è in quel punto sommabile per linee [colonne] e la sua somma è data da $\varphi(+0)$ [$\psi(+0)$].*»

Come caso particolare di questo teorema si ottengono i già rammentati del TONELLI; esso è quindi da considerarsi come corrispondente a quello del DE LA VALLÉE POUSSIN nella sommabilità per linee e per colonne.

(5) In questo lavoro si considera sempre l'integrabilità nel senso del LEBESGUE.

Analogamente a quanto è stato fatto da W. H. YOUNG, consideriamo, relativamente a un punto (x, y) , la media

$$g(u, v) = \frac{1}{4uv} \int_{-u}^u \int_{-v}^v f(x+2u, y+2v) dudv, \quad \left(0 < u \leq \frac{\pi}{2}; 0 < v \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

di una funzione $f(x, y)$ integrabile e otteniamo il teorema (§ 11):

« Se la funzione $f(x, y)$ integrabile e periodica di periodo 2π rispetto ad x e a y è tale che in un punto (x, y) la funzione $g(u, v)$ sia superficialmente integrabile sul quadrato $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e abbia $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, v) [V_{(v)}(u, \frac{\pi}{2})]$ integrabile rispetto a $y [u]$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ con $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) [V_{(v)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})]$ finita e $g(+0, v) [g(u, +0)]$ coincidente per quasi tutti i $v [u]$ con una funzione $\varphi(v) [\psi(u)]$ assolutamente continua in $(0, \frac{\pi}{2})$ e in modo che sia $\varphi(\frac{\pi}{2}) = g(+0, \frac{\pi}{2}) [\psi(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}, +0)]$, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ è in quel punto sommabile per linee [colonne] ed ha per somme $\varphi(0) [\psi(0)]$ ».

Questo teorema non comprende quelli del TONELLI ma è di natura diversa.

Segue da esso che la serie doppia di FOURIER di una funzione che soddisfa al criterio di convergenza di W. H. YOUNG, è anche sommabile per linee e per colonne.

Diamo infine delle condizioni che garantiscono la sommabilità per linee e per colonne quando si sappia che la serie doppia converge in senso ordinario, alcune delle quali estendono altre già date dal TONELLI.

Preliminari.

1. - Richiamiamo alcune definizioni di cui faremo frequente uso in seguito.

Consideriamo un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x e y . Diremo quadrato fondamentale il quadrato definito da $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ e lo indicheremo sempre con Q .

Sia definita in Q una funzione $f(x, y)$.

a). $f(x, y)$ si dice a variazione limitata secondo Tonelli ⁽⁶⁾ in Q quando:

1_a). - Per quasi tutti i valori di x' e y' dell'intervallo $(0, 2\pi)$ le $f(x', y)$ e $f(x, y')$ sono funzioni, rispettivamente di y e x , a variazione limitata in $(0, 2\pi)$.

2_a). - Indicata con $V_{(x)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, x)$ della $f(x, y)$ considerata come funzione della sola x , e con $V_{(y)}(x, y)$ la variazione

(6) L. TONELLI: *Sulla quadratura delle superficie*. Rend. R. Accad. Lincei, vol. III (1926), pp. 357-362. - *Sur la quadrature des surfaces*. Comptes Rendus, t. 182 (1926), pp. 1198-1200. - *Serie trigonometriche*. Zanichelli (1928), p. 443.

totale, nell'intervallo $(0, y)$ della $f(x, y)$ considerata come funzione della sola y , esistono finiti gli integrali

$$\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y) dy, \quad \int_0^{2\pi} V_{(y)}(x, 2\pi) dx.$$

b). $f(x, y)$ si dice a variazione limitata secondo HARDY (7) in Q quando:

1_b). - È a variazione doppia finita in Q , ossia se per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse delle x in parti mediante i punti $0 \equiv x_1 < x_2 < \dots < x_m \equiv 2\pi$ e per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse delle y mediante i punti $0 \equiv y_1 < y_2 < \dots < y_n \equiv 2\pi$, la somma

$$\sum |f(x_r, y_s) - f(x_{r+1}, y_s) - f(x_r, y_{s+1}) + f(x_{r+1}, y_{s+1})|$$

estesa a tutti i valori $r=1, 2, \dots, m$, $s=1, 2, \dots, n$ resta sempre inferiore a un numero fisso indipendente dalla suddivisione considerata.

2_b). - Per ogni x e ogni y di $(0, 2\pi)$ si ha

$$V_{(y)}(x, 2\pi) < L, \quad V_{(x)}(2\pi, y) < L,$$

con L costante positiva.

Si dimostra che, se vale 1_b), basta che sia $V_{(y)}(0, 2\pi) < L'$, $V_{(x)}(2\pi, 0) < L'$ affinché valga 2_b).

In seguito le funzioni a variazione limitata secondo TONELLI le chiameremo semplicemente funzioni di due variabili a variazione limitata.

2. - Data in Q una funzione continua $f(x, y)$, essa si dice *assolutamente continua secondo Carathéodory* (8) in Q se:

1_c). - È *doppiamente assolutamente continua* in Q , ossia se preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può determinare in corrispondenza un λ tale che per ogni gruppo di rettangoli, a lati paralleli agli assi x e y , in numero finito, non sovrappontesi, contenuti in Q e di area complessiva minore di λ , sia

$$\sum |f(x', y') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x'', y'')| < \varepsilon$$

dove (x', y') e (x'', y'') indicano i vertici di coordinate minime e massime del rettangolo generico del gruppo.

2_c). - Per tutti i valori di x' e y' dell'intervallo $(0, 2\pi)$ le $f(x', y)$, $f(x, y')$ sono funzioni, rispettivamente di y e x , assolutamente continue in $(0, 2\pi)$.

Si dimostra che, se vale 1_c) affinché valga 2_c) basta che $f(x, 0)$ e $f(0, y)$ siano assolutamente continue in $(0, 2\pi)$ come funzioni di x e y rispettivamente.

(7) Loc. cit. in (1).

(8) C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über Reelle Functionen*. Ediz. 1918, p. 653.

3. - Data in Q una funzione $f(x, y)$ integrabile secondo LEBESGUE, dicesi serie doppia di FOURIER di tale funzione la serie doppia

$$(1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y)$$

dove è

$$(2) \quad \lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se è } m=n=0; \\ \frac{1}{2}, & \text{se è } m=0, n>0, \text{ oppure } m>0, n=0; \\ 1, & \text{se è } m>0, n>0; \end{cases}$$

$$A_{m,n}(x, y) = a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny;$$

$$a_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x, y) \cos mx \cos ny dx dy,$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x, y) \sin mx \cos ny dx dy,$$

$$c_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x, y) \cos mx \sin ny dx dy,$$

$$d_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x, y) \sin mx \sin ny dx dy.$$

Posto

$$s_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} A_{m,n}(x, y),$$

si dice, con STOLZ e PRINGSHEIM, che nel punto (x, y) la serie doppia (1) è convergente ed ha per somma il numero $S(x, y)$ se, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, è sempre possibile di determinare un $N > 0$ tale che per tutte le copie μ, ν di numeri interi, entrambi maggiori di N , sia

$$|S(x, y) - s_{\mu,\nu}(x, y)| < \varepsilon.$$

È noto che

$$(3) \quad s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\text{sen}(2\mu+1)u}{\text{sen } u} \cdot \frac{\text{sen}(2\nu+1)v}{\text{sen } v} du dv$$

con

$$(4) \quad F(x+2u, y+2v) = f(x+2u, y+2v) + f(x-2u, y+2v) + \\ + f(x+2u, y-2v) + f(x+2u, y+2v).$$

Si dice che la (1) è sommabile per linee in un punto (x, y) se in tale punto tutte le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y)$, ($n=0, 1, 2, \dots$) sono convergenti e se inoltre è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) \right)$. La somma di questa serie dicesi somma per linee della serie (1).

In modo analogo si definisce la somma per colonne della (1).

È noto che una serie doppia :

può essere convergente nel senso di STOLZ e PRINGSHEIM senza essere sommabile per linee o per colonne ;

può essere sommabile per linee e per colonne alla stessa somma senza essere convergente ;

può essere sommabile per linee e per colonne ed avere le due somme diverse.

Però se la serie (1) è convergente (nel senso di STOLZ e PRINGSHEIM) a somma $S(x, y)$ e se la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) \right]$ è convergente per ogni n [m], allora la (1) è pure sommabile per linee [colonne] a $S(x, y)$.

§ 1. - Lemmi.

Data una funzione $f(x, y)$ integrabile secondo LEBESGUE in Q e periodica di periodo 2π rispetto ad x e y , definiamo, relativamente a un punto (x, y) la funzione $g_{(u)}(u, v)$ nel seguente modo :

$$(5) \quad g_{(u)}(u, v) = \frac{1}{4u} \int_0^u F(x+2u, y+2v) du$$

per $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ e per tutti i valori di v in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ per cui esiste finito

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) du,$$

ossia per quasi tutti i v ; $g_{(u)}(u, v) = 0$, per $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ e per quei v di $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ per cui l'integrale sopra scritto non esiste finito.

Per $u=0$ si possono dare alla $g_{(u)}(u, v)$ valori arbitrari. Ne segue che $g_{(u)}(u, v)$ è per tutti i v di $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ assolutamente continua rispetto ad u in $\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ con $\varepsilon > 0$ comunque piccolo.

La $g_{(u)}(u, v)$ è quasi continua come funzione di (u, v) in $\left(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: infatti

essa è il quoziente della funzione quasi continua $\int_0^u F(x+2u, y+2v) du$ ⁽⁹⁾ per la funzione continua $4u$.

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial u} g_{(u)}(u, v) = \frac{1}{4u} [F(x+2u, y+2v) - g_{(u)}(u, v)]$$

[per quasi tutti i punti (u, v)] è pure una funzione quasi continua di (u, v) in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Se la funzione $g_{(u)}(u, v)$ è tale che la sua $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, v)$ sia integrabile rispetto a v in $(0, \frac{\pi}{2})$ allora $g_{(u)}(+0, v)$ esiste finito per quasi tutti i v ed è integrabile come funzione di v in $(0, \frac{\pi}{2})$ ⁽¹⁰⁾.

In questo caso poniamo $g_{(u)}(u, v) = g_{(u)}(+0, v)$.

LEMMA I. - In ogni punto (x, y) in cui la $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, v)$ di $g_{(u)}(u, v)$ è integrabile rispetto a v in $(0, \frac{\pi}{2})$, tutte le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y)$ convergono e si ha

$$(6) \quad \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{8\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(+0, v) \cos 2nv \, dv, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

in cui $\lambda_{0,n}$ è definita dalla (2).

Infatti, integrando per parti, abbiamo per quasi tutti i v , posto $k=2\mu+1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\text{sen } ku}{\text{sen } u} \, du = 2\pi(-1)^\mu g_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\text{sen } u} \left[k \cos ku - \frac{\cos u \text{sen } ku}{\text{sen } u} \right] \, du.$$

Poichè $g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\text{sen } u}$ è, per quasi tutti i v , a variazione limitata in $(0, \frac{\pi}{2})$ e assolutamente continua in $(\varepsilon, \frac{\pi}{2})$ come funzione della sola u e abbiamo posto $g_{(u)}(+0, v) = g_{(u)}(0, v)$, per un noto teorema $g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\text{sen } u}$ è assolutamente continua come

⁽⁹⁾ L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti*. Rend. R. Accad. Lincei (5), vol. XVIII, 1909, pp. 246-253.

⁽¹⁰⁾ L. TONELLI: *Serie trigonometriche*, p. 448.

funzione di u per quasi tutti i v . Per questi v si ha quindi, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
 & -4k \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \cos ku \, du = -2\pi(-1)^\mu g_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku \, du, \\
 (7) \quad & \frac{\operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \, du = \frac{4 \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \, du + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{4 \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku \, du.
 \end{aligned}$$

Essendo $g_{(u)}(u, v)$ e $\frac{\partial}{\partial u} g_{(u)}(u, v)$ quasi continue rispetto a (u, v) e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_{(u)}(u, v)| \, du \leq \frac{\pi}{2} |g(+0, v)| + \frac{\pi}{2} V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right), \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\partial}{\partial u} g_{(u)}(u, v) \right| \, du \leq V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right),$$

in cui i secondi membri sono integrabili rispetto a v , segue immediatamente per un noto teorema del TONELLI⁽¹⁴⁾, che le espressioni che figurano sotto il segno di integrale nel secondo membro di (7) sono superficialmente integrabili come funzioni di (u, v) in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Abbiamo perciò, posto $h=2n+1$,

$$\begin{aligned}
 (8) \quad s_{\mu, u}(x, y) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\operatorname{sen} ku \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \, dudv = \\
 &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \frac{\operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \, dudv + \\
 &+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku \frac{\operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \, dudv.
 \end{aligned}$$

(14) Loc. cit. in (9).

Fissiamo $h = 2n + 1$. Avendosi ⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u)(u, v) \frac{u}{\text{sen } u} \right]' \text{sen } ku \, du \right| &< \\ &< h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\text{sen } u} \left| \frac{\partial}{\partial u} g(u)(u, v) \right| du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(u)(u, v)| \cdot \left| \left(\frac{u}{\text{sen } u} \right)' \right| du \right] < \\ &< \frac{h\pi}{2} \left[V(u)\left(\frac{\pi}{2}, v\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(u)(u, v)| du \right] \end{aligned}$$

col secondo membro integrabile rispetto a v in $(0, \frac{\pi}{2})$, integrando per serie si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u)(u, v) \frac{u}{\text{sen } u} \right]' \text{sen } ku \, du = \\ = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} \left\{ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u)(u, v) \frac{u}{\text{sen } u} \right]' \text{sen } ku \, du \right\} dv = 0. \end{aligned}$$

Indicando con ε_μ una quantità che si annulla per $\mu \rightarrow \infty$, possiamo scrivere

$$(9) \quad s_{\mu, n}(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u, v) \frac{u}{\text{sen } u} \frac{\cos u \text{sen } ku}{\text{sen } u} \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} \, dudv + \varepsilon_\mu.$$

Ora

$$\sum_{m=0}^{\mu} A_{m, 0}(x, y) = s_{\mu, 0}(x, y)$$

e, se esiste, è

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m, 0}(x, y) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} s_{\mu, 0}(x, y);$$

⁽¹²⁾ Si ha infatti per u in $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{\text{sen } u} \right)' &= \frac{\text{sen } u - u \cos u}{\text{sen}^2 u} = \cos u \frac{\text{tang } u - u}{\text{sen}^2 u} \geq 0; \\ \frac{\text{sen } u - u \cos u}{\text{sen}^2 u} &< \frac{u}{\text{sen } u} \frac{1 - \cos u}{\text{sen } u} < \pi \frac{\text{sen}^2 \frac{u}{2}}{\text{sen } u} = \frac{\pi}{2} \text{tang } \frac{u}{2} \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

e per $n > 0$

$$\sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n}(x, y) = s_{\mu,n}(x, y) - s_{\mu,n-1}(x, y)$$

e, se esiste, è

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} [s_{\mu,n}(x, y) - s_{\mu,n-1}(x, y)].$$

Per la (9) abbiamo

$$(10) \quad s_{\mu,0}(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du dv + \varepsilon_{\mu}.$$

Per quasi tutti i v possiamo porre

$$(11) \quad g_{(u)}(u, v) = g_{(u)}(0, v) + P_{(u)}(u, v) - N_{(u)}(u, v)$$

con $P_{(u)}(u, v) \geq 0$, $N_{(u)}(u, v) \geq 0$, non decrescenti come funzioni di u e tali che sia $P_{(u)}(u, v) + N_{(u)}(u, v) = V_{(u)}(u, v)$.

Sostituendo con la (11) abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du &= g_{(u)}(0, v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du \end{aligned}$$

e applicando il secondo teorema della media, essendo $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$ crescente,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du &= g_{(u)}(0, v) \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du + \\ &+ P_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \int_{\varepsilon_v}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du - N_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \int_{\eta_v}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du \end{aligned}$$

con $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varepsilon_v \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta_v \leq \frac{\pi}{2}$. Essendo, per $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\left| \int \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du < \int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du < k \int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{u}{\operatorname{sen} u} du < \frac{\pi^2}{2}$$

ne segue

$$(12) \quad \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du \right| < \\ < \pi \left[|g(u)(0, v)| + P(u)\left(\frac{\pi}{2}, v\right) + N(u)\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \right] = \pi \left[|g(u)(0, v)| + V(u)\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \right],$$

in cui il secondo membro è integrabile rispetto a v in $(0, \frac{\pi}{2})$.

Integrando quindi per serie, dalla (10) abbiamo

$$(13) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} s_{\mu, 0}(x, y) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} dudv = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du \right] dv$$

ed essendo, per quasi tutti i v ,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du = g(u)(+0, v)$$

si conclude che è

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} s_{\mu, 0}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(+0, v) dv$$

e la (6) è provata per $n=0$.

Consideriamo ora $\sum_{m=0}^{\mu} A_{m, n}(x, y) = s_{\mu, n}(x, y) - s_{\mu, n-1}(x, y)$. Si ha

$$s_{\mu, n}(x, y) - s_{\mu, n-1}(x, y) = \\ = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u, v) \frac{4}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)v - \operatorname{sen}(2n-1)v}{\operatorname{sen} v} dudv + \varepsilon_{\mu}$$

e, ricordando che è $\operatorname{sen}(2n+1)v - \operatorname{sen}(2n-1)v = 2 \cos 2nv \operatorname{sen} v$, è

$$s_{\mu, n}(x, y) - s_{\mu, n-1}(x, y) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \cos 2nv dudv + \varepsilon_{\mu}.$$

Come l'integrale della (10) anche questo può integrarsi per serie; si ha quindi

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x,y) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} [s_{\mu,n}(x,y) - s_{\mu,n-1}(x,y)] = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(+0, v) \cos 2nv \, dv$$

e la (6) è provata per ogni $n > 0$.

OSSERVAZIONE: Si può anche dimostrare che la convergenza delle $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x,y)$ è uniforme rispetto ad n , ossia che, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario si può determinare un M tale che per $\mu > M$ sia, per ogni n

$$\left| \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n}(x,y) - \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x,y) \right| < \varepsilon$$

ossia

$$\left| \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n}(x,y) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(+0, v) \cos 2nv \, dv \right| < \varepsilon.$$

Dalla (8) abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n}(x,y) &= s_{\mu,n}(x,y) - s_{\mu,n-1}(x,y) = \\ &= \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u)(u,v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \cos 2nv \, dudv + \\ &+ \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u)(u,v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]'_u \operatorname{sen} ku \cos 2nv \, dudv. \end{aligned}$$

Per un noto teorema, preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, si può trovare un N tale che per $\mu > N$, $n > N$ sia

$$\frac{8}{\pi^2} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u)(u,v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]'_u \operatorname{sen} ku \cos 2nv \, dudv \right| < \varepsilon.$$

In corrispondenza a $n=0, 1, 2, \dots, N$ determiniamo i numeri $M_0, M_1, M_2, \dots, M_N$ tali che per $\mu > M_n$ sia

$$\frac{8}{\pi^2} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u)(u,v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]'_u \operatorname{sen} ku \cos 2nv \, dudv \right| < \varepsilon.$$

Indicando con M il maggiore fra i numeri $M_0, M_1, M_2, \dots, M_N, N$ si ha che per $\mu > M$ e per qualunque n è

$$\frac{8}{\pi^2} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g_{(w)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]'_{u} \operatorname{sen} ku \cos 2nv \, dudv \right| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora

$$\left| \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(w)}(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \cos 2nv \, dudv - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(w)}(+0, v) \cos 2nv \, dv \right|.$$

È già stato dimostrato dal TONELLI⁽¹³⁾ che questa espressione tende a zero per $k \rightarrow \infty$, uniformemente rispetto ad n .

Allo stesso modo, posto

$$g_{(v)}(u, v) = \frac{1}{4v} \int_0^v F(x+2u, y+2v) \, dv,$$

con convenzioni analoghe a quelle fatte per $g_{(w)}(u, v)$ quando

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \, dv$$

non esista finito, si può dimostrare il

LEMMA II. - In ogni punto (x, y) in cui la $V_{(v)}\left(u, \frac{\pi}{2}\right)$ di $g_{(v)}(u, v)$ è integrabile rispetto a u in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tutte le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{m, n}(x, y)$$

convergono e si ha

$$(6') \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{m, n}(x, y) = \frac{8\lambda_{m,0}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(v)}(u, +0) \cos 2mu \, du, \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

in cui $\lambda_{m,0}$ è definita dalla (2).

E qui vale evidentemente un'osservazione analoga a quella fatta al lemma I.

⁽¹³⁾ L. TONELLI: *Serie trigonometriche*, p. 477.

§ 2. - I° Teorema di Sommabilità.

TEOREMA: *Se la funzione $f(x, y)$, periodica di periodo 2π rispetto a x ed a y e superficialmente integrabile è tale che la sua $g_{(u)}(u, v)$ [$g_{(v)}(u, v)$] relativa a un punto (x, y) abbia la $V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ [$V_{(v)}\left(u, \frac{\pi}{2}\right)$] integrabile rispetto a v [u] in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e se la sua serie doppia di Fourier in quel punto converge, essa è anche sommabile per linee [colonne] e la somma così ottenuta coincide con la somma della serie stessa.*

Questo teorema segue immediatamente dai precedenti lemmi e da una proprietà rammentata nei Preliminari (n.° 3).

§ 3. - II° Teorema di Sommabilità.

TEOREMA: *Se la funzione $f(x, x)$ è integrabile in Q e periodica di periodo 2π rispetto ad x ed a y e se in un punto (x, y) la sua $g_{(u)}(u, v)$ [$g_{(v)}(u, v)$] ha la $V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ [$V_{(v)}\left(u, \frac{\pi}{2}\right)$] integrabile rispetto a v [u] in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e la serie di Fourier di $g_{(u)}(+0, v)$ [$g_{(v)}(u, +0)$] è convergente per $v=0$ [$u=0$] ed ha per somma s_1 [s_2], la serie doppia di Fourier di $f(x, y)$ è in quel punto sommabile per linee [colonne] e la sua somma è data da s_1 [s_2].*

Premettiamo la seguente osservazione:

Sia

$$s_{\mu, n}(x, y) = \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{s=0}^n A_{r, s}(x, y);$$

se esiste $\lim_{\mu \rightarrow \infty} s_{\mu, n}(x, y) = s_n(x, y)$ e se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x, y) = S(x, y)$,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{r, s}(x, y)$$

è sommabile per linee ad $S(x, y)$.

Infatti ogni linea converge e si ha

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_{r, 0}(x, y) = s_0(x, y), \quad \sum_{r=0}^{\infty} A_{r, s}(x, y) = s_s(x, y) - s_{s-1}(x, y);$$

inoltre

$$\sum_{s=0}^n \left(\sum_{r=0}^{\infty} A_{r, s}(x, y) \right) = s_n(x, y)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^n \left(\sum_{r=0}^{\infty} A_{r,s}(x, y) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x, y) = S(x, y) \quad (14).$$

La (9), che sussiste nelle nostre ipotesi, dà che è

$$s_{\mu, n}(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{u}{\text{sen } u} \frac{\cos u \text{ sen } ku}{\text{sen } u} \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dudv + \varepsilon_{\mu},$$

dove $\varepsilon_{\mu} \rightarrow 0$ per $\mu \rightarrow \infty$.

Fissiamo $h=2n+1$. Con procedimento analogo a quello usato per dimostrare la (13) si vede che è

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} s_{\mu, n}(x, y) = s_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(+0, v) \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dv$$

(14) Questa osservazione mette in evidenza il seguente fatto:

Sulla sommabilità per linee [colonne] della serie doppia di Fourier di una funzione $f(x, y)$ integrabile, in un punto (x, y) , influiscono soltanto i valori della funzione nei punti aventi l'ascissa [ordinata] prossima a x [y].

Per la (3) e per l'osservazione fatta basta dimostrare che, comunque si prenda $\delta > 0$, è

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\text{sen } (2\mu+1)u}{\text{sen } u} \frac{\text{sen } (2\nu+1)v}{\text{sen } v} dudv = 0.$$

Infatti, fissato ν , è

$$\left| \frac{\text{sen } (2\nu+1)v}{\text{sen } v} \right| \cdot \left| \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\text{sen } (2\mu+1)u}{\text{sen } u} du \right| < \frac{2\nu+1}{\text{sen } \delta} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} |F(x+2u, y+2v)| du$$

in cui il secondo membro è integrabile rispetto a v . Possiamo quindi sostituire al limite interno alla parentesi l'integrale del limite e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\text{sen } (2\mu+1)u}{\text{sen } u} \frac{\text{sen } (2\nu+1)v}{\text{sen } v} dudv = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } (2\nu+1)v}{\text{sen } v} \left[\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(x+2u, y+2v)}{\text{sen } u} \text{sen } (2\mu+1)u du \right] dv = 0 \end{aligned}$$

perchè il limite interno è nullo per quasi tutti i v di $(0, \frac{\pi}{2})$, essendo per questi v $\frac{F(x+2u, y+2v)}{\text{sen } u}$ integrabile rispetto ad u in $(\delta, \frac{\pi}{2})$.

ossia $s_n(x, y)$ è la somma parziale n^{ma} della serie di FOURIER della funzione $g(+0, v)$ per $v=0$. Quindi $\lim_{\mu \rightarrow \infty} s_n(x, y) = s_1$.

Nello stesso modo si dimostra la convergenza per colonne. Si ha immediatamente il

COROLLARIO: *Se la funzione $f(x, y)$ è integrabile e periodica di periodo 2π rispetto ad x ed y e se in un punto (x, y) la sua $g_{(u)}(u, v)$ [$g_{(v)}(u, v)$] ha la $V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, u\right)$ [$V_{(v)}\left(v, \frac{\pi}{2}\right)$] integrabile rispetto a v [u] in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che in quasi tutto $(0, \delta)$ $g_{(u)}(+0, v)$ [$g_{(v)}(u, +0)$] coincida con una funzione $\varphi(v)$ [$\psi(u)$] a variazione limitata, la serie doppia di Fourier di $f(x, y)$ è in quel punto sommabile per linee [colonne] e ha per somma $\varphi(+0)$ [$\psi(+0)$].*

§ 4. - Relazioni fra i precedenti teoremi di sommabilità e quelli dati dal Tonelli.

Supponiamo ora di avere una funzione $f(x, y)$ integrabile periodica di periodo 2π rispetto a x ed y , che sia inoltre a variazione limitata.

La sua $g_{(u)}(u, v)$, relativa a un punto (x, y) , ha la $V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ integrabile ⁽¹⁵⁾.

Sono quindi verificate le ipotesi dei lemmi precedenti. A cosa si riducono le (6), (6') in questo caso particolare?

Essendo

$$g_{(u)}(+0, v) = \frac{1}{4} F(x+0, y+2v), \quad g_{(v)}(u, +0) = \frac{1}{4} F(x+2u, y+0),$$

si ha

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+0, y+2v) \cos 2nv \, dv, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{2\lambda_{m,0}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+0) \cos 2mu \, du, \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$

o anche eseguendo nella prima espressione il cambiamento di variabile $y+2v=\beta$, nella seconda $x+2u=a$ e tenuto conto della periodicità di $f(x, y)$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n(y-\beta) \, d\beta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{2\lambda_{m,0}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a, y+0) + f(a, y-0)}{2} \cos m(x-a) \, da.$$

⁽¹⁵⁾ S. FAEDO: *Sulle medie delle funzioni a variazione limitata di due variabili*, § 7. Rend. R. Istituto Lombardo, 1938.

Come caso particolare dei lemmi dati e del primo teorema di sommabilità abbiamo quindi le proposizioni seguenti, già date dal TONELLI nella Memoria citata in (2):

« Se $f(x, y)$ è integrabile, periodica di periodo 2π rispetto ad x e a y e a variazione limitata, tutte le serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y), \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y)$$

convergono (le prime uniformemente rispetto ad n , le seconde uniformemente rispetto ad m) ed è

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n(y-\beta) d\beta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{2\lambda_{m,0}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha, y+0) + f(\alpha, y-0)}{2} \cos m(x-\alpha) d\alpha.$$

Se $f(x, y)$ è integrabile, periodica di periodo 2π rispetto ad x e a y e a variazione limitata, in ogni punto in cui la sua serie doppia di Fourier converge, questa serie è anche sommabile per linee e per colonne e le somme così ottenute coincidono con quelle della serie ».

Se si osserva poi che se esiste un $\delta > 0$ tale che in quasi tutto $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ l'espressione $\frac{1}{2} [f(x+0, v) + f(x-0, v)]$ coincida con una funzione $\varphi(v)$ a variazione limitata, è $g_{(\omega)}(+0, v)$ per quasi tutti i v in $(0, \delta)$ coincidente con $\varphi(v)$, dal II teorema di sommabilità segue il criterio pure già dato dal TONELLI:

Se $f(x, y)$ è integrabile e periodica di periodo 2π rispetto a x e a y , a variazione limitata e se per un punto (x, y) esiste un $\delta > 0$ tale che in quasi tutto $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ l'espressione $\frac{1}{2} [f(x_0+0, y) + f(x_0-0, y)]$ coincida con una funzione $\varphi(y)$ a variazione limitata, allora la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ è nel punto (x_0, y_0) sommabile per linee e la sua somma è data da $\frac{1}{2} (\varphi(y_0+0) + \varphi(y_0-0))$; (e analogo per le colonne).

§ 5 - Lemmi.

Data in Q una funzione $f(x, y)$ integrabile e periodica di periodo 2π rispetto ad x e y , si ponga, relativamente a un punto (x, y) ,

$$(14) \quad g(u, v) = \frac{1}{4uv} \int_0^u \int_0^v F(x+2u, y+2v) dudv$$

con $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < v \leq \frac{\pi}{2}$ e in cui $F(x+2u, y+2v)$ è definita dalla (4). Per $u=0$ e così pure per $v=0$ si possono dare alla $g(u, v)$ valori arbitrari.

Dalla (14) si ha che, qualunque sia la funzione $f(x, y)$ integrabile da cui si parta e qualunque sia il punto (x, y) che si consideri, la $g(u, v)$ è assolutamente continua secondo CARATHÉODORY in $(\varepsilon, \varepsilon; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, per ogni ε tale che sia $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$, ed inoltre quasi continua in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Consideriamo ora una funzione $f(x, y)$ tale che la $g(u, v)$ relativa a un punto (x, y) sia la variazione limitata in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. In questo caso $g(u, +0)$ e $g(+0, v)$ esistono finite per quasi tutti gli u e v rispettivamente e sono integrabili in $(0, \frac{\pi}{2})$ come funzioni di u e v . Abbiamo inoltre il seguente:

LEMMA III. - *In tutti i punti (x, y) in cui $g(u, v)$ è superficialmente integrabile in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ed ha la $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, v)$ integrabile rispetto a v in $(0, \frac{\pi}{2})$ con $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ finita e in cui $vg(+0, v)$ coincide per quasi tutti i v con una funzione $\varphi(v)$ assolutamente continua in $(0, \frac{\pi}{2})$ e tale che sia $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} g(+0, \frac{\pi}{2})$, tutte le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y)$ sono convergenti e si ha*

$$(15) \quad \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y) = \frac{8\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(v) \cos 2nv \, dv$$

in cui $\lambda_{0,n}$ è definita dalla (2).

Per la dimostrazione di questo lemma è necessario trasformare opportunamente l'espressione che dà la somma parziale

$$s_{\mu,n}(x, y) = \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{s=0}^n A_{r,s}(x, y).$$

Posto $2\mu + 1 = k$, $2n + 1 = h$, per la (3) si ha

$$s_{\mu,n}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x + 2u, y + 2v) \frac{\text{sen } ku}{\text{sen } u} \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} \, du \, dv.$$

Mediante un'integrazione per parti, essendo, per quasi tutti i v ,

$$g_{(u)}(u, v) = \frac{1}{4u} \int_0^u F(x + 2u, y + 2v) \, du,$$

abbiamo, per questi v ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\text{sen } ku}{\text{sen } u} du = 2\pi(-1)^\mu g_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) -$$

$$-4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{u}{\text{sen } u} \left[k \cos ku - \frac{\cos u \text{ sen } ku}{\text{sen } u} \right] du$$

e quindi

$$s_{\mu, n}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \frac{\text{sen } ku}{\text{sen } u} du =$$

$$= \frac{2}{\pi} (-1)^\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dv -$$

$$- \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[k \cos ku - \frac{\cos u \text{ sen } ku}{\text{sen } u} \right] \frac{u}{\text{sen } u} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dv.$$

Essendo

$$g(u, v) = \frac{1}{v} \int_0^v g_{(u)}(u, v) dv,$$

si ha integrando per parti

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dv = (-1)^n \frac{\pi}{2} g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{v}{\text{sen } v} \left[h \cos hv - \frac{\cos v \text{ sen } hv}{\text{sen } v} \right] dv,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{(u)}(u, v) \frac{\text{sen } hv}{\text{sen } v} dv = (-1)^n \frac{\pi}{2} g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{v}{\text{sen } v} \left[h \cos hv - \frac{\cos v \text{ sen } hv}{\text{sen } v} \right] dv$$

e sostituendo nell'ultima espressione di $s_{\mu, n}(x, y)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
 (16) \quad s_{\mu, n}(x, y) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dudv + (-1)^{\mu+n} g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \\
 &\quad - \frac{2}{\pi} (-1)^\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \left[h \cos hv - \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \right] dv - \\
 &\quad - \frac{2}{\pi} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \left[k \cos ku - \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \right] du + \\
 &\quad + \frac{4}{\pi^2} kh \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \cos ku \cos hv dudv - \\
 &\quad - \frac{4}{\pi^2} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \cos ku \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dudv - \\
 &\quad - \frac{4}{\pi^2} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \cos hv dudv.
 \end{aligned}$$

Si fissi $h=2n+1$. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{\pi} k (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \cos ku du &= (-1)^{\mu+n} g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \\
 &\quad + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku du = (-1)^{\mu+n} g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon_\mu'; \\
 \frac{4}{\pi^2} kh \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \cos ku \cos hv dudv &= \\
 &= \frac{2}{\pi} (-1)^\mu h \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos hv dv - \\
 &\quad - \frac{4}{\pi^2} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]'_u \frac{v}{\operatorname{sen} v} \operatorname{sen} ku \cos hv dudv = \\
 &= \frac{2}{\pi} (-1)^\mu h \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos hv dv + \varepsilon_\mu'';
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4}{\pi^2} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \cos ku \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dudv = \\
 & -\frac{2}{\pi} (-1)^\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dv + \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \frac{v}{\operatorname{sen} v} \operatorname{sen} ku \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dudv = \\
 & -\frac{2}{\pi} (-1)^\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dv + \varepsilon_\mu''',
 \end{aligned}$$

in cui ε_μ' , ε_μ'' , ε_μ''' tendono a zero per $\mu \rightarrow \infty$.

Infatti se si pone, come è lecito, $g\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = g\left(+0, \frac{\pi}{2}\right)$, $g\left(u, \frac{\pi}{2}\right)$ risulta assolutamente continua in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ed ammette quindi derivata $g_u'\left(u, \frac{\pi}{2}\right)$ integrabile in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; ne segue immediatamente che è pure integrabile, in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]'$ e quindi che $\varepsilon_\mu' \rightarrow 0$, per $\mu \rightarrow \infty$. Quanto a ε_μ'' si osservi che è

$$\begin{aligned}
 & \left| h \cos hv \frac{v}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku du \right| < \\
 & < \frac{\pi^2}{4} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\partial}{\partial u} g(u, v) \right| du + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(u, v)| \cdot \left| \left(\frac{u}{\operatorname{sen} u} \right)' \right| du
 \end{aligned}$$

e, per la nota (11),

$$\begin{aligned}
 & \left| h \cos hv \frac{v}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku du \right| < \\
 & < \frac{\pi^2}{2} h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\partial}{\partial u} g(u, v) \right| du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(u, v)| du \right] = \frac{\pi^2}{2} h \left[V(u)\left(\frac{\pi}{2}, v\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(u, v)| du \right]
 \end{aligned}$$

in cui il secondo membro è integrabile rispetto a v in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Integrando quindi

per serie abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu}'' &= -\frac{4}{\pi^2} h \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos hv \, dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku \, du = \\ &= -\frac{4}{\pi^2} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos hv \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \right]' \operatorname{sen} ku \, du \right] dv = 0; \end{aligned}$$

nello stesso modo si vede che è $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu}''' = 0$.

Posto $\varepsilon_{\mu}' + \varepsilon_{\mu}'' + \varepsilon_{\mu}''' = \varepsilon_{\mu}$, sostituendo nella (16) le espressioni trovate, otteniamo

$$\begin{aligned} (17) \quad s_{\mu, n}(x, y) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \, dudv + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \, du - \\ &\quad - \frac{4}{\pi^2} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \cos hv \, dudv + \varepsilon_{\mu}. \end{aligned}$$

Per $n=0$ è

$$\sum_{m=0}^{\mu} A_{m, 0}(x, y) = s_{\mu, 0}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} 2} \, du + \varepsilon_{\mu}$$

ed essendo $g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \cos u$ a variazione limitata in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\mu} A_{m, 0}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m, 0}(x, y) = g\left(+0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

e così la (15) è provata per $n=0$.

Consideriamo ora, per $n > 0$,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} [s_{\mu, n}(x, y) - s_{\mu, n-1}(x, y)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_{m, n}(x, y).$$

È

$$\begin{aligned}
 s_{\mu, n}(x, y) - s_{\bar{\mu}, n-1}(x, y) = & \\
 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \frac{v \cos v}{\operatorname{sen} v} \frac{\operatorname{sen} (2n+1)v - \operatorname{sen} (2n-1)v}{\operatorname{sen} v} dudv + & \\
 + \frac{4}{\pi} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du - & \\
 - \frac{8n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} [\cos (2n+1)v - \cos (2n-1)v] dudv - & \\
 - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} [\cos (2n+1)v + \cos (2n-1)v] dudv + \bar{\varepsilon}_{\mu} &
 \end{aligned}$$

e utilizzando le formule di prostaferesi, si ottiene

$$\begin{aligned}
 (18) \quad s_{\mu, n}(x, y) - s_{\bar{\mu}, n-1}(x, y) = \frac{4}{\pi} \left[(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du + \right. & \\
 \left. + \frac{4n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} v \operatorname{sen} 2nv dudv \right] + \bar{\varepsilon}_{\mu}. &
 \end{aligned}$$

Procedendo come si è fatto per la (12) si ottiene, qualunque sia k

$$\frac{16n}{\pi^2} \left| v \operatorname{sen} 2nv \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du \right| < 4\pi^2 n \left[|g(0, v)| + V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \right]$$

in cui il secondo membro è integrabile rispetto a v in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; perciò integrando per serie e ricordando che quasi dappertutto in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è $\varphi(v) = vg(+0, v)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{16n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) v \operatorname{sen} 2nv \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} dudv = & \\
 = \frac{8n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \operatorname{sen} 2nv \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{u}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} du \right] dv = & \\
 = \frac{8n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} vg(+0, v) \operatorname{sen} 2nv dv = \frac{8n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(v) \operatorname{sen} 2nv dv. &
 \end{aligned}$$

Dalla (18) abbiamo allora

$$(19) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} [s_{\mu, n}(x, y) - s_{\mu, n-1}(x, y)] = 2(-1)^n g\left(+0, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(v) \operatorname{sen} 2nv \, dv$$

e integrando per parti, osservando che è $\varphi(0) = 0$ ⁽¹⁶⁾,

$$\frac{8n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(v) \operatorname{sen} 2nv \, dv = (-1)^n \frac{4}{\pi} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(v) \cos 2nv \, dv.$$

Sostituendo l'ultima espressione nella (19) e tenendo conto che per ipotesi è $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} g\left(+0, \frac{\pi}{2}\right)$, concludiamo che

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (s_{\mu, n}(x, y) - s_{\mu, n-1}(x, y)) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m, n}(x, y) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(v) \cos 2nv \, dv.$$

La (15) sussiste quindi anche per $n > 0$ e il lemma è così completamente dimostrato.

Analogamente si può dimostrare il

LEMMA IV: *In tutti i punti (x, y) in cui $g(u, v)$ è superficialmente integrabile in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ed ha la $V_{(v)}(u, \frac{\pi}{2})$ integrabile rispetto ad u in $(0, \frac{\pi}{2})$ con $V_{(v)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ finita e in cui $ug(u, +0)$ coincide per quasi tutti gli u con una funzione $\psi(u)$ assolutamente continua e tale che sia $\psi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} g(\frac{\pi}{2}, +0)$, tutte le serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m, n}(x, y)$ sono convergenti e si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{m, n}(x, y) = \frac{8\lambda_{m, 0}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi'(u) \cos 2mu \, du, \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

⁽¹⁶⁾ Infatti se fosse $|\varphi(0)| = 2l$, con $l > 0$, si avrebbe, per la continuità di $\varphi(v)$, $|\varphi(v)| > l$ per $0 < v \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ e quindi $g(+0, v)$ non sarebbe integrabile in $(0, \frac{\pi}{2})$ avendosi

$$|g(+0, v)| = \frac{|\varphi(v)|}{v} > \frac{l}{v}$$

in $(0, \varepsilon)$.

§ 6. - III° Teorema di Sommabilità.

TEOREMA: Se la funzione $f(x, y)$ integrabile e periodica di periodo 2π rispetto ad x e a y è tale che in un punto (x, y) la funzione $g(u, v)$ sia superficialmente integrabile in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ed abbia $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, v)$ $[V_{(v)}(u, \frac{\pi}{2})]$ integrabile rispetto a v $[u]$ in $(0, \frac{\pi}{2})$, con $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $[V_{(v)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})]$ finita e renda $vg(+0, v)$ $[ug(u, +0)]$ coincidente per quasi tutti i v $[u]$ con una funzione $\varphi(v)$ $[\psi(u)]$ assolutamente continua in $(0, \frac{\pi}{2})$ e in modo che sia $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} g(+0, \frac{\pi}{2})$ $[\psi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} g(\frac{\pi}{2}, +0)]$; se la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ in quel punto converge, tale serie è anche sommabile per linee [colonne] alla stessa somma.

Questo teorema segue immediatamente dai lemmi III e IV.

Per stabilire il suo criterio di convergenza W. H. YOUNG ⁽¹⁷⁾ ha supposto che la funzione $g(u, v)$ sia a variazione limitata secondo HARDY. Sappiamo anche che in $(\varepsilon, \varepsilon; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, con $\varepsilon > 0$, $g(u, v)$ è assolutamente continua secondo CARATHÉODORY; si può quindi scrivere

$$(20) \quad g(u, v) - g(u, \varepsilon) - g(\varepsilon, v) + g(\varepsilon, \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^v \int_{\varepsilon}^u g''_{\alpha, \beta}(a, \beta) da d\beta.$$

Avendo posto $g(u, 0) = g(u, +0)$, $g(0, v) = g(+0, v)$, $g(0, 0) = g(+0, +0)$, il primo membro della (20) è una funzione continua per $\varepsilon \rightarrow 0$; lo è quindi anche il secondo, ed essendo $g(a, \beta)$ continua e a variazione limitata secondo HARDY in tutto $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $g''_{\alpha, \beta}(a, \beta)$ è integrabile in tutto $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ⁽¹⁸⁾, perciò passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ è

$$(21) \quad g(u, v) = g(u, 0) + g(0, v) - g(0, 0) + \int_0^u \int_0^v g''_{\alpha, \beta}(a, \beta) da d\beta,$$

ossia $g(u, v)$ è doppiamente assolutamente continua in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

⁽¹⁷⁾ Se $f(x, y)$ è integrabile e se

$$g(u, v) = \frac{1}{4uv} \int_0^u \int_0^v F(x+2u, y+2v) du dv,$$

con $g(u, 0) = g(u, +0)$, $g(0, v) = g(+0, v)$, $g(0, 0) = g(+0, +0)$, è a variazione limitata secondo HARDY in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la serie doppia di FOURIER di $f(x, y)$ converge nel punto (x, y) a $g(+0, +0)$. Cfr. nota ⁽⁴⁾.

⁽¹⁸⁾ W. H. YOUNG: *Sur la dérivation des fonctions à variation bornée*. Comptes rendus, T. 164, 1917, p. 622.

Avendo posto $g(u, +0) = g(u, 0)$, $g(u, v)$ è per ogni $u > 0$ assolutamente continua rispetto a v in $(0, \frac{\pi}{2})$. Per una proprietà ricordata nei Preliminari (n.º 2) [che del resto segue immediatamente dalla (21) qualora si sostituiscano ai limiti zero dell'integrale dei valori $u_1 \neq 0, v_1 \neq 0$], $g(u, v)$ è assolutamente continua rispetto a v per tutti gli u e quindi $g(0, v) = g(+0, v)$ e così pure $g(u, 0) = g(u, +0)$ sono assolutamente continue come funzioni di v e di u in $(0, \frac{\pi}{2})$.

Come corollario del III teorema si ha quindi:

Se una funzione $f(x, y)$ soddisfa in un punto (x, y) alle condizioni del criterio di convergenza di W. H. Young, la sua serie doppia di Fourier è pure sommabile per linee e per colonne alla stessa somma.

§ 7. - IVº Teorema di Sommabilità.

TEOREMA: *Se la funzione $f(x, y)$ integrabile in Q e periodica di periodo 2π rispetto ad x e a y è tale che in un punto (x, y) la funzione $g(u, v)$ sia superficialmente integrabile in $(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ed abbia $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, v)$ [$V_{(v)}(u, \frac{\pi}{2})$] integrabile rispetto a v [u] in $(0, \frac{\pi}{2})$ con $V_{(u)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ [$V_{(v)}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$] finita e $g(+0, v)$ [$g(u, +0)$] coincidente per quasi tutti i v [u] con una funzione $\varphi(v)$ [$\psi(u)$] assolutamente continua in $(0, \frac{\pi}{2})$ e in modo che sia $\varphi(\frac{\pi}{2}) = g(+0, \frac{\pi}{2})$ [$\psi(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}, +0)$] la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ è in quel punto sommabile per linee [colonne] ed ha per somma $\varphi(0)$ [$\psi(0)$].*

Si fissi $h = 2n + 1$. Dobbiamo trovare il limite di $s_{\mu, n}(x, y)$ per $\mu \rightarrow \infty$, in cui $s_{\mu, n}(x, y)$ è data dalla (17), che sussiste in questa ipotesi.

Quanto a

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u, v) \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \frac{\cos u \operatorname{sen} ku}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dudv$$

analogamente a quanto si è visto per la (10) è uguale all'integrale del limite, ossia a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(+0, v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos v \frac{\operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dv = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos v \frac{\operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} dv.$$

Nello stesso modo si vede che la rimanente parte del secondo membro

della (17) tende, per $\mu \rightarrow \infty$, a

$$\begin{aligned} (-1)^n g\left(+0, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(+0, v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos hv \, dv = \\ = (-1)^n \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos hv \, dv. \end{aligned}$$

Ma, integrando per parti, è

$$-\frac{2}{\pi} h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \cos hv \, dv = (-1)^n \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi(v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \right]' \operatorname{sen} hv \, dv,$$

quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} s_{\mu, n}(x, y) = s_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \frac{\cos v \operatorname{sen} hv}{\operatorname{sen} v} \, dv + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi(v) \frac{v}{\operatorname{sen} v} \right]' \operatorname{sen} hv \, dv, \end{aligned}$$

da cui $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x, y) = \varphi(0)$.

Analogamente si procede per dimostrare la convergenza per colonne.

§ 8. - Confronto fra i Teoremi III e IV e quelli del Tonelli.

Vediamo ora in quale relazione stiano i risultati dati nei §§ 5, 6, 7 con quelli del TONELLI ricordati nel § 4.

Supponiamo quindi di avere una funzione $f(x, y)$ integrabile, a variazione limitata in Q e definita in tutto il piano mediante la periodicità rispetto ad x e ad y . Posto al solito

$$g(u, v) = \frac{1}{4uv} \int_0^u \int_0^v F(x+2u, y+2v) \, dudv$$

per $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < v \leq \frac{\pi}{2}$, essendo (x, y) un punto qualsiasi, per tutti gli $u > 0$ è

$$(22) \quad g(u, +0) = \frac{1}{4u} \int_0^u F(x+2u, y+0) \, du$$

e, per tutti i $v > 0$,

$$(22') \quad g(+0, v) = \frac{1}{4v} \int_0^v F(x+0, y+2v) dv.$$

Infatti è

$$(23) \quad g(u, v) = \frac{1}{4u} \int_0^u \frac{du}{v} \int_0^v F(x+2u, y+2v) dv.$$

Scelto v_1 in $(0, \frac{\pi}{2})$ tale che $F(x+2u, y+2v_1)$ sia a variazione limitata in $(0, \frac{\pi}{2})$ rispetto ad u e quindi sia $|F(x+2u, y+2v_1)| < M$, e indicata con $W_{(v)}(x+2u, y+2v)$ la variazione totale nell'intervallo $(0, v)$ della $F(x+2u, y+2v)$ considerata come funzione della sola v , è

$$|F(x+2u, y+2v)| \leq |F(x+2u, y+2v_1)| + \\ + W_{(v)}(x+2u, y+\pi) < M + W_{(v)}(x+2u, y+\pi),$$

col secondo membro integrabile rispetto ad u . Ne viene che è

$$\left| \frac{1}{v} \int_0^v F(x+2u, y+2v) dv \right| \leq M + W_{(v)}(x+2u, y+\pi)$$

e perciò, per un noto teorema di integrazione per serie, $g(u, +0)$ esiste per tutti gli $u > 0$ ed è, per la (23),

$$g(u, +0) = \frac{1}{4u} \int_0^u \left[\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \int_0^v F(x+2u, y+2v) dv \right] du = \frac{1}{4u} \int_0^u F(x+2u, y+0) du.$$

Nello stesso modo si dimostra la (22').

Perciò $vg(+0, v)$ e $ug(u, +0)$ coincidono rispettivamente per tutti i $v > 0$ con la funzione

$$\frac{1}{4} \int_0^v F(x+0, y+2v) dv = \varphi(v)$$

e per tutti gli $u > 0$ con

$$\frac{1}{4} \int_0^u F(x+2u, y+0) du = \psi(u),$$

che sono assolutamente continue in tutto $(0, \frac{\pi}{2})$ ed è

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} g\left(+0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} g\left(\frac{\pi}{2}, +0\right).$$

Inoltre $V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $V_{(v)}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sono finite. Infatti $V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è la variazione totale rispetto ad u , nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, della funzione

$$g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi u} \int_0^u \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) dv du.$$

Posto

$$\Phi(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) dv,$$

$\Phi(u)$ è a variazione limitata in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Si vede infatti facilmente che la variazione totale di $\Phi(u)$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è al più uguale a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} W_{(u)}(x+\pi, y+2v) dv,$$

in cui $W_{(u)}(x+\pi, y+2v)$ indica la variazione totale, nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, della funzione $F(x+2u, y+2v)$, considerata come funzione della sola u . Posto quindi

$$\Phi(u) = \Phi(0) + p(u) - n(u), \quad \Phi(+0) = \Phi(0) + p(+0) - n(+0),$$

da cui

$$\Phi(u) = \Phi(+0) + [p(u) - p(+0)] - [n(u) - n(+0)]$$

con $p(u) \geq 0$, $n(u) \geq 0$, non decrescenti e tali che sia

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(+0) + n\left(\frac{\pi}{2}\right) - n(+0) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} W_{(u)}(x+\pi, y+2v) dv,$$

è

$$g\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi u} \int_0^u \Phi(u) du = \frac{1}{2\pi} \Phi(+0) + \\ + \frac{1}{2\pi u} \int_0^u [p(u) - p(+0)] du - \frac{1}{2\pi u} \int_0^u [n(u) - n(+0)] du.$$

Essendo $\Phi(+0)$ finito,

$$\frac{1}{2\pi u} \int_0^u [p(u) - p(+0)] du \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi u} \int_0^u [n(u) - n(+0)] du$$

non decrescenti, è

$$V_{(u)}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) < p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(+0) + n\left(\frac{\pi}{2}\right) - n(+0) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} W_{(u)}(x + \pi, y + 2v) dv.$$

Uguualmente si vede che è finita $V_{(v)}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Abbiamo quindi dimostrato che se $f(x, y)$ è integrabile e a variazione limitata e definita in tutto il piano mediante la periodicità, la $g(u, v)$ relativa ad un punto qualsiasi soddisfa a tutte le ipotesi dei lemmi III e IV, salvo al più alle condizioni di essere integrabile e a variazione limitata in $\left(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dall'essere la $f(x, y)$ integrabile e a variazione limitata in Q non si può in generale dedurre che tale sia la sua $g(u, v)$ relativa a un qualsiasi punto (x, y) . Però se per un $\varepsilon > 0$, indicate con $V_{(u)}(x+u, y+v)$, $V_{(v)}(x+u, y+v)$ le variazioni totali negli intervalli $(0, u)$, $(0, v)$ della $F(x+2u, y+2v)$ come funzione rispettivamente della sola u e della sola v ,

$$V_{(u)}(x+\varepsilon, y+v) \log v, \quad V_{(v)}(x+u, y+\varepsilon) \log u$$

sono integrabili rispettivamente come funzioni di v e di u in $(0, \varepsilon)$, allora

$$g(u, v) = \frac{1}{4uv} \int_0^u \int_0^v F(x+2u, y+2v) dudv$$

è a variazione limitata in $\left(0, 0; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ⁽¹⁹⁾.

In queste ipotesi, essendo $g(u, v)$ quasi continua e a variazione limitata essa è anche integrabile ⁽²⁰⁾, e quindi la funzione $f(x, y)$ soddisfa, oltre che ai teoremi del TONELLI citati nel § 4, anche ai lemmi III e IV.

Ciò però non accade in generale.

⁽¹⁹⁾ S. FAEDO, loc. cit. in ⁽¹⁵⁾ § 6.

⁽²⁰⁾ L. TONELLI: *Serie trigonometrica*, p. 448.