ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIANFRANCO CIMMINO

Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 7, nº 1 (1938), p. 73-96

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_1_73_0>

SULLE EQUAZIONI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO ELLITTICO SOPRA UNA SUPERFICIE CHIUSA

di GIANFRANCO CIMMINO (Napoli).

Allo studio delle equazioni alle derivate parziali su una superficie, o più generalmente su una varietà, se si prescinde dalle numerose ricerche riguardanti le funzioni potenziali sulle superficie di RIEMANN, e da quelle sulla equazione di BELTRAMI che si presenta nel problema della rappresentazione conforme di una superficie ordinaria, non sono stati dedicati finora, per quanto sappia, che pochi lavori. Abbiamo da citare soltanto una estensione dell'equazione di BELTRAMI considerata da É. PICARD (1), un esempio trattato da D. HILBERT (2), che ha esposto il suo metodo della funzione detta parametrice, per il caso di una equazione lineare alle derivate parziali del second'ordine di tipo ellitico sopra la sfera (3), un lavoro di G. GIRAUD (4), in cui la definizione dell'equazione è data in base a una metrica fissata sulla varietà e la risoluzione del problema viene ricondotta a quella di una equazione integrale, mediante il consueto metodo della funzione di GREEN.

Nella presente memoria si precisa anzitutto in generale il concetto di equazione alle derivate parziali sopra una superficie topologicamente definita. Si estende poi al caso delle equazioni generali di tipo ellittico del secondo ordine sopra una superficie chiusa un metodo ideato da R. CACCIOPPOLI (5), per provare i teoremi di esistenza degli integrali abeliani sulle superficie di RIEMANN chiuse, metodo che si basa su alcune semplici nozioni di analisi funzionale lineare e in cui non si fa ricorso nè alla funzione di GREEN, nè ad altre soluzioni fondamentali del genere.

(1) Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, III série, t. 25, pp. 9-17, (1909).

(2) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,* pp. 213-242.

(3) Il metodo della parametrice di D. HILBERT è stato poi esteso da O. HAUPT, nello studio di un'equazione a derivate parziali su una superficie di RIEMANN, Mathematische Annalen, t. 88, pp. 136-150, (1922).

(4) Annales de la Société polonaise de mathématique, t. XII, pp. 35-54, (1934).

(5) Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie 4ª, vol. IV, pp. 49-54, (1934).

Al fine di giungere a tale estensione, si dimostra una proprietà integrale per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali considerate, la quale costituisce una naturale generalizzazione della proprietà espressa dal teorema della media di GAUSS per le funzioni armoniche. E, al pari della proprietà di media delle funzioni armoniche, così pure la detta proprietà integrale si riconosce come una proprietà caratteristica, nel senso che una funzione, supposta anche soltanto sommabile insieme con una sua certa potenza, se verifica quella proprietà in tutto un campo, non può che coincidere, a meno eventualmente dei punti di un insieme di misura nulla, con una soluzione dell'equazione a derivate parziali.

Dall'indicata estensione del metodo di R. CACCIOPPOLI si deduce senza difficoltà il teorema dell'alternativa. E si osservi che, in tal maniera, si giunge direttamente a teoremi esistenziali su una superficie chiusa, laddove, volendo, come si fa talvolta, dedurli per mezzo del procedimento alternato di SCHWARZ dai teoremi esistenziali pel caso di una superficie aperta, si dovrebbe preventivamente trattare questo caso, introducendo così una difficoltà estranea al problema sulla superficie chiusa, e cioè quella di rendere verificata la condizione al contorno.

Del modo di superare tale difficoltà, quando si voglia applicare il metodo del presente lavoro anche al caso delle superficie aperte, mi propongo di occuparmi in una prossima ricerca.

Infine, è pure da rilevare che, se qui, per semplicità, si considera il caso delle equazioni in due variabili, l'estensione al caso di più variabili non presenta peraltro nessuna sostanziale difficoltà.

1. - Definizioni e ipotesi fondamentali.

Sia S una superficie chiusa topologicamente definita ([6]). Ad ogni punto P di S si coordinano dunque degli intorni di P su S, e in base a questa nozione si può dare la definizione di punto limite, punto interno, esterno, frontiera per un insieme di punti di S, e quindi la definizione di insieme aperto (i suddetti intorni riuscendo particolari insiemi aperti), insieme chiuso e quella di funzione continua su S.

La superficie S si può ricoprire per intero con un numero finito di intorni, diciamo $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$, ciascuno dei quali, naturalmente, si sovrapporrà in parte a qualcuno dei rimanenti. Stabilita una corrispondenza biunivoca e bicontinua Γ_k fra i punti P di ciascun $\mathfrak{J}_k$ e i punti di un dato insieme aperto A del piano x, y, si dirà che gli $\mathfrak{J}_k$ e le Γ_k forniscono una *rappresentazione Γ di S su A*. È poi sempre possibile fissare in ciascuno degli $\mathfrak{J}_k$ una porzione chiusa S_k di S in maniera che le $S_1, S_2, \ldots, S_n$ forniscano una decomposizione di S, cioè siano due a due prive di punti interni comuni ed abbiano per somma la S.

([6]) Cfr. H. WEYL: *Die Idee der Riemannschen Fläche*, pp. 16-25.

In seguito considereremo soltanto rappresentazioni Γ tali che, allorquando due intorni $\mathfrak{I}_h$, $\mathfrak{I}_k$ abbiano punti comuni, detti x_h, y_h, e x_k, y_k i corrispondenti in A di uno stesso punto di S pensato come appartenente una volta a $\mathfrak{I}_h$ e una volta a $\mathfrak{I}_k$, nella corrispondenza biunivoca e bicontinua che ne consegue fra gl'intorni su A di x_h, y_h e x_k, y_k, le x_h, y_h siano funzioni continue insieme con le derivate parziali dei primi due ordini rispetto alle x_k, y_k (e quindi anche inversamente, le x_k, y_k rispetto alle x_h, y_h).

Supporremo che sia assegnata, una volta per tutte, una certa rappresentazione $\overline{\Gamma}$ di tale tipo, e considereremo esclusivamente rappresentazioni Γ di S, tali che, nella corrispondenza biunivoca e bicontinua intercedente fra gl'insiemi formati dai punti $\bar{x}$, $\bar{y}$ e x, y di A, che corrispondono, in una $\overline{\Gamma}_h$ relativa a $\overline{\Gamma}$ e in una Γ_k relativa a Γ, a uno stesso punto di S, le x, y riescano funzioni delle $\bar{x}$, $\bar{y}$ dotate di derivate parziali prime e seconde continue (e viceversa). Rappresentazioni cosiffatte verranno dette *rappresentazioni regolari di* S.

Chiameremo *misurabili* gl'insiemi di punti E di S, ai quali corrispondono in $\overline{\Gamma}$ (e quindi anche in ogni altra rappresentazione regolare Γ di S) insiemi misurabili di A. E se questi ultimi sono tutti di misura nulla, diremo che è di misura nulla l'insieme E.

Ad ogni funzione $\varphi(P)$ assegnata su S corrispondono, mediante Γ, delle funzioni $\varphi_k(x, y)$ definite in A; è immediato che la $\varphi(P)$ sarà continua in un punto P di S quando, e solo quando, una Γ_k relativa a una rappresentazione regolare Γ dia luogo a una funzione φ_k continua nel punto x, y di A corrispondente a P. Se inoltre la $\varphi_k(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime (o seconde) continue in x, y, allora la $\varphi(P)$ si dirà dotata di derivate parziali prime (o seconde) continue nel punto P di S.

La $\varphi(P)$ si dirà *sommabile su* S, se tali sono le $\varphi_k(x, y)$ ad essa corrispondenti mediante Γ in A. Questa nozione, come le precedenti, non dipende, evidentemente, dalla rappresentazione regolare Γ adottata per S. Peraltro il valore dell'integrale di $\varphi(P)$ su S, o su un insieme E misurabile di S (in particolare la misura dell'insieme E), non può definirsi in maniera indipendente dalla rappresentazione Γ. Precisamente, indicando con E_k gl'insiemi di A, corrispondenti nelle Γ_k delle porzioni di E contenute nelle singole S_k, porremo per definizione

$$\iint_{E(\Gamma)} \varphi(P)dP = \sum_k \iint_{E_k} \varphi_k(x, y)dxdy.$$

Sia ora $F(E)$ una funzione additiva degl'insiemi misurabili E di S. La $F(E)$ si dirà *assolutamente continua su* S, se, per ogni successione di insiemi misurabili E, per cui tenda a zero la misura (presa rispetto a $\overline{\Gamma}$, e quindi anche la misura presa rispetto a una qualsiasi altra rappresentazione regolare Γ), riesce $\lim F(E) = 0$. Alla $F(E)$, mediante una rappresentazione regolare Γ, corrisponderanno delle funzioni additive assolutamente continue $F_k(E)$ in A. Le derivate di queste sono delle funzioni $\delta_k(x, y)$ sommabili in A. Le funzioni δ_k verranno da noi anche indicate con l'unica lettera δ, e si dirà che δ è la *densità* della $F(E)$ relativa a Γ.

Se x, y e x', y' sono le coordinate dei punti di A che hanno come corrispondente, rispettivamente in una Γ_h relativa a Γ e in una Γ_k' relativa a un'altra rappresentazione regolare Γ' (che può anche essere, in particolare, la stessa Γ), un medesimo punto di S comune ai due intorni $\mathfrak{I}_h$, $\mathfrak{I}_k'$, la densità $\delta'(x', y')$ di $F(E)$ relativa a Γ_k' si otterrà da quella $\delta(x, y)$ relativa a Γ_h mediante la relazione

$$\delta'(x', y') = \delta(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')},$$

valida, a meno eventualmente dei punti di un insieme di misura nulla, in tutta la parte comune a $\mathfrak{I}_h$ ed $\mathfrak{I}_k'$.

2. - Equazioni alle derivate parziali su S.

Sia u una funzione dotata di derivate parziali prime e seconde continue su S e siano $a_k, b_k, c_k, l_k, m_k, q_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ delle funzioni definite nell'intorno $\mathfrak{I}_k$ di S, relativo a una certa rappresentazione regolare Γ di S su A. Consideriamo l'espressione a derivate parziali

$$\mathfrak{L}_\Gamma u = a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + l u_x + m u_y + q u, \tag{1}$$

con la quale simboleggiamo le diverse espressioni a derivate parziali definite in A, quando, in ogni intorno $\mathfrak{I}_k$ relativo a Γ, ai coefficienti $a, b, \ldots, q$ si sostituiscano $a_k, b_k, \ldots, q_k$ e alla u la funzione di x, y cui essa si riduce in $\mathfrak{I}_k$ in base a Γ. Nella parte comune a due intorni $\mathfrak{I}_h$, $\mathfrak{I}_k$ le due rappresentazioni Γ_h, Γ_k faranno corrispondere a uno stesso punto di S due punti x_h, y_h e x_k, y_k di A. Così si avranno due sistemi di valori dei coefficienti; noi esigeremo che questi due sistemi di valori siano legati fra loro in maniera tale che risulti

$$\mathfrak{L}_{\Gamma_h} u = \mathfrak{L}_{\Gamma_k} u \cdot \frac{\partial(x_k, y_k)}{\partial(x_h, y_h)},$$

dove al secondo membro la $\mathfrak{L}_{\Gamma_k} u$ si pensi trasformata in una espressione a derivate parziali rispetto alle variabili x_h, y_h mediante le formole di trasformazione che fanno passare dalle x_k, y_k alle x_h, y_h. Conformemente a ciò, passando da Γ a un'altra rappresentazione regolare Γ', definiremo la trasformata di $\mathfrak{L}_\Gamma u$ in Γ' determinando i coefficienti $a', b', \ldots, q'$ relativi a Γ' in maniera che, dette x, y e x' y' le coordinate di due punti di A corrispondenti in Γ e Γ' rispettivamente a un medesimo punto P di S, risulti

$$\mathfrak{L}_{\Gamma'} u = \mathfrak{L}_\Gamma u \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}. \tag{2}$$

In altri termini, posto

$$\mathfrak{L}_{\Gamma'} u = a' u_{x'x'} + 2b' u_{x'y'} + c' u_{y'y'} + l' u_{x'} + m' u_{y'} + q' u, \tag{3}$$

i coefficienti di $\mathfrak{L}_{\Gamma'} u$ sono legati a quelli di $\mathfrak{L}_{\Gamma} u$ dalle relazioni

$$\left\{\begin{array}{l} a x_x'^2 + 2b x_x' x_y' + c x_y'^2 = a' \cdot (x_x' y_y' - x_y' y_x'), \\ a x_x' y_x' + b \cdot (x_x' y_y' + x_y' y_x') + c x_y' y_y' = b' \cdot (x_x' y_y' - x_y' y_x'), \\ a y_x'^2 + 2b y_x' y_y' + c y_y'^2 = c' \cdot (x_x' y_y' - x_y' y_x'), \\ a x'_{xx} + 2b x'_{xy} + c x'_{yy} + l x_x' + m x_y' = l' \cdot (x_x' y_y' - x_y' y_x'), \\ a y'_{xx} + 2b y'_{xy} + c y'_{yy} + l y_x' + m y_y' = m' \cdot (x_x' y_y' - x_y' y_x'), \\ q = q' \cdot (x_x' y_y' - x_y' y_x'). \end{array}\right. \tag{4}$$

Evidentemente, per (2), la relazione fra $\mathfrak{L}_{\Gamma} u$ ed $\mathfrak{L}_{\Gamma'} u$ è reciproca.

Indicheremo brevemente con $\mathfrak{L} u$ l'insieme di tutte le $\mathfrak{L}_{\Gamma} u$ (per tutte le rappresentazioni regolari Γ), oppure una qualunque di esse, e diremo che $\mathfrak{L} u = 0$ è una *equazione alle derivate parziali su S.*

Dalle (4) risulta che il valore del discriminante $ac - b^2$ è indipendente dalla rappresentazione regolare Γ alla quale $\mathfrak{L} u$ viene riferita, ciò che consente di distinguere le equazioni alle derivate parziali sulla superficie nei tre tipi ellitico, iperbolico e parabolico alla maniera consueta.

Consideriamo ora, supponendo la continuità in A anche per le derivate parziali prime e seconde di a, b, c e per le derivate parziali prime di l, m, l'espressione, aggiunta della (1),

$$\mathfrak{M}_{\Gamma} v = (av)_{xx} + 2(bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (lv)_x - (mv)_y + qv. \tag{5}$$

In base alle (4), un facile calcolo permette di riconoscere che la $\mathfrak{M}_{\Gamma'} v$, dedotta dalla (5) col passaggio da Γ a Γ', sarà pure l'espressione aggiunta della (3). Pertanto la $\mathfrak{M} v$ può chiamarsi *l'aggiunta di $\mathfrak{L} u$ su S.*

La $\mathfrak{L} u$ si dirà *autoaggiunta*, se i suoi coefficienti rispetto a $\overline{\Gamma}$ (e quindi anche rispetto ad ogni altra Γ) coincidono ordinatamente con quelli di $\mathfrak{M} v$.

Per avere un semplice esempio di equazione alle derivate parziali su una superficie ordinaria, basta pensare alla classica equazione di BELTRAMI, la quale è appunto autoaggiunta e di tipo ellittico.

3. - Le funzioni additive d'insieme legate a un'equazione alle derivate parziali su S.

In base alla data definizione dell'espressione alle derivate parziali $\mathfrak{L} u$ su S, si vede che, secondo quanto è stato osservato in fine del n.° 1, la $\mathfrak{L} u$ può considerarsi come una densità, relativa a una certa funzione additiva sulla superficie.

Consideriamo ora, indicando con p un numero > 2, la totalità delle funzioni additive d'insieme $F(E)$ con densità di potenza $\frac{p}{p-1}$ sommabile su S. Lo spazio funzionale costituito da queste $F(E)$ è, naturalmente, indipendente dalla particolare rappresentazione regolare Γ prescelta per S. Fissiamo in esso una metrica, dipendente dalla rappresentazione Γ, definendo come *distanza di due funzioni* $F_1(E)$, $F_2(E)$, di densità rispettivamente $\delta_1(P)$, $\delta_2(P)$, la

$$\| F_1(E) - F_2(E) \| = \Big(\iint_{S(\Gamma)} (\delta_1(P) - \delta_2(P))^{\frac{p}{p-1}} dP \Big)^{\frac{p-1}{p}} . \tag{6}$$

Definiamo poi la relazione di limite

$$\lim_{n \to \infty} F_n(E) = F(E), \tag{7}$$

intendendo che essa equivalga a

$$\lim_{n \to \infty} \| F(E) - F_n(E) \| = 0. \tag{8}$$

È chiaro che il limite di una successione di funzioni dello spazio funzionale che consideriamo è ancora una funzione del medesimo spazio, sicchè questo è uno spazio lineare-metrico completo. Lo indicheremo con $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$.

Consideriamo poi ancora quel sottospazio di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, che si ottiene, prendendo tutte le funzioni $u(P)$, continue insieme con le derivate parziali dei primi due ordini su S, e, per ognuna di queste, la funzione $F(E)$ che ha per densità $\mathfrak{L}u$. Tale sottospazio verrà indicato con Σ^*.

Indicheremo infine con $\bar{\Sigma}^*$ il sottospazio formato da tutte le funzioni di Σ^* e da tutte le funzioni limiti, nel senso adesso specificato, di funzioni appartenenti a Σ^*.

Fissata una funzione $f(P)$ di p-ma potenza sommabile su S, prendiamo in esame il funzionale lineare definito in $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$ da

$$\iint_S f dF = \iint_{S(\Gamma)} f(P) \delta(P) dP, \tag{9}$$

dove $\delta(P)$ indica al solito la densità di $F(E)$. Esso evidentemente non dipende dalla rappresentazione Γ adottata per S, giacchè, passando dalla rappresentazione Γ a un'altra Γ', si viene semplicemente ad operare una sostituzione di variabili nell'integrale al secondo membro.

Ciò posto, enunciamo il teorema fondamentale relativo alle equazioni di tipo ellittico, che ci proponiamo di provare in quanto segue:

Se il funzionale lineare (9) *definito in* $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, *è zero per tutte le* $F(E)$ *di* $\bar{\Sigma}^*$, *la* $f(P)$ *potrà differire soltanto al più nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione* v *dell'equazione* $\mathfrak{M}v = 0$.

A tale risultato giungeremo dimostrando, anzitutto, che, nell'ipotesi del teorema, la $f(P)$ deve verificare una certa proprietà integrale analoga a quella della media di GAUSS per le funzioni armoniche. Successivamente proveremo che tale proprietà integrale, prescindendo dagl'insiemi di misura nulla, è caratteristica per le soluzioni di $\mathfrak{M}v=0$.

Dalla proposizione ora enunciata, in base a noti teoremi di analisi funzionale lineare, discende immediatamente che, se l'equazione $\mathfrak{M}v=0$ è priva di soluzioni diverse dallo zero, lo spazio Σ^* è completo in $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, cioè $\overline{\Sigma}^*$ coincide con $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$. Nel caso contrario, $\overline{\Sigma}^*$ si compone di tutte le funzioni F di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$ che riescono ortogonali alle soluzioni non nulle v di $\mathfrak{M}v=0$, che verificano, cioè, la $\iint_S v dF=0$.

Vedremo fra breve (n.° 7), come da ciò si deduce agevolmente il teorema dell'alternativa per l'equazione (1).

4. - Dimostrazione di una proprietà integrale.

Da ora in poi, supporremo sempre che la (1) sia di tipo ellittico, che sia cioè $ac-b^2>0$, e inoltre a, c sempre positivi, per una opportuna scelta della rappresentazione regolare Γ.

Fissata Γ in tal modo e detto P_0 un punto di S, sia x_0, y_0 il punto di A corrispondente a P_0 in una Γ_k relativa a Γ; detti a_0, b_0, c_0, i corrispondenti valori di a, b, c, poniamo

$$c_0(x-x_0)^2-2b_0(x-x_0)(y-y_0)+a_0(y-y_0)^2=\varrho^2. \tag{10}$$

Sia poi r un valore positivo abbastanza piccolo, affinchè l'ellisse di centro x_0, y_0, rappresentata dall'equazione (10) per $\varrho=r$, sia contenuta in A.

Ciò posto, detto ν un intero positivo arbitrario, definiamo entro la detta ellisse la funzione $u^{(\nu)}(x, y)$, data da

$$u^{(\nu)}(x, y)=g_\nu(\varrho^2)=\frac{1}{4\pi}\int_{\varrho^2}^{r^2}\left[\left(\frac{2t}{r^2}-1\right)^{2\nu}-1\right]\frac{dt}{t}. \tag{11}$$

Estendiamo, poi, la definizione della funzione $u^{(\nu)}$ all'intera superficie S, ponendola zero in tutti i rimanenti punti di S. Con ciò si otterrà evidentemente una funzione $u^{(\nu)}(P)$ continua con le derivate parziali prime e seconde su S, giacchè, come subito si riconosce, g_ν si annulla con le sue prime due derivate, per $\varrho^2=r^2$.

Supponiamo adesso che $f(P)$ sia una funzione di p-ma potenza sommabile su S, tale che il funzionale lineare (9) sia sempre zero, per tutte le $F(E)$ di Σ^*. In particolare dovrà essere allora

$$\iint_{S(\Gamma)} f(P)\mathfrak{L}_\Gamma u^{(\nu)}(P)dP=\iint_{E_0} f(x, y)\mathfrak{L}_\Gamma u^{(\nu)}(x, y)dxdy=0, \tag{12}$$

ove si ind' .i con E_0 l'ellisse $0\leqq\varrho\leqq r$.

Vogliamo ora passare al limite per $\nu \to \infty$ nella (12). Osserviamo anzitutto che

$$\mathfrak{L}_\Gamma u^{(\nu)} = 4\left(a \begin{vmatrix} b_0 & x-x_0 \\ c_0 & y-y_0 \end{vmatrix}^2 - 2b \begin{vmatrix} b_0 & x-x_0 \\ c_0 & y-y_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & x-x_0 \\ b_0 & y-y_0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_0 & x-x_0 \\ b_0 & y-y_0 \end{vmatrix}^2\right) g_\nu''(\varrho^2) +$$
$$+ 2(ac_0 - 2bb_0 + ca_0) g_\nu'(\varrho^2) +$$
$$+ 2\left(-l \begin{vmatrix} b_0 & x-x_0 \\ c_0 & y-y_0 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_0 & x-x_0 \\ b_0 & y-y_0 \end{vmatrix}\right) g_\nu'(\varrho^2) + q g_\nu(\varrho^2),$$

laddove

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} g_\nu'(\varrho^2) = \dfrac{-1}{4\pi\varrho^2}\left[\left(\dfrac{2\varrho^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu} - 1\right], \\ g_\nu''(\varrho^2) = \dfrac{1}{4\pi\varrho^4}\left[\left(\dfrac{2\varrho^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu} - 1\right] - \dfrac{\nu}{\pi r^2 \varrho^2}\left(\dfrac{2\varrho^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu - 1}. \end{cases}$$

Operiamo adesso la sostituzione di variabili

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \varrho(\lambda \cos\omega \cos\varphi + \mu \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varphi), \\ y = y_0 + \varrho(\lambda \operatorname{sen}\omega \cos\varphi - \mu \cos\omega \operatorname{sen}\varphi), \end{cases} \qquad 0 \leqq \varrho \leqq r, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

indicando λ, μ, ω rispettivamente le lunghezze divise per ϱ degli assi maggiore e minore dell'ellissi (10) e l'angolo formato dall'asse maggiore — opportunamente orientato — con l'asse x; sicchè λ, μ, ω riusciranno dipendenti in maniera continua da x_0, y_0 e saranno legati dalle relazioni

$$\text{(15)} \qquad \frac{\cos^2\omega}{\lambda^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\mu^2} = c_0, \qquad \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)\cos\omega \operatorname{sen}\omega = -b_0, \qquad \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\lambda^2} + \frac{\cos^2\omega}{\mu^2} = a_0.$$

Tenendo presente che da (14) e (15) risulta

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \varphi)} = -\varrho\lambda\mu = \frac{-\varrho}{\sqrt{a_0 c_0 - b_0^2}},$$

e ponendo, per brevità di scrittura,

$$\text{(16)} \qquad \sigma = \frac{\cos\omega \cos\varphi}{\lambda} + \frac{\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varphi}{\mu}, \qquad \tau = \frac{\operatorname{sen}\omega \cos\varphi}{\lambda} - \frac{\cos\omega \operatorname{sen}\varphi}{\mu},$$

si trova così

$$\text{(17)} \qquad \iint_{E_0} f \cdot \mathfrak{L}_\Gamma u^{(\nu)} dx dy = -1/\sqrt{a_0 c_0 - b_0^2} \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} f \cdot [4(a\sigma^2 + 2b\sigma\tau + c\tau^2)\varrho^2 g_\nu''(\varrho^2) +$$
$$+ 2(ac_0 - 2bb_0 + ca_0)\varrho g_\nu'(\varrho^2) + 2(l\sigma + m\tau)\varrho^2 g_\nu'(\varrho^2) + q\varrho g_\nu(\varrho^2)]\varrho d\varrho d\varphi.$$

Poniamo ancora, per abbreviare,

$$\text{(18)} \qquad H = a\sigma^2 + 2b\sigma\tau + c\tau^2,$$

e osserviamo che, quando $\varrho = 0$, H si riduce ad $a_0 c_0 - b_0^2$, come si vede dalle (15); onde, supponendo — come sempre faremo in seguito — l'esistenza di derivate parziali continue pei coefficienti a, b, c, la differenza $\frac{2H-(ac_0-2bb_0+ca_0)}{\varrho}$ si manterrà limitata anche quando $\varrho\to 0$.

In base a ciò e tenendo presenti le (13), da (17) si ricava

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint_{E_0} f\cdot \mathfrak{L}_r u^{(\nu)}dxdy= \tag{19}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{a_0c_0-b_0^2}}\int_0^r\int_0^{2\pi} f\cdot\left[\frac{2H-(ac_0-2bb_0+ca_0)}{\varrho}-(l\sigma+m\tau)+q\varrho\log\frac{r}{\varrho}\right]d\varrho d\varphi+$$

$$+\frac{4}{\pi r^2\sqrt{a_0c_0-b_0^2}}\lim_{\nu\to\infty}\nu\int_0^r\int_0^{2\pi} fH\cdot\left(\frac{2\varrho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu-1}\varrho d\varrho d\varphi,$$

purchè esista il limite al secondo membro. Ora noi proveremo che questo limite esiste, fatta eccezione al più per i punti x_0, y_0 di un insieme di misura nulla su A e per i valori di r di un insieme di misura nulla su un intervallo $0\leqq r\leqq r_0$, con r_0 opportunamente limitato.

A tale scopo, ricorriamo al seguente artificio. Poniamo

$$\alpha(\varrho;\,x_0,\,y_0)=\int_0^\varrho\int_0^{2\pi} fH\varrho d\varrho d\varphi,\qquad \beta(\varrho;\,x_0,\,y_0)=\int_\varrho^r\int_0^{2\pi} fH\varrho d\varrho d\varphi; \tag{20}$$

l'espressione sotto al segno di limite al secondo membro di (19) si può scrivere allora

$$\nu\int_0^{r/\sqrt{2}}\left(\frac{2\varrho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu-1}\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho}d\varrho-\nu\int_{r/\sqrt{2}}^{r}\left(\frac{2\varrho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu-1}\frac{\partial\beta}{\partial\varrho}d\varrho,$$

oppure anche, integrando per parti,

$$-\nu\int_0^{r/\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{2\varrho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu-1}\varrho^2 d\varrho+\nu\int_{r/\sqrt{2}}^{r}\frac{\beta}{r^2-\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{2\varrho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu-1}(r^2-\varrho^2)d\varrho. \tag{21}$$

Ora $\frac{\alpha}{\varrho^2}$ tende a $\pi(a_0c_0-b_0^2)f(x_0,\,y_0)$, quando $\varrho\to 0$, tranne al più pei punti x_0, y_0 di un insieme di misura nulla; $\frac{\beta}{r^2-\varrho^2}$ tende a

$$\frac{1}{2r}\left[\int_0^{2\pi} fH\varrho d\varphi\right]_{\varrho=r},$$

quando $\varrho\to r$, tranne al più pei valori di r di un insieme di misura nulla. E d'altra parte, quando esistono i limiti di $\frac{\alpha}{\varrho^2}$ e di $\frac{\beta}{r^2-\varrho^2}$ per $\varrho\to 0$ e $\varrho\to r$ rispettivamente, essendo

$$\int_0^{r/\sqrt{2}}\nu\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{2\varrho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu-1}\cdot\varrho^2 d\varrho=\int_{r/\sqrt{2}}^{r}\nu\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{2\varrho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu-1}\cdot(r^2-\varrho^2)d\varrho=\frac{r^2}{4},$$

mentre in questi integrali le funzioni integrande, per un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, tendono uniformemente a zero negl'intervalli $\varepsilon \leq \varrho \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$, $\frac{r}{\sqrt{2}} \leq \varrho \leq r - \varepsilon$, è facile riconoscere che il limite di (21), per $\nu \to \infty$, esiste ed è dato da

$$-\frac{r^2}{4} \lim_{\varrho \to 0} \frac{\alpha}{\varrho^2} + \frac{r^2}{4} \lim_{\varrho \to r} \frac{\beta}{r^2 - \varrho^2} = \frac{-\pi r^2}{4} f(x_0, y_0)(a_0 c_0 - b_0^2) + \frac{r^2}{8} \int_0^{2\pi} [fH]_{\varrho = r} d\varphi.$$

Resta con ciò dimostrato quanto avevamo affermato. E risulta inoltre che, *dall'annullarsi del limite* (19), *qualunque siano* r *nell'intervallo* $0 \leqq r \leqq r_0$ *e* x_0, y_0 *in* A, *si deduce che* f *verifica quasi ovunque in* A *la proprietà integrale*

$$(22) \qquad f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi(a_0 c_0 - b_0^2)} \left\{ \int_0^r \int_0^{2\pi} f \cdot \left[\frac{2H - (a c_0 - 2 b b_0 + c a_0)}{\varrho} - (l\sigma + m\tau) + q\varrho \log \frac{r}{\varrho} \right] d\varrho d\varphi + \int_0^{2\pi} [fH]_{\varrho = r} d\varphi \right\},$$

per r *quasi ovunque nell'intervallo* $0 \leq r \leq r_0$.

Nel caso particolare che l'espressione a derivate parziali $\mathfrak{L}u$ si riduca a $\Delta_2 u$, le (15) si potranno verificare ponendo $\omega = 0$, $\lambda = \mu = 1$, le (14) diventano le equazioni parametriche di una circonferenza e la (22) si muta nella formola che esprime il teorema della media di GAUSS per le funzioni armoniche.

5. - Proprietà di media per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine di tipo ellittico.

Definita l'aggiunta dell'espressione $\mathfrak{L}u$ mediante la (5), consideriamo una funzione $v(x, y)$, con derivate parziali prime e seconde continue su S, soluzione della $\mathfrak{M}v = g$, e applichiamo la nota formola di reciprocità

$$(23) \qquad \iint_D (v \mathfrak{L}_\Gamma u - u \mathfrak{M}_\Gamma v) dx dy = \int_{FD} [- \{ b(vu_x - uv_x) + c(vu_y - uv_y) + (m - b_x - c_y) uv \} dx + \{ a(vu_x - uv_x) + b(vu_y - uv_y) + (l - a_x - b_y) uv \} dy],$$

supponendo che D sia la corona ellittica definita da $\varepsilon \leqq \varrho \leqq r$, dove ϱ è, come prima, la quantità (10). Poniamo poi $u = \log \frac{r}{\varrho}$ e passiamo infine al limite per $\varepsilon \to 0$. Si perviene in tal maniera (dando ad H il significato che aveva nel numero precedente ed eseguendo la sostituzione di variabili (14)) alla formola seguente:

$$(24) \qquad v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi(a_0 c_0 - b_0^2)} \left[\int_0^r \int_0^{2\pi} \left(v\mathfrak{L} \log \frac{r}{\varrho} - g \log \frac{r}{\varrho} \right) \varrho d\varrho d\varphi + \int_0^{2\pi} [Hv]_{\varrho = r} d\varphi \right],$$

la quale, come subito si riconosce, per $g=0$, non è altro che la (22) con v al posto di f. Per questa ragione, e per quanto abbiamo osservato in fine del numero precedente, chiameremo la (24) la *proprietà di media per le soluzioni dell'equazione* $\mathfrak{M}v=g$.

Supponiamo inversamente che la funzione v, con derivate parziali prime e seconde continue su S, verifichi la proprietà di media (24), per tutti i valori di r sufficientemente prossimi a zero. Ne segue, derivando rispetto a r e tenendo presente l'espressione esplicita di $\mathfrak{L} \log\frac{r}{\varrho}$ data nella formola (22),

$$\int_0^{2\pi}\left[v\left\{\frac{2H-(ac_0-2bb_0+ca_0)}{r}-(l\sigma+m\tau)\right\}\right]_{\varrho=r}d\varphi+$$
$$+\frac{1}{r}\int_0^r\int_0^{2\pi}(qv-g)\varrho d\varrho d\varphi+\int_0^{2\pi}[(Hv)_\varrho]_{\varrho=r}d\varphi=0.$$

Dividiamo per r questa relazione, indi facciamo tendere r a 0; applicando la regola di de l'Hospital e ricordando le (14), in base alle quali sono da calcolarsi le derivate rispetto a ϱ; otteniamo così

$$\int_0^{2\pi}\Big[2(Hv)_{\varrho\varrho}-\frac{1}{2}\left\{(av)_{\varrho\varrho}c_0-2(bv)_{\varrho\varrho}b_0+(cv)_{\varrho\varrho}a_0\right\}+$$
$$-\left\{(lv)_\varrho\sigma+(mv)_\varrho\tau\right\}+\frac{1}{2}(qv-g)\Big]_{\varrho=0}d\varphi=0.$$

Ma il primo membro di questa relazione, come subito si vede, badando alle (15), (16) e (18), non è altro che $\pi\cdot(\mathfrak{M}v-g)$ nel punto x_0, y_0.

Se ne conclude allora che l'indicata proprietà di media è caratteristica per le soluzioni dell'equazione $\mathfrak{M}v=g$.

Ci tornerà utile, per quanto segue, sostituire alla (24) una formola dove figurino soltanto integrali doppi. A ciò, moltiplichiamo per r primo e secondo membro di (24), integrando poi rispetto a r fra 0 e r, dividendo infine per $\frac{r^2}{2}$; otteniamo così

$$v(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi(a_0c_0-b_0^2)}\left[\int_0^r\int_0^{2\pi}\left\{\mathfrak{L}\left(\log\frac{r}{\varrho}-\frac{r^2-\varrho^2}{2r^2}\right)+H\right\}v\varrho d\varrho d\varphi+\right.$$
$$\left.-\int_0^r\int_0^{2\pi}\left(\log\frac{r}{\varrho}-\frac{r^2-\varrho^2}{2r^2}\right)g\varrho d\varrho d\varphi\right], \tag{25}$$

che si può scrivere anche, indicando rispettivamente con P_0 e Q i punti x_0, y_0 e x, y,

$$v(P_0)=\iint_{E_0}K(P_0,Q)v(Q)dQ+\iint_{E_0}G(P_0,Q)g(Q)dQ, \tag{26}$$

dove

$$K(P_0, Q) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a_0c_0 - b_0^2}} \left[\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2}\right)(ac_0 - 2bb_0 + ca_0) + \right. \tag{27}$$
$$- \frac{2}{\varrho^4}\left(a \begin{vmatrix} b_0 & x-x_0 \\ c_0 & y-y_0 \end{vmatrix}^2 - 2b \begin{vmatrix} b_0 & x-x_0 \\ c_0 & y-y_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & x-x_0 \\ b_0 & y-y_0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_0 & x-x_0 \\ b_0 & y-y_0 \end{vmatrix}^2 \right) +$$
$$\left. + 2\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2}\right)\left(-l \begin{vmatrix} b_0 & x-x_0 \\ c_0 & y-y_0 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_0 & x-x_0 \\ b_0 & y-y_0 \end{vmatrix} \right) + q\left(\frac{r^2 - \varrho^2}{2r^2} - \log\frac{r}{\varrho} \right) \right],$$
$$G(P_0, Q) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a_0c_0 - b_0^2}} \left(\log\frac{r}{\varrho} - \frac{r^2 - \varrho^2}{2r^2} \right),$$

essendo sempre ϱ^2 definita dalla (10).

6. - Caratterizzazione delle soluzioni in base alla proprietà di media.

Faremo da ora in poi l'ipotesi (alquanto sovrabbondante per i risultati cui intendiamo pervenire, ma assai utile al fine di una maggiore rapidità di esposizione) che i coefficienti di $\mathcal{L}u$ e quelli di $\mathcal{M}v$, nonchè i secondi membri delle equazioni non omogenee $\mathcal{L}u = f$, $\mathcal{M}v = g$, siano dotati di derivate parziali dei primi due ordini continue in A.

Ciò posto, vogliamo supporre che $v(x, y)$ sia una funzione di p-ma potenza sommabile su S e che essa verifichi quasi ovunque la (24), per r quasi ovunque in un intervallo $0 \leqq r \leqq r_0$ con r_0 sufficientemente prossimo a zero, o, ciò che è lo stesso, la (25), per tutti gli r dell'intervallo medesimo. E vogliamo far vedere che $v(x, y)$ coinciderà, tranne al più nei punti di un insieme di misura nulla, con una funzione dotata di derivate parziali prime e seconde continue, onde segue, per quanto abbiamo detto nel numero precedente, che $v(x, y)$, a prescindere dagli insiemi di misura nulla, è una soluzione di $\mathcal{M}v = g$.

Notiamo anzitutto che, per l'ipotesi fatta in principio, la funzione $K(P_0, Q)$, definita da (27) per $P_0 \neq Q$, (e, del pari, l'altra funzione $\overline{K}(P_0, Q)$, che incontreremo più innanzi, definita allo stesso modo come $K(P_0, Q)$, coi coefficienti dell'espressione aggiunta $\mathcal{M}v$ al posto di quelli di $\mathcal{L}u$), sarà dotata in A di derivate parziali prime e seconde continue rispetto alle coordinate di P_0, come rispetto a quelle di Q. Di più, indicando coi simboli D, D^2 delle derivazioni rispettivamente del primo e del secondo ordine (secondo una qualsiasi direzione, o coppia di direzioni) rispetto al punto P_0, sussisteranno delle limitazioni del tipo

$$\begin{aligned} &|K(P_0, P_1)| < N \cdot \overline{P_0P_1}^{-1}, \\ &|DK(P_0, P_1)| < N \cdot \overline{P_0P_1}^{-2}, \\ &|D^2K(P_0, P_1)| < N \cdot \overline{P_0P_1}^{-3}, \end{aligned} \tag{28}$$

essendo N una costante abbastanza grande e P_0, P_1 contenuti in un dominio $\mathcal{T} < A$.

Osserviamo ancora che il secondo integrale al secondo membro di (25) sarà una funzione dotata di derivate parziali prime e seconde continue, ciò che, nelle ipotesi di continuità e derivabilità fatte in principio di questo numero, si riconosce immediatamente derivando sotto al segno d'integrale rispetto alle x_0, y_0, dalle quali — per il tramite delle x, y definite dalle (14) — dipende la g, laddove, com'è subito visto, per la definizione delle λ, μ, ω, dalla continuità delle derivate prime e seconde dei coefficienti a, b, c discende quella delle derivate prime e seconde delle x, y rispetto alle x_0, y_0.

Ne segue pure che, se una funzione z e l'espressione $\mathfrak{M}z$ sono dotate di derivate parziali dei primi due ordini continue, lo stesso avverrà per l'integrale

$$\iint_{E_0} K(P_0, Q) z(Q) dQ, \tag{29}$$

come risulta dalla (26), dove si sostituisca z a v ed $\mathfrak{M}z$ a g.

Premesso questo, *la prima conseguenza che possiamo trarre dalla* (25) *è che v sarà limitata*; ciò discende, in base a una nota disuguaglianza, dal fatto che K verifica la prima delle (28) e che v è di p-ma potenza sommabile con $p > 2$. Supporremo pertanto la costante N scelta in modo che il $|v|$ resti inferiore ad essa in tutto il dominio $\mathfrak{F}$, nel quale sia sempre contenuta l'ellissi E_0 relativa ad un valore di r costante, al variare di x_0, y_0 nell'intorno di un punto arbitrariamente prefissato.

Scomponiamo ora il primo integrale al secondo membro di (26) nella differenza

$$\iint_{\mathfrak{F}} K(P_0, Q) v(Q) dQ - \iint_{\mathfrak{F}-E_0} K(P_0, Q) v(Q) dQ. \tag{30}$$

È chiaro che il secondo di questi due integrali varia con continuità al variare di P_0; presi infatti due punti P_0, P_1 abbastanza prossimi fra loro, riesce

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathfrak{F}-E_1} K(P_1, Q) v(Q) dQ - \iint_{\mathfrak{F}-E_0} K(P_0, Q) v(Q) dQ = \\ &\quad = \iint_{\mathfrak{F}-E_1} [K(P_1, Q) - K(P_0, Q)] v(Q) dQ + \left(\iint_{\mathfrak{F}-E_1} - \iint_{\mathfrak{F}-E_0} \right) K(P_0, Q) v(Q) dQ, \end{aligned} \tag{31}$$

laddove al secondo membro la funzione integranda del primo integrale tende uniformemente a zero con $\overline{P_0 P_1}$, mentre nell'altro integrale tende a zero la misura del campo d'integrazione, restando limitata la funzione integranda.

Quanto al primo integrale in (30), detti $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1'$ i cerchi di centri P_0, P_1 e raggi $2\overline{P_0 P_1}$, $3\overline{P_0 P_1}$ rispettivamente, è evidente che

$$\begin{aligned} &\left| \iint_{\mathfrak{F}} [K(P_1, Q) - K(P_0, Q)] v(Q) dQ \right| < \\ &\quad < \iint_{\mathfrak{F}-\mathfrak{C}_0} |K(P_1, Q) - K(P_0, Q)| \cdot |v(Q)| dQ + \\ &\quad + \iint_{\mathfrak{C}_1'} |K(P_1, Q)| \cdot |v(Q)| dQ + \iint_{\mathfrak{C}_0} |K(P_0, Q)| \cdot |v(Q)| dQ, \end{aligned} \tag{32}$$

dove, al secondo membro, il primo integrale tende a zero per $P_1 \to P_0$, perchè la funzione integranda tende uniformemente a zero, mentre gli ultimi due integrali, per la prima delle (28) ed essendo $|v| < N$, sono maggiorati rispettivamente da $2\pi \cdot 3\overline{P_0 P_1}$, e $2\pi \cdot 2\overline{P_0 P_1}$. Sicchè il primo integrale in (30) varia pure con continuità al variare di P_0. *Onde si conclude intanto che $v(P)$ è una funzione continua.*

Dalla continuità di $v(P)$ discende poi che il secondo integrale in (30) ammette derivate prime continue rispetto a P_0; infatti la (31), divisa per $\overline{P_0 P_1}$, presenta il rapporto incrementale decomposto nella somma di due termini, dei quali il primo, per $P_1 \to P_0$ secondo una direzione arbitrariamente prefissata, converge al limite $\iint\limits_{\mathfrak{T}-E_0} DK(P_0, Q)v(Q)dQ$, mentre il secondo tende a un integrale di linea con funzione integranda continua.

D'altra parte, dalla (32), indicando con P un punto del segmento $P_0 P_1$, ricordando la seconda delle (28) e osservando che, per Q esterno a $\mathfrak{C}_0$, riesce $2\overline{PQ} > \overline{P_0 Q}$, si deduce che

$$(33) \quad \left| \iint\limits_{\mathfrak{T}} [K(P_1, Q) - K(P_0, Q)]v(Q)dQ \right| < \iint\limits_{\mathfrak{T}-\mathfrak{C}_0} \overline{P_0 P_1} \cdot \frac{N^2}{\overline{PQ}^2} dQ + 2\pi N^2 \cdot 5\overline{P_0 P_1} <$$

$$< N^2 \cdot \overline{P_0 P_1} \left(\iint\limits_{\mathfrak{T}-\mathfrak{C}_0} \frac{4dQ}{\overline{P_0 Q}^2} + 10\pi \right) < (h \log \overline{P_0 P_1} + h') \cdot \overline{P_0 P_1},$$

per due costanti h, h' opportunamente scelte, onde in particolare il primo integrale in (30) è una funzione di P_0 che verifica una condizione di HÖLDER con esponente < 1 arbitrario.

È facile riconoscere allora che $v(P)$ è dotata di derivate parziali prime e che queste sono fornite dalla formula

$$(34) \quad Dv(P_0) = \iint\limits_{\mathfrak{T}} DK(P_0, Q) \cdot [v(Q) - v(P_0)]dQ + v(P_0) \cdot D \iint\limits_{\mathfrak{T}} K(P_0, Q)dQ +$$

$$+ D \iint\limits_{\mathfrak{T}-E_0} K(P_0, Q)v(Q)dQ + D \iint\limits_{E_0} G(P_0, Q)g(Q)dQ,$$

alla quale si perviene, mediante passaggio al limite, dalla formola stessa scritta coi rapporti incrementali in luogo delle derivate, tenendo presente che $v(P)$, per quanto abbiamo provato, verificherà una disuguaglianza del tipo

$$(35) \quad |v(P_1) - v(P_0)| < (h \log \overline{P_0 P_1} + h') \cdot \overline{P_0 P_1}$$

(e quindi in particolare una condizione di HÖLDER con esponente arbitrario minore di 1), e ricordando che l'integrale (29), quando $z \equiv 1$, ammette, per quanto abbiamo osservato, derivate continue.

Da (34) e (35) e dalla seconda delle (28) risulta inoltre, per la già ricordata disuguaglianza, che *le derivate prime di* v *sono limitate.*

Giunti a questo punto, si può osservare che dalla (26), scritta nella forma (25), si deducono formole analoghe per le derivate parziali prime della v, derivando la (25) rispetto a x_0 ed y_0, laddove è lecito derivare anche sotto il segno d'integrale, tenendo presente che la v è ivi funzione delle x_0, y_0, composta mediante le $x(x_0, y_0)$ e $y(x_0, y_0)$ definite dalle (14).

E poichè le x, y hanno derivate dei primi due ordini continue rispetto alle x_0, y_0, si potrà ripetere lo stesso ragionamento ora esposto, a proposito del primo integrale in (26), ai nuovi integrali dello stesso tipo, contenenti le derivate parziali di v, che vengono a presentarsi nel derivare sotto al segno d'integrale in (25). *Da tale ragionamento si ricava dunque che esistono anche le derivate parziali seconde della* v *e che esse sono limitate.*

Infine, dalle formole per le derivate seconde di v, che si ottengono derivando due volte nelle (25), si deduce che le derivate medesime sono continue, ragionando allo stesso modo come abbiamo fatto più sopra, per riconoscere la continuità di $v(P)$.

A dimostrare che $v(P)$ ammette derivate seconde limitate si può giungere anche per un'altra via, analoga a quella seguita più sopra per le derivate prime. Si prova anzitutto che la $v(P)$ verifica una condizione del tipo

$$
\begin{aligned}
(36) \qquad & |v(P_1) - v(P_0) - \overline{P_0P_1} \cdot D_{P_0P_1} v(P_0)| < \\
& \qquad < [h(\log \overline{P_0P_1})^2 + h' \log \overline{P_0P_1} + h''] \cdot \overline{P_0P_1}^2,
\end{aligned}
$$

dove $D_{P_1P_0}$ indica una derivazione rispetto a P_0 secondo la direzione P_0P_1; indi si riconosce, mediante un passaggio al limite, che vale la formola

$$
\begin{aligned}
(37) \qquad D^2 v(P_0) = & \iint_{\mathfrak{S}} D^2 K(P_0, Q) \cdot [v(Q) - v(P_0) - \overline{P_0Q} \cdot D_{P_0Q} v(P_0)] dQ + \\
& + v(P_0) \cdot D^2 \iint_{\mathfrak{S}} K(P_0, Q) dQ + \Big[D^2 \iint_{\mathfrak{S}} K(P_0, Q) \cdot D_{PQ} v(P) \cdot \overline{PQ} dQ \Big]_{P=P_0} + \\
& - D^2 \iint_{\mathfrak{S} - E_0} K(P_0, Q) v(Q) dQ + D^2 \iint_{E_0} G(P_0, Q) g(Q) dQ,
\end{aligned}
$$

dove, al secondo membro, il primo termine ha senso per la terza delle (28) e per (36), il secondo e il terzo hanno senso perchè l'integrale (23), quando per z si ponga una costante o una funzione lineare, riesce una funzione di P_0 dotata di derivate parziali prime e seconde continue, come già si è detto.

Raccogliendo il risultato di questo numero con quello del numero precedente, possiamo enunciare il teorema:

Supposto che i coefficienti di $\mathfrak{L}u$, *quelli di* $\mathfrak{M}v$ *e la densità* g *siano* *dotati di derivate parziali prime e seconde continue, ogni funzione* $v(P)$, *supposta soltanto di p-ma potenza sommabile* ($p>2$), *che verifichi la proprietà di media* (24) *per tutti gli r sufficientemente prossimi a zero, sarà pure dotata di derivate parziali prime e seconde continue e verificherà l'equazione* $\mathfrak{M}v=g$.

Da questo teorema, in base al risultato del n.° 4, discende immediatamente che sussiste il teorema enunciato nel n.° 3.

7. - Il teorema dell'alternativa.

Da quanto precede possiamo dedurre senza difficoltà il teorema dell'alternativa nella forma seguente:

Se l'equazione aggiunta omogenea $\mathfrak{M}v=0$ *non ammette soluzioni diverse dallo zero su* S, *l'equazione data* $\mathfrak{L}u=f$ *ammette soluzione, qualunque sia la densità* f, *con derivate parziali dei primi due ordini continue; se la* $\mathfrak{M}v=0$ *ammette soluzioni diverse dallo zero, fra queste ve ne sarà soltanto un numero finito di linearmente indipendenti* $v_1, v_2, \ldots, v_s$, *e l'equazione* $\mathfrak{L}u=f$ *ammetterà soluzione quando, e solo quando,* f *è ortogonale a* $v_1, v_2, \ldots, v_s$ *su* S (7).

Cominciamo a esaminare la prima alternativa: supponiamo, cioè, che l'equazione $\mathfrak{M}v=0$ non abbia su S altra soluzione che lo zero.

Il teorema del n.° 3, come abbiamo ivi esplicitamente osservato, ci assicura allora che $\overline{\Sigma}^*$ coincide con $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$.

Pertanto qualunque sia la funzione F di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, si può sempre trovare una successione di funzioni F_k di Σ^*, che ha per limite (nel senso specificato al n.° 3) la F. Diciamo f la densità di F e δ_k quella di F_k. Ad ogni F_k, per la definizione stessa di Σ^*, corrisponde una funzione u_k dotata di derivate parziali prime e seconde continue, per cui $\mathfrak{L}u_k=\delta_k$.

Vogliamo ora provare che, nell'ipotesi del teorema su f, dalla successione delle u_k si può sempre estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente verso una soluzione u di $\mathfrak{L}u=f$, supponendo, in primo luogo, che le u_k siano equilimitate su S. A ciò, applichiamo la (26), scambiando $\mathfrak{L}$ con $\mathfrak{M}$ e ponendo u_k in luogo di v; abbiamo così la formola

$$u_k(P_0)=\iint_{E_0} \overline{K}(P_0, Q)u_k(Q)dQ+\iint_{E_0} G(P_0, Q)\delta_k(Q)dQ, \tag{38}$$

dove $\overline{K}$ si ottiene da (27), sostituendovi ai coefficienti di $\mathfrak{L}u$ quelli rispettivi di $\mathfrak{M}v$.

(7) Si noti che f è quì una densità (n.° 1 fine) e la condizione di ortogonalità su S fra una funzione e una densità è indipendente dalla rappresentazione Γ, a differenza della condizione di ortogonalità fra due funzioni, come la (43), che s'introduce in seguito per artificio di dimostrazione.

Poichè, d'altra parte, sussiste la relazione di limite

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{S(\Gamma)} [f(P)-\delta_k(P)]^{\frac{p}{p-1}} dP = 0,$$

è chiaro che il secondo termine al secondo membro di (38) converge uniformemente, per $k \to \infty$, verso l' $\iint G(P_0, Q) f(Q) dQ$.

Quanto al primo termine, se, per N abbastanza grande, riesce $|u_k| < N$ qualunque sia k, possiamo applicare ad esso le deduzioni del numero precedente, scomponendolo nella differenza

$$\iint_{\mathfrak{S}} \bar{K}(P_0, Q) u_k(Q) dQ - \iint_{\mathfrak{S}-E_0} \bar{K}(P_0, Q) u_k(Q) dQ,$$

analogamente a quanto abbiamo fatto con la (30); dall'eguaglianza corrispondente alla (31) riconosciamo allora che è, uniformemente al variare di k,

$$\lim_{\overline{P_0P_1}\to 0} \left[\iint_{\mathfrak{S}-E_1} \bar{K}(P_1, Q) u_k(Q) dQ - \iint_{\mathfrak{S}-E_0} \bar{K}(P_0, Q) u_k(Q) dQ\right] = 0,$$

mentre dalle disuguaglianze analoghe alle (32), (33) si vede che sussiste una condizione del tipo

$$\left|\iint_{\mathfrak{S}} [\bar{K}(P_1, Q) - \bar{K}(P_0, Q)] u_k(Q) dQ\right| < (h \log \overline{P_0P_1} + h') \cdot \overline{P_0P_1},$$

con le costanti h, h' indipendenti da k.

Da tutto ciò risulta che le u_k sono uniformemente continue, e quindi, come avevamo affermato, dalla successione delle u_k si può estrarre una successione uniformemente convergente. È chiaro allora che la funzione limite $u(P)$ verificherà l'equazione

$$u(P_0) = \iint_{E_0} K(P_0, Q) u(Q) dQ + \iint_{E_0} G(P_0, Q) f(Q) dQ, \tag{40}$$

limite della (38).

Ne segue, per il teorema del numero precedente applicato all'equazione $\mathfrak{L}u = f$, che la $u(P)$ è dotata di derivate parziali prime e seconde continue e verifica codesta equazione.

Supponiamo ora invece che le u_k non siano equilimitate. Detto allora M_k il massimo di $|u_k|$ su S, sostituendo, ove occorra, alla successione delle u_k una sua sottosuccessione, si può supporre che sia

$$\lim_{k\to\infty} M_k = \infty.$$

Le funzioni $\frac{u_k(x, y)}{M_k}$ hanno tutte per massimo modulo su S l'unità; esse sono quindi equilimitate, e pertanto potremo applicare il ragionamento precedente all'equazione che si ottiene da (38) dividendone tutti i termini per M_k. Ne segue che dalla successione delle $\frac{u_k}{M_k}$ si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente; diciamo $\overline{u}$ la relativa funzione limite: essa verificherà l'equazione che si ottiene passando al limite per $k \to \infty$ nella (38), dopo averne diviso per M_k primo e secondo membro, cioè l'equazione

$$\overline{u}(P_0) = \iint_{E_0} \overline{K}(P_0, Q)\overline{u}(Q)dQ. \tag{41}$$

Ciò prova, per il teorema del numero precedente, che $\overline{u}(P)$ è una soluzione dell'equazione $\mathfrak{L}\overline{u}=0$; nè la $\overline{u}(P)$ può essere identicamente zero, giacchè, per il modo come è stata definita, il massimo del suo modulo su S dev'essere l'unità.

Dunque, il caso che le u_k non siano equilimitate si può presentare soltanto se esistono soluzioni non identicamente nulle dell'equazione omogenea $\mathfrak{L}\overline{u}=0$.

Proviamo ora che fra tali soluzioni ve ne potrà essere soltanto un numero finito di lineamente indipendenti. Se infatti ve ne fossero infinite, potremmo costruire una successione $\overline{u}_1, \overline{u}_2,....,$ tale che ogni soluzione di $\mathfrak{L}\overline{u}=0$ sia una combinazione lineare delle $\overline{u}_1, \overline{u}_2,....,$ successione che si può sempre supporre ortogonalizzata e normalizzata alla maniera seguente

$$\begin{cases} \iint_{S(\Gamma)} \overline{u}_h(P)\overline{u}_k(P)dP=0, & (h \neq k), \\ \max |\overline{u}_k(P)| \quad (\text{su } S)=1. \end{cases} \tag{42}$$

Ma poichè le $\overline{u}_k(P)$ sono allora equilimitate e verificano la (41), si potrà estrarre da esse una successione uniformemente convergente verso un'altra soluzione $\overline{u}(P)$ di (41) (e quindi soluzione anche di $\mathfrak{L}\overline{u}=0$), la quale, per la prima delle (42), dovrebbe essere ortogonale a tutte le $\overline{u}_k(P)$ e per la seconda non può essere identicamente nulla, ciò che contraddice il supposto che dalle $\overline{u}_k(P)$, mediante combinazioni lineari finite o infinite, si ottengano tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $\mathfrak{L}\overline{u}=0$.

Ciò posto, ammesso che la $\mathfrak{L}\overline{u}=0$ sia dotata di soluzioni non identicamente nulle, possiamo determinarne un numero finito $\overline{u}_1, \overline{u}_2,...., \overline{u}_s$ verificanti le (42) e tali che ogni altra soluzione di $\mathfrak{L}u=0$ sia una combinazione lineare di queste. Sottraendo allora, ove occorra, da ciascuna delle funzioni della successione u_k sopra considerata una opportuna combinazione lineare delle $\overline{u}_1, \overline{u}_2,...., \overline{u}_s$, si potrà sempre ottenere una successione u_k dello stesso tipo, in cui tutte le u_k siano ortogonali su S alle $\overline{u}_1, \overline{u}_2,...., \overline{u}_s$, cioè

$$\iint_{S(\Gamma)} u_h(P)\overline{u}_k(P)dP=0, \qquad (h=1, 2,....; k=1, 2,...., s). \tag{43}$$

Dopo di che, è facile provare che le u_k così modificate devono essere equilimitate. Infatti, nel caso contrario, dividendo ciascuna delle u_k per il massimo M_k del suo valore assoluto su S e ragionando come sopra, si giungerebbe al risultato che il limite di una certa successione estratta dalla successione delle $\frac{u_k}{M_k}$ è un' altra soluzione non identicamente nulla $\bar{u}$ di $\mathfrak{L}\bar{u}=0$, la quale, per (43), dovrebbe risultare ortogonale alle $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s$, ciò che è impossibile per il modo come queste funzioni sono state definite.

Ma se le u_k sono equilimitate, esse sono pure equicontinue, per quanto abbiamo visto or ora; e quindi una opportuna successione formata con esse avrà per limite una soluzione di $\mathfrak{L}u=f$.

Pertanto, nella prima alternativa, si giunge in ogni caso alla conclusione che esistono soluzioni della $\mathfrak{L}u=f$, qualunque sia la f.

Passiamo infine a esaminare la seconda alternativa: supponiamo, cioè, che l'equazione $\mathfrak{M}v=0$ ammetta delle soluzioni diverse dallo zero su S, nel quale caso, per quanto ora si è detto, tali soluzioni si otterranno prendendo tutte le combinazioni lineari di un certo numero finito di soluzioni linearmente indipendenti $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_s$. In tal caso, è chiaro, per la formola di reciprocità (23) applicata all'intera superficie S, che l'equazione $\mathfrak{L}u=f$ può ammettere soluzione soltanto se f è ortogonale alle $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_s$.

D'altra parte, per il teorema del n.° 3, possiamo affermare che lo spazio $\bar{\Sigma}^*$ è formato da tutte le funzioni F di $\underline{\Sigma_p}_{\,p-1}$ con densità $f(P)$ ortogonale a $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_s$. Sicchè, comunque si prenda una di tali funzioni, si può sempre trovare una successione di funzioni $F_k(E)$ di Σ^*, le cui densità $\delta_k=\mathfrak{L}u_k$ convergono in media verso la $f(P)$.

Ciò posto, non vi è nulla da mutare al ragionamento che precede, a proposito della prima alternativa, per dimostrare l'esistenza di soluzioni per l'equazione $\mathfrak{L}u=f$, nel caso di f continua insieme con le derivate parziali prime e seconde.

8. - Ancora sul teorema dell' alternativa.

Il teorema dell'alternativa, così come è stato dimostrato nel numero precedente, presenta ancora una lacuna. A completarlo resta da provare, come adesso faremo, che, *se l'equazione omogenea $\mathfrak{L}u=0$ ammette soluzioni non identicamente nulle, anche l'aggiunta $\mathfrak{M}v=0$ ne ammetterà, e in egual numero di linearmente indipendenti.*

Cominceremo dall'osservazione che si può sempre trovare una densità positiva σ tale che le equazioni

$$\mathfrak{L}u-\sigma u=0, \qquad \mathfrak{M}v-\sigma v=0 \tag{44}$$

non abbiano altre soluzioni su S che lo zero. Infatti, se σ è abbastanza grande, una soluzione di una delle (44) non può assumere nè massimi positivi, nè minimi negativi su S, risultando le condizioni perchè in un punto si abbia un massimo positivo o un minimo negativo, incompatibili col verificarsi dell'equazione.

Pertanto, da quel che già abbiamo dimostrato nel numero precedènte risulta che l'equazione

$$\mathfrak{L}u - \sigma u = \varphi \tag{45}$$

ammette una ed una sola soluzione su S, qualunque sia la densità φ dotata di derivate parziali prime e seconde continue. Esiste quindi un certo funzionale lineare $\mathfrak{F}$, per cui la (45) riesce equivalente a

$$u = \mathfrak{F}\varphi. \tag{46}$$

Notiamo esplicitamente che il funzionale $\mathfrak{F}$ si applica a densità e dà luogo a funzioni. Inoltre, per quanto abbiamo visto, esso trasforma densità dotate di derivate parziali continue dei primi due ordini in funzioni del pari dotate di derivate parziali prime e seconde continue.

Ne segue, poichè il prodotto di una funzione per una densità è ancora una densità e poichè σ si può supporre — come sempre faremo in seguito — dotata di derivate parziali dei primi due ordini continue, che l'equazione $\mathfrak{L}u = f$ equivale all'altra

$$u + \mathfrak{F}\sigma u = \mathfrak{F}f. \tag{47}$$

Riguardo al funzionale $\mathfrak{F}$ osserviamo poi che, *dette* φ_1, φ_2,.... *delle densità per cui siano superiormente limitati gl'integrali* $\iint\limits_{S(\Gamma)} \varphi_k^2 dP$, *dalla successione delle* $\mathfrak{F}\varphi_k$ *si potrà sempre estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente.*

Posto infatti $u_k = \mathfrak{F}\varphi_k$, riuscirà, per la definizione stessa di $\mathfrak{F}$ e per quanto abbiamo visto nel n.° 5,

$$u_k(P_0) = \iint\limits_{E_0} \overline{K}(P_0, Q) u_k(Q) dQ + \iint\limits_{E_0} G(P_0, Q)[\varphi_k(Q) + \sigma(Q) u_k(Q)] dQ. \tag{48}$$

Essendo, per ipotesi, superiormente limitati gl'integrali dei quadrati delle φ_k su S, riusciranno evidentemente limitati in valore assoluto anche gl'integrali $\iint\limits_{E_0} G(P_0, Q)\varphi_k(Q)dQ$, in base alla disuguaglianza di SCHWARZ. Ne segue che le u_k sono equilimitate. Infatti, se così non fosse, imitando un ragionamento del numero precedente, e cioè dividendo tutta l'equazione (48) per il massimo di $|u_k(P)|$, indi prendendo una opportuna sottosuccessione e passando al limite, si verrebbe ad ottenere una funzione $u(P)$, avente il massimo del valore assoluto eguale all'unità e verificante la

$$u(P_0) = \iint\limits_{E_0} \overline{K}(P_0, Q) u(Q) dQ + \iint\limits_{E_0} G(P_0, Q) \sigma(Q) u(Q) dQ,$$

dalla quale, seguendo il procedimento del n.° 6, si deduce che la u è una soluzione della prima delle (44), ciò che è impossibile per il modo come è stata determinata la densità σ.

Ma se le u_k sono equilimitate, dalla (48) risulta che esse sono pure equicontinue, e quindi si può formare con esse una successione uniformemente convergente, come avevamo asserito.

Il primo membro di (47) si può anche scrivere simbolicamente $(\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)u$, dove $\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma$ sarà un nuovo operatore lineare, il quale si applica a funzioni e dà luogo a funzioni, mantenendo la continuità delle derivate parziali prime e seconde. Iteriamo tale operatore, indicando, come di consueto, mediante esponenti le successive iterazioni, e consideriamo le equazioni

$$(49) \qquad (\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)u=0, \quad (\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^2u=0,\ldots, \quad (\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^n u=0,\ldots$$

Evidentemente, ogni soluzione di una delle (49) è soluzione anche della successiva, mentre potrà non essere soluzione della precedente.

Orbene, io dico che, *per un certo valore di n, ogni soluzione dell'$(n+1)$-esima delle* (49) *sarà pure una soluzione della precedente* (8).

Supponiamo infatti che ciò non avvenga per nessun valore di n. Potremo allora determinare una successione di funzioni $u^{(0)}$, $u^{(1)},\ldots$, $u^{(n)},\ldots$, tali che, per ogni n, la $u^{(n)}$ sia soluzione della $(n+1)$-sima delle (49), sia ortogonale ad ogni soluzione u dell'n-sima di quelle equazioni

$$(50) \qquad \iint_{S(\Gamma)} u^{(n)}(P)u(P)dP=0,$$

e sia normalizzata come segue

$$(51) \qquad \iint_{S(\Gamma)} |u^{(n)}(P)|^2 dP=1, \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Ciò posto, è chiaro che, per ogni indice $m<n$, la $u^{(n)}+\mathfrak{F}\sigma u^{(n)}-\mathfrak{F}\sigma u^{(m)}$ è una soluzione dell'n-sima delle (49), giacchè

$$(\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^n(u^{(n)}+\mathfrak{F}\sigma u^{(n)}-\mathfrak{F}\sigma u^{(m)})=(\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^{n+1}u^{(n)}-\mathfrak{F}\sigma(\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^n u^{(m)}=0.$$

Sarà allora, per (50),

$$(52) \qquad \iint_{S(\Gamma)} u^{(n)}\cdot(u^{(n)}+\mathfrak{F}\sigma u^{(n)}-\mathfrak{F}\sigma u^{(m)})dP=0,$$

e quindi, per (51) e per la disuguaglianza di SCHWARZ,

$$1\leq\iint_{S(\Gamma)}(\mathfrak{F}\sigma u^{(n)}-\mathfrak{F}\sigma u^{(m)})^2 dP.$$

(8) Questo procedimento è ispirato a un'idea di F. RIESZ, Acta Mathematica, t. 41, pp. 71-98. Una lieve modificazione del ragionamento esposto nel testo proverebbe che, addirittura per tutti gli n abbastanza grandi, ogni soluzione dell'$(n+1)$-esima delle (49) è pure soluzione della precedente; ma ciò non occorre per lo scopo cui si mira.

E ciò, data l'arbitrarietà di m ed n, è incompatibile con quanto abbiamo innanzi osservato, secondo cui, per (51), dalla successione delle $\mathfrak{F}\sigma u^{(n)}$ si deve poter estrarre una successione uniformemente convergente.

Premesso questo, la dimostrazione del teorema enunciato in principio di questo numero non presenta più nessuna difficoltà.

Supponiamo infatti che $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s$ sia un sistema di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $\mathfrak{L}u=0$ e supponiamo, se è possibile, che non esistano soluzioni diverse dallo zero dell'aggiunta $\mathfrak{M}v=0$, oppure che, esistendone, tra esse non se ne possano trovare di linearmente indipendenti che al massimo in numero r minore di s: siano $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r$. Fra le soluzioni $\bar{u}$ di $\mathfrak{L}u=0$ se ne potrà determinare allora una $\bar{u}^{(0)}$, per cui $\sigma\bar{u}^{(0)}$ sia ortogonale a tutte le soluzioni di $\mathfrak{M}v=0$. Onde, in base al teorema del numero precedente, l'equazione $\mathfrak{L}u=\sigma u^{(0)}$ ammetterà soluzione.

Supponiamo ora, in primo luogo, che la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \iint\limits_S \sigma\bar{u}_1\bar{v}_1 dP, \ldots, & \iint\limits_S \sigma\bar{u}_s\bar{v}_1 dP \\ \cdots & \cdots \\ \iint\limits_S \sigma\bar{u}_1\bar{v}_r dP, \ldots, & \iint\limits_S \sigma\bar{u}_s\bar{v}_r dP \end{matrix} \right\|, \qquad (r<s) \tag{53}$$

abbia caratteristica r.

I coefficienti della combinazione lineare arbitraria delle $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s$, a meno della quale è determinata la soluzione di $\mathfrak{L}u=\sigma u^{(0)}$, si potranno allora certamente determinare in modo da ottenere una particolare soluzione $\bar{u}^{(1)}$, per cui $\sigma\bar{u}^{(1)}$ sia ortogonale a tutte le soluzioni di $\mathfrak{M}v=0$, onde l'equazione $\mathfrak{L}u=\sigma\bar{u}^{(1)}$ ammetterà soluzione, determinata, a sua volta, a meno di una combinazione lineare arbitraria delle $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s$.

Così seguitando, veniamo a costruire una successione di funzioni $\bar{u}^{(0)}, \bar{u}^{(1)}, \ldots, \bar{u}^{(n)}$, per cui

$$\mathfrak{L}\bar{u}^{(0)}=0, \quad \mathfrak{L}\bar{u}^{(1)}=\sigma u^{(0)}, \quad \mathfrak{L}\bar{u}^{(2)}=\sigma u^{(1)}, \ldots, \quad \mathfrak{L}\bar{u}^{(n)}=\sigma\bar{u}^{(n-1)}, \ldots; \tag{54}$$

ricordando ora l'equivalenza dell'equazione $\mathfrak{L}u=f$ con la $u+\mathfrak{F}\sigma u=\mathfrak{F}f$, si vede che le (54) sono equivalenti a

$$\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}^{(0)}+\mathfrak{F}\sigma\bar{u}^{(0)}=0, \\ &\bar{u}^{(1)}+\mathfrak{F}\sigma\bar{u}^{(1)}=\mathfrak{F}\sigma\bar{u}^{(0)}=-\bar{u}^{(0)}, \\ &\bar{u}^{(2)}+\mathfrak{F}\sigma\bar{u}^{(2)}=\mathfrak{F}\sigma\bar{u}^{(1)}=-(\bar{u}^{(0)}+\bar{u}^{(1)}), \ldots, \end{aligned} \right. \tag{55}$$

onde, per ogni n, risulta $(\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^{n+1}\bar{u}^{(n)}=0$. Ma allora, per l'osservazione che abbiamo premessa, esisterà un certo valore di n, per cui sarà pure $(\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^n\bar{u}^{(n)}=0$, e quindi successivamente, in base alle (55), $(\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)^{n-1}\bar{u}^{(n-1)}=0, \ldots, (\mathcal{E}+\mathfrak{F}\sigma)\bar{u}^{(1)}=0$. La $\bar{u}^{(0)}$ dovrebbe pertanto essere lo zero, contrariamente all'ipotesi.

Nel caso che la matrice (53) abbia caratteristica inferiore ad r, si giunge allo stesso risultato, modificando soltanto lievemente il ragionamento ora esposto. Sia r_1 la caratteristica di (53), con $0 \leq r_1 < r$; supponiamo che il sistema di soluzioni linearmente indipendenti $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r$ di $\mathfrak{M}v = 0$ sia scelto in modo da far risultare tutti zero gli elementi delle ultime $r - r_1$ linee in (53). La $\bar{u}^{(0)}$ con la proprietà richiesta si potrà determinare con una certa arbitrarietà: essa sarà una combinazione lineare arbitraria di certe $s - r_1$ soluzioni linearmente indipendenti $\bar{u}_1^{(0)}$, $\bar{u}_2^{(0)}, \dots, \bar{u}_{s-r_1}^{(0)}$ di $\mathfrak{L}u = 0$, e, per ciascuna di queste $\bar{u}_k^{(0)}$, esisterà, in base al teorema del numero precedente, una $\bar{u}_k^{(1)}$ per cui $\mathfrak{L}\bar{u}_k^{(1)} = \sigma \bar{u}_k^{(0)}$, $(k = 1, 2, \dots, s - r_1)$. Dette $\bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)}, \dots, \bar{u}_s^{(0)}$ (se $r_1 > 0$) altre r_1 soluzioni di $\mathfrak{L}u = 0$, che, insieme con le $\bar{u}_1^{(0)}, \dots, \bar{u}_{s-r_1}^{(0)}$, formino un sistema di s soluzioni linearmente indipendenti di $\mathfrak{L}\bar{u} = 0$, sarà

$$
(56) \qquad \begin{vmatrix} \iint\limits_S \sigma \bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)} \bar{v}_1 dP, \dots, & \iint\limits_S \sigma \bar{u}_s^{(0)} \bar{v}_1 dP \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \iint\limits_S \sigma \bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)} \bar{v}_{r_1} dP, \dots, & \iint\limits_S \sigma \bar{u}_s^{(0)} \bar{v}_{r_1} dP \end{vmatrix} \neq 0,
$$

perchè altrimenti la caratteristica della matrice (53) sarebbe inferiore ad r_1.

Supponiamo ora che la matrice

$$
(57) \qquad \begin{Vmatrix} \iint\limits_S \sigma \bar{u}_1^{(1)} \bar{v}_{r_1+1} dP, \dots, & \iint\limits_S \sigma \bar{u}_{s-r_1}^{(1)} \bar{v}_{r_1+1} dP \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \iint\limits_S \sigma \bar{u}_1^{(1)} \bar{v}_r dP, \quad \dots, & \iint\limits_S \sigma \bar{u}_{s-r_1}^{(1)} \bar{v}_r dP \end{Vmatrix}
$$

abbia caratteristica $r - r_1$.

Ciò posto, determiniamo, come è sempre possibile, una combinazione lineare $\bar{u}^{(1)}$ delle $\bar{u}_1^{(1)}, \dots, \bar{u}_{s-r_1}^{(1)}$, per cui $\sigma \bar{u}^{(1)}$ sia ortogonale su S alle $\bar{v}_{r_1+1}, \dots, \bar{v}_r$; alla $\bar{u}^{(1)}$ aggiungiamo, come è possibile per (56), una combinazione lineare $u_1^{(0)}$ delle $\bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)}, \dots, \bar{u}_s^{(0)}$ (le quali sono ortogonali su S alle $\sigma \bar{v}_{r_1+1}, \dots, \sigma \bar{v}_r$, perchè in (53) son supposte nulle le ultime $r - r_1$ linee), scelta in modo da ottenere che $\sigma(\bar{u}^{(1)} + u_1^{(0)})$ sia ortogonale anche alle $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{r_1}$. Esiste allora una $\bar{u}^{(2)}$, per cui $\mathfrak{L}\bar{u}^{(2)} = \sigma(\bar{u}^{(1)} + u_1^{(0)})$. Alla $\bar{u}^{(2)}$, essendo $r - r_1$ la caratteristica di (57), si può aggiungere una combinazione lineare $u_2^{(1)}$ delle $\bar{u}_1^{(1)}, \dots, \bar{u}_{s-r_1}^{(1)}$, tale che $\sigma(\bar{u}^{(2)} + u_2^{(1)})$ sia ortogonale alle $\bar{v}_{r_1+1}, \dots, \bar{v}_r$, indi, in base a (56), una combinazione lineare $u_2^{(0)}$ delle $\bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)}, \dots, \bar{u}_s^{(0)}$, tale che $\sigma(\bar{u}^{(2)} + u_2^{(1)} + u_2^{(0)})$ sia ortogonale anche alle $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{r_1}$. Sicchè esiste una $\bar{u}^{(3)}$, per cui $\mathfrak{L}\bar{u}^{(3)} = \sigma(\bar{u}^{(2)} + u_2^{(1)} + u_2^{(0)})$. Seguitando in tal modo, si viene a costruire una successione di funzioni $\bar{u}^{(n)}$, per cui $\mathfrak{L}\bar{u}^{(n)} = \sigma(\bar{u}^{(n-1)} + u_{n-1}^{(1)} + u_{n-1}^{(0)})$, dove $u_{n-1}^{(1)}$ e $u_{n-1}^{(0)}$ sono combinazioni lineari rispettivamente delle $\bar{u}_1^{(1)}, \dots, \bar{u}_{s-r_1}^{(1)}$ e delle $\bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)}, \dots, \bar{u}_s^{(0)}$. Se ne deduce $(\mathcal{E} + \mathfrak{F}\sigma)^{n+1} \bar{u}^{(n)} = 0$ e si conclude il ragionamento esattamente come prima.

Se poi detta r_2 la caratteristica della matrice (57), riesce $0 \leqq r_2 < r - r_1$, possiamo supporre le $\bar{v}_{r_1+1}, \ldots, \bar{v}_r$ scelte in modo che siano zero tutti gli elementi delle ultime $r - r_1 - r_2$ linee, e le $\bar{u}_1^{(1)}, \ldots, \bar{u}_{s-r_1}^{(1)}$ in modo che siano zero tutti gli elementi delle prime $s - r_1 - r_2$ colonne (basterà all'uopo sostituire, se occorre, alle $\bar{v}_{r_1+1}, \ldots, \bar{v}_r$, come alle $\bar{u}_1^{(1)}, \ldots, \bar{u}_{s-r_1}^{(1)}$, delle loro combinazioni lineari, linearmente indipendenti). Sarà allora diverso da zero il determinante formato dagli elementi delle prime r_2 linee ed ultime r_2 colonne in (57) ed esisteranno delle $\bar{u}_k^{(2)}$ per cui $\mathfrak{L}\bar{u}_k^{(2)} = \sigma\bar{u}_k^{(1)}$, $(k = 1, 2, \ldots, s - r_1 - r_2)$.

Supponiamo che sia $r - r_1 - r_2$ la caratteristica della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \iint\limits_S \sigma\bar{u}_1^{(2)}\bar{v}_{r_1+r_2+1}dP, \ldots, & \iint\limits_S \sigma\bar{u}_{s-r_1-r_2}^{(2)}\bar{v}_{r_1+r_2+1}dP \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \iint\limits_S \sigma\bar{u}_1^{(2)}\bar{v}_r dP, \quad \ldots, & \iint\limits_S \sigma\bar{u}_{s-r_1-r_2}^{(2)}\bar{v}_r dP \end{matrix} \right\|. \tag{58}$$

Potremo determinare una combinazione lineare $\bar{u}^{(2)}$ delle $\bar{u}_1^{(2)}, \ldots, \bar{u}_{s-r_1-r_2}^{(2)}$ ortogonale alle $\sigma\bar{v}_{r_1+r_2+1}, \ldots, \sigma\bar{v}_r$, e aggiungere ad essa una combinazione lineare $u_2^{(1)}$ delle $\bar{u}_{s-r_1-r_2+1}^{(1)}, \ldots, \bar{u}_{s-r_1}^{(1)}$, tale che $\bar{u}^{(2)} + u_2^{(1)}$ sia ortogonale alle $\sigma\bar{v}_{r_1+1}, \ldots, \sigma\bar{v}_{r_1+r_2}$, e ancora una combinazione lineare $u_2^{(0)}$ delle $\bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)}, \ldots, \bar{u}_s^{(0)}$, tale che $\bar{u}^{(2)} + u_2^{(1)} + u_2^{(0)}$ sia ortogonale alle $\sigma\bar{v}_1, \ldots, \sigma\bar{v}_{2_1}$. Esiste allora una $\bar{u}^{(3)}$, per cui $\mathfrak{L}\bar{u}^{(3)} = \sigma(\bar{u}^{(2)} + u_2^{(1)} + u_2^{(0)})$. Aggiungendo a $\bar{u}^{(3)}$ una $u_3^{(2)}$, una $u_3^{(1)}$, una $u_3^{(0)}$, combinazioni lineari rispettivamente delle $\bar{u}_1^{(2)}, \ldots, \bar{u}_{s-r_1-r_2}^{(2)}$, delle $\bar{u}_{s-r_1-r_2+1}^{(1)}, \ldots, \bar{u}_{s-r_1}^{(1)}$ e delle $\bar{u}_{s-r_1+1}^{(0)}, \ldots, \bar{u}_s^{(0)}$, si potrà ottenere che $\bar{u}^{(3)} + u_3^{(2)} + u_3^{(1)} + u_3^{(0)}$ sia ortogonale a $\sigma\bar{v}_1, \ldots, \sigma\bar{v}_r$, e quindi esisterà una $\bar{u}^{(h)}$, per cui $\mathfrak{L}\bar{u}^{(h)} = \sigma(\bar{u}^{(3)} + u_3^{(2)} + u_3^{(1)} + u_3^{(0)})$; e così via di seguito.

Dopo queste considerazioni, è chiaro come, in ogni caso, si possa costruire una successione di funzioni non nulle $\bar{u}^{(n)}$, tali che, essendo $u_k^{(h)}$ $(k \geqq h + 1;\ h = 0, 1, 2, \ldots)$ una particolare soluzione di $(\mathcal{E} + \mathfrak{F}\sigma)^{h+1}u_k^{(h)} = 0$ [9], risulti

$$(\mathcal{E} + \mathfrak{F}\sigma)\bar{u}^{(0)} = 0, \qquad (\mathcal{E} + \mathfrak{F}\sigma)\bar{u}^{(n)} = \sigma(\bar{u}^{(n-1)} + u_n^{(n-1)} + \ldots + u_n^{(0)}), \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

se ne deduce $(\mathcal{E} + \mathfrak{F}\sigma)^{n+1}\bar{u}^{(n)} = 0$, e quindi si arriva sempre alla conclusione che $\bar{u}^{(0)}$ dovrebbe essere lo zero, contro l'ipotesi.

---

[9] Se la matrice (53) ha caratteristica r, le $u_k^{(h)}$ con $h > 0$ si prenderanno tutte identicamente nulle. Nel caso contrario, seguendo il procedimento del testo, e cioè costruendo successivamente le matrici (57), (58),...., se la ν-esima di queste riesce di caratteristica massima $r - r_1 - \ldots - r_\nu$, si prenderanno tutte identicamente nulle le $u_k^{(h)}$ con $h > \nu$.