ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier delle funzioni di due variabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 3-4 (1937), p. 225-246

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_3-4_225_0>

ORDINE DI GRANDEZZA DEI COEFFICIENTI DI EULERO-FOURIER DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI [1]

di SANDRO FAEDO (Pisa).

Introduzione.

Salvo alcuni risultati di W. H. YOUNG [2], non si sono finora avuti studi sui coefficienti di EULERO-FOURIER delle funzioni di due variabili.

In questo lavoro mi occupo del loro ordine di grandezza, analogamente a quanto è stato fatto per una variabile.

Nei §§ 1 e 3 estendo un noto teorema del LEBESGUE [3] [i coefficienti di EULERO-FOURIER di una funzione $f(x)$ a variazione limitata sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{n}$] alle due classi principali di funzioni di due variabili a variazione limitata, quelle secondo TONELLI e quelle a variazione doppia finita [4]. Per la prima classe ottengo che i coefficienti di EULERO-FOURIER sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{m+n}$ [5] e, ciò che più interessa, che non si può assegnare per essi un ordine di infinitesimo maggiore che valga per tutte le funzioni della classe; per le funzioni a variazione doppia finita invece sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{mn}$.

---

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2] W. H. YOUNG: *On multiple Fourier series*, Proc. London Math. Soc., s. 2, vol. XI (1912), pp. 157, 169.

[3] H. LEBESGUE: *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, 1906), p. 45. Cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche* (Zanichelli, Bologna, 1928). In seguito quest'opera sarà indicata con « TONELLI: *S. T.* ».

[4] Vedi definizioni nei preliminari, pp. 2-3.

[5] Con l'espressione « i coefficienti di EULERO-FOURIER sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{a(m, n)}$ » intendo che sia, qualunque siano m ed n,

$$|a_{m,n}| < \frac{k}{a(m, n)}, \qquad |b_{m,n}| < \frac{k}{a(m, n)}, \qquad |c_{m,n}| < \frac{k}{a(m, n)}, \qquad |d_{m,n}| < \frac{k}{a(m, n)},$$

k essendo una costante indipendente da m e da n. Con una notazione di BACHMANN e LANDAU, ormai di uso comune, ciò si esprime scrivendo

$$a_{m,n} = O\left(\frac{1}{a(m, n)}\right), \qquad b_{m,n} = O\left(\frac{1}{a(m, n)}\right), \qquad c_{m,n} = O\left(\frac{1}{a(m, n)}\right), \qquad d_{m,n} = O\left(\frac{1}{a(m, n)}\right).$$

Dò pure, nel § 6, due analoghe estensioni di un teorema di G. DARBOUX [6], giovandomi di un lemma (§ 5), che offre una nuova definizione di funzione di una variabile a variazione limitata. Osservo, in una nota [nota [19]] che questa definizione estesa alle funzioni di due variabili *non sembra* porti alla classe delle funzioni a variazione doppia finita (estensione formale della classica definizione di funzione di una variabile a variazione limitata); per lo meno il procedimento con cui dimostro l'equivalenza delle due definizioni, nel caso di una variabile, non vale per due variabili.

Estendo ancora le proprietà note, su questo argomento, per le funzioni assolutamente continue (§ 4) e un teorema [7] del LEBESGUE (§ 2) sull'ordine di grandezza dei coefficienti di EULERO-FOURIER delle funzioni continue e tali che sia $f(0)=f(2\pi)$, facendo anche vedere che questo teorema sussiste per qualsiasi funzione continua.

Preliminari.

Si consideri un piano riferito ad un sistema cartesiano di assi x e y. Chiamerò *quadrato fondamentale* il quadrato Q definito dalle disuguaglianze $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

Richiamo alcune definizioni di cui farò uso frequente in seguito.

Sia definita in Q una funzione $f(x, y)$:

a) $f(x, y)$ si dice a *variazione limitata secondo Tonelli in Q* [8] quando:

1°_{a}) Per quasi tutti i valori di x' e y' dell'intervallo $(0, 2\pi)$ le $f(x', y)$ e $f(x, y')$ sono funzioni rispettivamente di y e x a variazione limitata in $(0, 2\pi)$;

2°_{a}) Indicata con $V_{(x)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, x)$, della $f(x, y)$ considerata come funzione della sola x e con $V_{(y)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, y)$, della $f(x, y)$ considerata come funzione della sola y, esistono finiti gli integrali (nel senso del LEBESGUE)

$$\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)\,dy, \qquad \int_0^{2\pi} V_{(y)}(x, 2\pi)\,dx.$$

b) $f(x, y)$ si dice a *variazione doppia finita in Q* [9] se per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse delle x in parti mediante i punti

---

(6) TONELLI: *S. T.*, p. 226.

(7) H. LEBESGUE: *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisants à une condition de Lipschitz*, Bull. Soc. Math. de France, XXXVIII, 1910, pp. 184, 190.

(8) Rend. R. Accad. Lincei, vol. III (1926), pp. 357-362. *In seguito con funzioni di due variabili a variazione limitata intendo sempre secondo* TONELLI.

(9) Le funzioni a variazione doppia finita (terminologia introdotta dal TONELLI) sono le funzioni e variazione limitata di VITALI, LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN, ecc.

$x_0 \equiv 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m \equiv 2\pi$ e per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse delle y mediante i punti $y_0 \equiv 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n \equiv 2\pi$, la somma

$$\sum |f(x_r, y_s) - f(x_{r+1}, y_s) - f(x_r, y_{s+1}) + f(x_{r+1}, y_{s+1})|,$$

estesa a tutti i valori $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$, resta sempre inferiore a un numero fisso positivo indipendente dalla suddivisione considerata.

È anche noto che in questa ipotesi è in tutto Q:

$$f(x, y) = -f(0, 0) + f(x, 0) + f(0, y) + P(x, y) - N(x, y) \tag{1}$$

con $f(0, 0)$, $f(x, 0)$, $f(0, y)$ limitate e $P(x, y)$, $N(x, y)$ limitate, non negative, non decrescenti sia come funzioni della sola x sia come della sola y e tali inoltre che per $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$ sia sempre

$$P(x_1, y_1) - P(x_2, y_1) - P(x_1, y_2) + P(x_2, y_2) \geqslant 0,$$
$$N(x_1, y_1) - N(x_2, y_1) - N(x_1, y_2) + N(x_2, y_2) \geqslant 0.$$

c) $f(x, y)$ si dice a *variazione limitata secondo Hardy in* Q ([10]) quando:

1°_{c}) è a variazione doppia finita in Q;

2°_{c}) è a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ come funzione della sola x per tutti gli y e come funzione della sola y per tutti gli x.

Dalla (1) segue che, soddisfatta 1°_{c}), perchè lo sia anche 2°_{c}) è necessario e sufficiente che $f(x, 0)$, $f(0, y)$ siano a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ rispettivamente come funzioni di x e di y.

Si abbia ora una funzione $f(x, y)$ continua in Q:

a') $f(x, y)$ si dice *assolutamente continua secondo Tonelli in* Q ([11]) quando:

$1^{\circ}_{a'}$) per quasi tutti i valori di x', y' dell'intervallo $(0, 2\pi)$ le $f(x, y')$ e $f(x', y)$ sono funzioni rispettivamente di x, y assolutamente continue e inoltre

$2^{\circ}_{a'}) \equiv 2^{\circ}_{a}$).

b') $f(x, y)$ si dice *doppiamente assolutamente continua in* Q se, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può determinare in corrispondenza un λ tale che per ogni gruppo di rettangoli, a lati paralleli agli assi x e y, in numero finito, non sovrapponentisi, contenuti in Q e di area complessiva minore di λ, sia

$$\sum |f(x'', y'') - f(x', y'') - f(x'', y') + f(x', y')| < \varepsilon$$

dove (x', y') e (x'', y'') indicano i vertici di coordinate minime e massime del rettangolo generico del gruppo.

([10]) Quart. Journ., vol. XXXVII (1906), pp. 53-79.

([11]) Rend. R. Accad. Lincei, vol. III (1926), pp. 633-638. *In seguito con funzioni di due variabili assolutamente continue intendo sempre quelle secondo* TONELLI.

È noto che in questo caso vale la relazione:

$$f(x, y) = -f(0, 0) + f(x, 0) + f(0, y) + P(x, y) - N(x, y) \tag{1'}$$

in cui $P(x, y)$ e $N(x, y)$ sono doppiamente assolutamente continue e inoltre assolutamente continue come funzioni della sola x per tutti gli y e della sola y per tutti gli x.

Data in Q una funzione $f(x, y)$ *integrabile* [12], diconsi *coefficienti di Eulero-Fourier* della funzione $f(x, y)$ i numeri $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$, definiti da

$$\left\{\begin{aligned}
a_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y) \cos mx \cos ny dxdy \\
b_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y) \operatorname{sen} mx \cos ny dxdy \\
c_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y) \cos mx \operatorname{sen} ny dxdy \\
d_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y) \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny dxdy
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Come per le funzioni di una variabile vale il teorema di RIEMANN-LEBESGUE, ossia i coefficienti di EULERO-FOURIER di $f(x, y)$ tendono a zero per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$, simultaneamente e indipendentemente l'uno dall'altro.

Nel presente lavoro viene appunto studiato l'ordine di infinitesimo, per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$, dei coefficienti di EULERO-FOURIER di alcune classi di funzioni.

§ 1. - Funzioni i cui coefficienti di Eulero-Fourier sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{mn}$.

Data una funzione $f(x, y)$ integrabile in Q, i suoi coefficienti di EULERO-FOURIER si possono porre sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned}
a_{m,n} &= \frac{1}{mn\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{m,n}(x, y) \cos x \cos y dxdy, \\
b_{m,n} &= \frac{1}{mn\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{m,n}(x, y) \operatorname{sen} x \cos y dxdy, \\
c_{m,n} &= \frac{1}{mn\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{m,n}(x, y) \cos x \operatorname{sen} y dxdy, \\
d_{m,n} &= \frac{1}{mn\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{m,n}(x, y) \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y dxdy,
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

[12] Si considera sempre l'integrabilità nel senso del LEBESGUE.

in cui è

$$\varphi_{m,n}(x,y)=\sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}(-1)^{p+q}f\left(\frac{x+p\pi}{m},\frac{y+q\pi}{n}\right),\qquad (0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi).$$

Infatti è

$$a_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy=\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}\int_{p\pi:m}^{(p+1)\pi:m}\cos mx\,dx\int_{q\pi:n}^{(q+1)\pi:n}f(x,y)\cos ny\,dy.$$

Trasportando tutti gli integrali di questa somma sul quadrato $\left(0,0;\ \frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right)$ ed eseguendo il cambiamento di variabili $mx=x'$, $ny=y'$ si ricava la prima delle (3). In modo analogo si ricavano le altre. Le (3) sono espressioni adatte alla valutazione dell'ordine di grandezza dei coefficienti di EULERO-FOURIER di una funzione.

In particolare da esse segue immediatamente il seguente teorema (in cui conserviamo le precedenti notazioni):

Se esiste una funzione $\varphi(x,y)$ *non negativa e integrabile in* $(0,0;\pi,\pi)$ *e tale che per quasi tutti gli* x,y *in* $(0,0;\pi,\pi)$ *si abbia, qualunque siano* m *ed* n

$$|\varphi_{m,n}(x,y)|\leqslant\varphi(x,y),$$

i coefficienti di Eulero-Fourier di $f(x,y)$ *sono almeno dell'ordine di* $\frac{1}{mn}$.

Infatti per le (3) si ha:

$$|a_{m,n}|\leqslant\frac{1}{mn}\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\varphi(x,y)\,dx\,dy=\frac{k}{mn}.$$

Si vede immediatamente che se una funzione $f(x,y)$ è a variazione doppia finita si ha $|\varphi_{m,n}(x,y)|<k$ qualunque siano m,n; si ha quindi, come caso particolare della proposizione precedente, che *se una funzione è a variazione doppia finita in* Q *i suoi coefficienti di Eulero-Fourier sono almeno dell'ordine di* $\frac{1}{mn}$.

Naturalmente per funzioni di una sola variabile sussistono formule analoghe alle (3) e una proposizione analoga a quella enunciata dianzi.

§ 2. - Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione continua.

Definizione. - Dico *modulo del variare di una funzione* $f(x,y)$ *continua* in $R\equiv(a,c;\ b,d)$ la funzione $\omega(h,k)$ che rappresenta per ogni h,k, con $0<h\leqslant(b-a)$, $0<k\leqslant(c-d)$, il massimo modulo di $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)-f(x_1,y_2)+f(x_2,y_2)|$ per tutte le possibili coppie (x_1,y_1), (x_2,y_2) appartenenti ad R e tali che si abbia $|x_1-x_2|\leqslant h$, $|y_1-y_2|\leqslant k$.

Premesso ciò, si ha:

Se $f(x, y)$ è continua in Q e se $\omega(h, k)$ è il modulo del suo variare, i suoi coefficienti di Eulero-Fourier soddisfano alla disuguaglianza

$$|a_{m,n}| < \frac{4}{\pi^2}\,\omega\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right) \tag{4}$$

ed alle analoghe per gli altri coefficienti.

Basta osservare che per la funzione $\varphi_{m,n}(x, y)$, definita nel § 1, si ha in questo caso

$$|\varphi_{m,n}(x, y)| \leq mn\omega\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Applicando quindi le formule (3) si ottengono subito la (4) e le analoghe per $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$.

Usando le formule corrispondenti alle (3) per una variabile si può dimostrare che *se $f(x)$ è continua in $(0, 2\pi)$ e ammette modulo di continuità $\omega(\delta)$ i suoi coefficienti di Eulero-Fourier soddisfano alle disuguaglianze*

$$|a_n| \leq \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad |b_n| \leq \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Da ciò si vede che in questa proposizione è superflua l'ipotesi $f(0) = f(2\pi)$ sfruttata nella dimostrazione del LEBESGUE ([13]).

Segue anche:

Se $f(x, y)$ soddisfa in Q alla condizione

$$|f(x', y') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x'', y'')| \leq A\,|x' - x''|^{\alpha} \cdot |y' - y''|^{\beta}$$

con A costante e $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, è

$$|a_{m,n}| < \frac{4A}{\pi^{2-\alpha-\beta} m^{\alpha} n^{\beta}}$$

(e analoghe per gli altri coefficienti).

Basta osservare che è in questo caso

$$\omega(h, k) \leq A h^{\alpha} k^{\beta}.$$

§ 3. - Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione a variazione limitata.

Se una funzione $f(x, y)$ è quasi-continua (misurabile) in Q e a variazione limitata essa è anche integrabile in Q ([14]).

La proposizione del § 1 non sussiste in generale per le funzioni a variazione limitata. Per esse si ha invece:

([13]) H. LEBESGUE, loc. cit. in ([7]).

([14]) TONELLI: *S. T.*, p. 448.

Se $f(x,y)$ è quasi-continua e a variazione limitata in Q, i suoi coefficienti di Eulero-Fourier sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{m+n}$. Inoltre, comunque si prenda $\varepsilon>0$, si possono trovare funzioni quasi-continue e a variazione limitata i cui coefficienti di Eulero-Fourier non siano almeno dell'ordine di $\frac{1}{(m+n)^{1+\varepsilon}}$.

Dimostriamo anzitutto la prima parte del teorema per $a_{m,n}$. Per gli altri coefficienti la dimostrazione è analoga.

È noto che, se $f(x,y)$ è quasi-continua e a variazione limitata, la funzione

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\cos ny\,dy$$

è a variazione limitata in $(0,2\pi)$ e se V_n è la sua variazione totale in $(0,2\pi)$ è

$$V_n\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi,y)dy=\pi k_1 \quad (^{15}).$$

Ponendo

$$\psi_n(x)=\psi_n(0)+\psi_{n,1}(x)-\psi_{n,2}(x),$$

dove $\psi_{n,1}(x)$, $\psi_{n,2}(x)$ rappresentano rispettivamente la variazione positiva e negativa di $\psi_n(x)$ in $(0,x)$, si ha

$$\psi_{n,1}(2\pi)+\psi_{n,2}(2\pi)=V_n.$$

È quindi

$$a_{m,n}=\frac{1}{\pi}\left[\psi_n(0)\int_0^{2\pi}\cos mx dx+\int_0^{2\pi}\psi_{n,1}(x)\cos mx dx-\int_0^{2\pi}\psi_{n,2}(x)\cos mx dx\right],$$

e applicando il secondo teorema della media

$$a_{m,n}=\frac{1}{\pi}\left[\psi_{n,1}(2\pi)\int_{\alpha_1}^{2\pi}\cos mx dx-\psi_{n,2}(2\pi)\int_{\alpha_2}^{2\pi}\cos mx dx\right]=$$

$$=\frac{1}{m\pi}\left[\psi_{n,2}(2\pi)\operatorname{sen} m\alpha_2-\psi_{n,1}(2\pi)\operatorname{sen} m\alpha_1\right],$$

$$m\,|a_{m,n}|\leqq\frac{\psi_{n,1}(2\pi)+\psi_{n,2}(2\pi)}{\pi}=\frac{V_n}{\pi}\leqq k_1.$$

Analogamente si dimostra che è $n\,|a_{m,n}|\leqq k_2$ e quindi, sommando con la precedente disuguaglianza,

(5) $$(m+n)\,|a_{m,n}|<k.$$

([15]) TONELLI: *S. T.*, p. 476.

Per provare la seconda parte del teorema basta, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, dare un esempio di una funzione a variazione limitata per cui $m^{1+\varepsilon} | d_{m,m} | \to \infty$, per $m \to \infty$.

Fissato $\varepsilon > 0$ e supposto come è lecito $\varepsilon < 2$, si consideri la funzione nulla nel punto $(0, 0)$ e definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

negli altri punti di Q.

Essa è a variazione limitata in Q. Infatti

$$| f_x'(x, y) | = | f_y'(x, y) | = \frac{\left| \frac{\varepsilon}{2} - 1 \right|}{(x+y)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

è integrabile in Q.

Posto $1 - \frac{\varepsilon}{2} = \sigma$ (onde $\sigma > 0$), il coefficiente $d_{m,m}$ della funzione considerata è dato da

$$(6) \qquad \pi^2 d_{m,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} my}{(x+y)^\sigma} \, dx dy.$$

Suddividiamo il quadrato fondamentale mediante le parallele agli assi date da $x = \frac{h}{m} \pi$, $y = \frac{h}{m} \pi$ con $h = 1, 2, \ldots, 2m-1$.

Osserviamo dapprima che è

$$I_{0,0} = \int_0^{2\pi:m} \int_0^{2\pi:m} \frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} my}{(x+y)^\sigma} \, dx dy > 0.$$

Infatti, trasportando l'integrazione sul quadrato $\left(0, 0; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}\right)$, si ha:

$$I_{0,0} = \int_0^{\pi:m} \int_0^{\pi:m} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} my \left[\frac{1}{(x+y)^\sigma} - \frac{2}{\left(x+y+\frac{\pi}{m}\right)^\sigma} + \frac{1}{\left(x+y+\frac{2\pi}{m}\right)^\sigma} \right] dx dy$$

ed eseguendo il cambiamento di variabili $mx = x'$, $my = y'$

$$I_{0,0} = \frac{m^\sigma}{m^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \left[\frac{1}{(x+y)^\sigma} - \frac{2}{(x+y+\pi)^\sigma} + \frac{1}{(x+y+2\pi)^\sigma} \right] dx dy.$$

Il prodotto $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ è positivo nel campo considerato.

Inoltre è pure

$$\frac{1}{(x+y)^\sigma} - \frac{2}{(x+y+\pi)^\sigma} + \frac{1}{(x+y+2\pi)^\sigma} > 0.$$

Posto infatti $x+y=z$, si ha

$$\frac{1}{(x+y)^\sigma}-\frac{2}{(x+y+\pi)^\sigma}+\frac{1}{(x+y+2\pi)^\sigma}=$$
$$=\left[\frac{1}{z^\sigma}-\frac{1}{(z+\pi)^\sigma}\right]-\left[\frac{1}{(z+\pi)^\sigma}-\frac{1}{(z+2\pi)^\sigma}\right]=\varphi_0(z)-\varphi_0(z+\pi),$$

avendo posto

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{z^\sigma}-\frac{1}{(z+\pi)^\sigma}.$$

Consideriamo $\varphi_0'(z)$. Si ha:

$$\varphi_0'(z)=-\sigma\left[\frac{1}{z^{1+\sigma}}-\frac{1}{(z+\pi)^{1+\sigma}}\right]<0;$$

$\varphi_0(z)$ è quindi decrescente e perciò è $\varphi_0(z)-\varphi_0(z+\pi)>0$.

Essendo la funzione sotto il segno di integrale sempre positiva è

$$I_{0,0}=Am^{\sigma-2} \qquad \text{con } A>0. \tag{7}$$

Procedendo in modo perfettamente analogo, si ponga $p+q=n$ con p, q interi e $n=0, 1,...., 2m-2$, e si consideri

$$I_{p,q}=\int\limits_{2p\pi:m}^{2(p+1)\pi:m}\int\limits_{2q\pi:m}^{2(q+1)\pi:m}\frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} my}{(x+y)^\sigma}\,dxdy=$$
$$=\frac{m^\sigma}{m^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\left[\frac{1}{(x+y+2n\pi)^\sigma}-\frac{2}{[x+y+(2n+1)\pi]^\sigma}+\frac{1}{[x+y+(2n+2)\pi]^\sigma}\right]dxdy.$$

Si ha ancora $I_{p,q}>0$. Infatti è

$$\frac{1}{(x+y+2n\pi)^\sigma}-\frac{2}{[x+y+(2n+1)\pi]^\sigma}+\frac{1}{[x+y+(2n+2)\pi]^\sigma}=\varphi_n(z)-\varphi_n(z+\pi)$$

essendo

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{(z+2n\pi)^\sigma}-\frac{1}{[z+(2n+1)\pi]^\sigma}$$

e

$$\varphi_n'(z)=-\sigma\left[\frac{1}{(z+2n\pi)^{1+\sigma}}-\frac{1}{[z+(2n+1)\pi]^{1+\sigma}}\right]<0.$$

L'integrale (6) si può quindi spezzare mediante le parallele $x=\frac{h}{m}\pi$, $y=\frac{h}{m}\pi$, con $h=1, 2,...., 2m-1$, in m^2 integrali, che si è visto essere tutti positivi. Perciò $d_{m,m}$ è positivo e si ha

$$d_{m,m}>I_{0,0}$$

e per la (7), ricordando che è $\sigma=1-\frac{\varepsilon}{2}$,

$$d_{m,m}>Am^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

e, moltiplicando i due membri per $m^{1+\varepsilon}$,

$$m^{1+\varepsilon}d_{m,m}>Am^{\frac{\varepsilon}{2}} \tag{8}$$

che mostra che, per $m\to\infty$, $m^{1+\varepsilon}d_{m,m}\to\infty$.

Il teorema è così dimostrato.

Osservazione I. - Essendo $\frac{1}{m+n}<\frac{1}{\sqrt{mn}}$, i coefficienti di EULERO-FOURIER di una funzione quasi-continua a variazione limitata sono in modulo minori di $\frac{k}{\sqrt{mn}}$.

La stessa (8) mostra anche che, preso $\varepsilon>0$ ad arbitrio, esistono funzioni quasi-continue e a variazione limitata i cui coefficienti di EULERO-FOURIER non sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$.

Osservazione II. - Dalla dimostrazione fatta segue anche che se una funzione $f(x, y)$ quasi-continua in Q è tale che la sua $V_{(x)}(2\pi, y)$ sia integrabile, allora i suoi coefficienti di EULERO-FOURIER sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{m}$; se invece è integrabile $V_{(y)}(x, 2\pi)$ essi sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{n}$. La (8) mostra infine che nella classe totale delle funzioni quasi-continue aventi $V_{(x)}(2\pi, y)$ $[V_{(y)}(x, 2\pi)]$ integrabile esistono funzioni i cui coefficienti di EULERO-FOURIER non sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ $\left[\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right]$, comunque si prenda $\varepsilon>0$.

§ 4. - Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier delle funzioni assolutamente continue.

1. - Per le funzioni di una variabile assolutamente continue in $(0, 2\pi)$ si ha che è sempre $\lim_{n\to\infty} na_n=0$. Invece perchè sia $\lim_{n\to\infty} nb_n=0$ è inoltre necessario (e sufficiente) che sia $f(0)=f(2\pi)$.

Analogamente per le funzioni doppiamente assolutamente continue è

$$\lim_{\substack{m\\n}\Big\}\to\infty} mna_{m,n}=0, \qquad \lim_{\substack{m\\n}\Big\}\to\infty} mnb_{m,n}=0, \qquad \lim_{\substack{m\\n}\Big\}\to\infty} mnc_{m,n}=0 \quad (^{16}).$$

(16) Con un'altra notazione di BACHMANN e LANDAU [cfr. (5)], questi limiti si esprimono con i simboli

$$a_{m,n}=o\left(\frac{1}{mn}\right), \qquad b_{m,n}=o\left(\frac{1}{mn}\right), \qquad c_{m,n}=o\left(\frac{1}{mn}\right).$$

Infatti si può porre per la (1')

$$f(x, y) = -f(0,0) + f(x,0) + f(0,y) + F(x,y)$$

in cui $F(x, y)$ è doppiamente assolutamente continua e inoltre assolutamente continua come funzione della sola x per tutti gli y e della sola y per tutti gli x.

Essendo, per $m > 0$, $n > 0$, i coefficienti di EULERO-FOURIER della $f(x, y)$ uguali ai corrispondenti della $F(x, y)$, si ha facilmente, mediante una doppia integrazione per parti,

$$\lim_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} mnb_{m,n} = \lim_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} \frac{mn}{\pi^2} \iint_Q F(x,y) \operatorname{sen} mx \cos ny\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi^2} \int_0^{2\pi} F(0,y) \cos ny\,dy - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi^2} \int_0^{2\pi} F(2\pi, y) \cos ny\,dy +$$

$$+ \lim_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} \frac{1}{\pi^2} \iint_Q F''_{x,y}(x,y) \cos mx \cos ny\,dx\,dy = 0$$

e così pure per $\lim\limits_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} mna_{m,n}$ e $\lim\limits_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} mnc_{m,n}$.

Quanto a $mnd_{m,n}$, integrando per parti si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} F(x,y) \operatorname{sen} mx\,dx = \frac{1}{m}\left[F(0,y) - F(2\pi, y) + \int_0^{2\pi} F_x'(x,y) \cos mx\,dx\right], \tag{9}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x,y) \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny\,dx\,dy = \frac{1}{mn}\Big[F(0,0) - F(0,2\pi) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} F_y'(0,y) \cos ny\,dy - F(2\pi, 0) + F(2\pi, 2\pi) -$$

$$- \int_0^{2\pi} F_y'(2\pi, y) \cos ny\,dy + \int_0^{2\pi} F_x'(x, 0) \cos mx\,dx -$$

$$- \int_0^{2\pi} F_x'(x, 2\pi) \cos mx\,dx + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F''_{x,y}(x,y) \cos mx \cos ny\,dx\,dy\Big] =$$

$$= \frac{1}{mn}\left[F(0,0) - F(0,2\pi) - F(2\pi,0) + F(2\pi,2\pi) + \varepsilon_{m,n}\right],$$

in cui $\varepsilon_{m,n} \to 0$ per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$.

Dalla formula che definisce $F(x, y)$ si ha subito che è

$$F(0,0) - F(0,2\pi) - F(2\pi,0) + F(2\pi,2\pi) =$$
$$= f(0,0) - f(0,2\pi) - f(2\pi,0) + f(2\pi,2\pi);$$

perciò se è $f(0,0) - f(0,2\pi) - f(2\pi,0) + f(2\pi,2\pi) = 0$ è $\lim\limits_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} mnd_{m,n} = 0$.

Si conclude quindi che

Se $f(x, y)$ è doppiamente assolutamente continua in Q e se è

$$f(0, 0) - f(0, 2\pi) - f(2\pi, 0) + f(2\pi, 2\pi) = 0,$$

allora

$$mna_{m,n}, \qquad mnb_{m,n}, \qquad mnc_{m,n}, \qquad mnd_{m,n}$$

tendono a zero quando m, n tendono all'infinito ([17]).

2. - Per le funzioni assolutamente continue nel senso del TONELLI si ha invece:

Se $f(x, y)$ è assolutamente continua in Q, per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$

$$\begin{array}{ll} (m+n)a_{m,n} \to 0, & (m+n)b_{m,n} \to 0, \\ (m+n)c_{m,n} \to 0, & (m+n)d_{m,n} \to 0. \end{array}$$

Basta evidentemente dimostrare ciò per $(m+n)d_{m,n}$.

Ricordando la (9), che sussiste in questa ipotesi per quasi tutti gli y sostituendo $f(x, y)$ a $F(x, y)$, abbiamo

$$md_{m,n} = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(2\pi, y) \operatorname{sen} ny dy +$$
$$+ \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(0, y) \operatorname{sen} ny dy + \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_x'(x, y) \cos mx \operatorname{sen} ny dx dy\,;$$

per noti teoremi questi tre integrali tendono a zero per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$, quindi è $md_{m,n} \to 0$.

Analogamente $nd_{m,n} \to 0$, da cui

$$(m+n)d_{m,n} \to 0.$$

Osservazione I. - Questo teorema è l'estensione alle funzioni assolutamente continue secondo TONELLI del teorema per le funzioni di una variabile rammentato

([17]) W. H. YOUNG (loc. cit. in ([2])) ha dimostrato per altra via il seguente teorema:

Se $f(x, y)$ è a variazione limitata secondo Hardy in Q e se, comunque si prenda $\varepsilon > 0$, in $(\varepsilon, \varepsilon\,; 2\pi, 2\pi)$ $f(x, y)$ è doppiamente assolutamente continua e inoltre assolutamente continua come funzione della sola x per tutti gli y e della sola y per tutti gli x, allora $mna_{m,n} \to 0$ per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$.

È facile vedere che in queste ipotesi se si pone, come è lecito per quel che riguarda i coefficienti di EULERO-FOURIER, $f(x, 0) = f(x, +0)$, $f(0, y) = f(+0, y)$, $f(x, y)$ è doppiamente assolutamente continua in tutto Q e assolutamente continua rispetto a x [y] per tutti gli y [x] di $(0, 2\pi)$.

Da quanto s'è qui dimostrato risulta quindi superflua l'ipotesi dell'assoluta continuità della $f(x, y)$ rispetto alle singole variabili.

all'inizio di questo paragrafo. È da rilevare quindi che in questa estensione basta la *sola* ipotesi della assoluta continuità.

Osservazione II. - Si possono fare considerazioni analoghe alle osservazioni I e II del § 3. Quindi se una funzione è assolutamente continua è per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$

$$\sqrt{mn}a_{m,n} \to 0, \qquad \sqrt{mn}b_{m,n} \to 0, \qquad \sqrt{mn}c_{m,n} \to 0, \qquad \sqrt{mn}d_{m,n} \to 0.$$

Così pure si ha:

Se $f(x, y)$ è quasi-continua e tale che la sua $V_{(x)}(2\pi, y)$ sia integrabile in $(0, 2\pi)$ e se per quasi tutti gli y $f(x, y)$ è assolutamente continua come funzione della sola x, è

$$ma_{m,n} \to 0, \qquad mb_{m,n} \to 0, \qquad ml_{m,n} \to 0, \qquad md_{m,n} \to 0.$$

§ 5.

Per le considerazioni che seguono è utile il seguente

Lemma: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ sia a variazione limitata in (a, b) è che per una qualsiasi suddivisione di (a, b) mediante un numero pari di punti $a \equiv a_1 < a_2 < \dots < a_{2n} \equiv b$ si abbia*

$$|f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - \dots + f(a_{2n-1}) - f(a_{2n})| < K \tag{10}$$

essendo K una costante indipendente dalla suddivisione.

La condizione è necessaria: infatti se $f(x)$ è a variazione limitata in (a, b) si ha, per qualsiasi suddivisione mediante un numero pari di punti,

$$\begin{aligned} &|f(a_1) - f(a_2) + \dots + f(a_{2n-1}) - f(a_{2n})| \leq \\ &\qquad \leq |f(a_1) - f(a_2)| + \dots + |f(a_{2n-1}) - f(a_{2n})| < V. \end{aligned}$$

La condizione è sufficiente: Siano $a \equiv a_1 < a_2 < \dots < a_m \equiv b$ i punti con cui si sia eseguita una arbitraria suddivisione in parti di (a, b).

Consideriamo dapprima

$$\begin{aligned} &|f(a_1) - f(a_2)| + |f(a_3) - f(a_4)| + \dots + |f(a_{s-1}) - f(a_s)| \geq \\ &\qquad \geq |[f(a_1) - f(a_2)] + \dots + [f(a_{s-1}) - f(a_s)]| \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} s &= m, && \text{se } m \text{ è pari,} \\ s &= m - 1, && \text{se } m \text{ è dispari.} \end{aligned}$$

Delle differenze

$$f(a_1) - f(a_2), \quad f(a_3) - f(a_4), \dots, \quad f(a_{s-1}) - f(a_s)$$

consideriamo quelle positive e sia P la loro somma. Sia invece $-N$ la somma di quelle negative. I punti a_i, a_{i+1} tali che sia $f(a_i)-f(a_{i+1})>0$ danno una particolare suddivisione di (a, b).

Applicando la (10) a questa particolare suddivisione si ha $0<P<K$, se esiste almeno una differenza $f(a_i)-f(a_{i+1})>0$.

E allo stesso modo si ottiene $O<N<K$, se esiste almeno una differenza $f(a_i)-f(a_{i+1})<0$.

Perciò

$$|f(a_1)-f(a_2)|+|f(a_3)-f(a_4)|+ \dots +|f(a_{s-1})-f(a_s)|<2K.$$

Consideriamo in fine

$$|f(a_2)-f(a_3)|+|f(a_4)-f(a_5)|+ \dots +|f(a_{t-1})-f(a_t)|$$

con

$$t=m, \quad \text{per } m \text{ dispari}$$
$$t=m-1, \quad \text{per } m \text{ pari.}$$

Applicando il ragionamento precedente alla suddivisione a_2, a_3,...., a_t si ottiene:

$$|f(a_2)-f(a_3)|+|f(a_4)-f(a_5)|+ \dots +|f(a_{t-1})-f(a_t)|<2K.$$

Sommando infine con la precedente disuguaglianza, abbiamo

$$|f(a_1)-f(a_2)|+|f(a_2)-f(a_3)|+ \dots +|f(a_{m-1})-f(a_m)|<4K$$

e per l'arbitrarietà della suddivisione a_1, a_2,...., a_m il lemma è dimostrato.

Osservazione. - Se vale la (10) per qualsiasi suddivisione

$$a\equiv a_1<a_2< \dots <a_{2n}\equiv b,$$

la variazione totale della $f(x)$ in (a, b) è certamente non maggiore di $4K$.

§ 6. - Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier di funzioni non limitate.

1. - Nel § 3 s'è valutato l'ordine di grandezza dei coefficienti di EULERO-FOURIER di funzioni a variazione limitata e quindi in generale non limitate. Passiamo ora a considerare altre due classi di funzioni non limitate. Estendendo un teorema di DARBOUX ([18]) si ottiene il

([18]) Loc. cit. in ([6]).

TEOREMA I. — *Se è*

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^{\mu}\cdot|y-b|^{\nu}} \quad con \quad 0<\mu<1, \quad 0<\nu<1,$$

(a,b) punto di Q e $\varphi(x,y)$ a variazione limitata secondo Hardy in Q, i coefficienti di Eulero-Fourier di $f(x,y)$ sono almeno dell'ordine di $\frac{1}{m^{1-\mu}n^{1-\nu}}$.

Essendo $|\varphi(x,y)|<M_1$, $0<\mu<1$, $0<\nu<1$, $f(x,y)$, è integrabile in Q. Si consideri uno qualunque dei coefficienti di EULERO-FOURIER di $f(x,y)$, ad esempio

$$a_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^{\mu}\cdot|y-b|^{\nu}}\cos mx\cos ny\,dx\,dy. \tag{11}$$

Suddiviso il quadrato Q in quattro parti mediante le parallele agli assi $x=a$, $y=b$, valutiamo dapprima l'ordine di grandezza di

$$\int_0^a\int_0^b\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^{\mu}\cdot|y-b|^{\nu}}\cos mx\cos ny\,dx\,dy,$$

che, col cambiamento di variabili $a-x=\frac{x'}{m}$, $b-y=\frac{y'}{n}$, diviene

$$\frac{1}{m^{1-\mu}n^{1-\nu}}\int_0^{ma}\int_0^{nb}\frac{\varphi\left(a-\frac{x}{m},\,b-\frac{y}{n}\right)}{x^{\mu}y^{\nu}}\cos(ma-x)\cos(nb-y)\,dx\,dy. \tag{12}$$

Sviluppato il prodotto $\cos(ma-x)\cos(nb-y)$, si spezzi l'integrale in quattro del tipo di

$$\frac{\cos ma\cos nb}{m^{1-\mu}n^{1-\nu}}\int_0^{ma}\int_0^{nb}\varphi\left(a-\frac{x}{m},\,b-\frac{y}{n}\right)\frac{\cos x}{x^{\mu}}\frac{\cos y}{y^{\nu}}\,dx\,dy.$$

La funzione $\varphi\left(a-\frac{x}{m},\,b-\frac{y}{n}\right)$ è in $(0,0;\,ma,nb)$ a variazione limitata secondo HARDY.

Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{nb}\varphi\left(a-\frac{x}{m},\,b-\frac{y}{n}\right)\frac{\cos y}{y^{\nu}}\,dy.$$

Si ha, qualunque siano m ed n,

$$\left|\int_0^{nb}\varphi\left(a-\frac{x}{m},\,b-\frac{y}{n}\right)\frac{\cos y}{y^{\nu}}\,dy\right|<K. \tag{13}$$

Infatti, essendo $\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)$ a variazione limitata rispetto ad y in $(0, nb)$ per ogni x, è

$$\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)=\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b\right)+\varphi_1\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)-\varphi_2\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)$$

con $\varphi_1\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)$, $\varphi_2\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)$ non negative e non decrescenti rispetto a y e tali ehe sia

$$\left|\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b\right)\right|<M_1, \qquad \varphi_1\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)<M_2, \qquad \varphi_2\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)<M_3.$$

Applicando all'integrale che figura nel primo membro della (13) il secondo Teorema della media e ricordando che $\int\limits_0^\infty \frac{\cos y}{y^\nu}\, dy$ è convergente, si ricava immediatamente la (13).

Inoltre

$$\int\limits_0^{nb} \varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-\frac{y}{n}\right)\frac{\cos y}{y^\nu}\, dy$$

è una funzione di x a variazione limitata in $(0, ma)$. Si consideri, infatti, una suddivisione arbitraria di $(0, ma)$, ottenuta con un numero pari di punti

$$0\equiv x_1<x_2<\ldots.<x_{2r}\equiv ma.$$

Posto

$$\Phi_{m,n,r}(y)=\Phi(y)=\sum_{s=1}^{s=r}\left\{\varphi\left(a-\frac{x_{2s-1}}{m}, b-\frac{y}{n}\right)-\varphi\left(a-\frac{x_{2s}}{m}, b-\frac{y}{n}\right)\right\}$$

per il lemma del § 5 basta provare che, per qualsiasi suddivisione del tipo indicato, è

$$\left|\int\limits_0^{nb}\Phi(y)\frac{\cos y}{y^\nu}\, dy\right|<H.$$

Mostriamo, in primo luogo, che $\Phi(y)$ è a variazione limitata in $(0, nb)$.

Per un'arbitraria suddivisione di $(0, nb)$ con un numero pari di punti

$$0\equiv y_1<y_2<\ldots.<y_{2t}\equiv nb,$$

si ha:

$$\begin{aligned}|\Phi(y_1)-\Phi(y_2)+\ldots.+\Phi(y_{2t-1})-\Phi(y_{2t})|&=\\ &=\left|\sum_{p=1}^{2r}\sum_{q=1}^{2t}(-1)^{p+q}\varphi\left(a-\frac{x_p}{m}, b-\frac{y_q}{n}\right)\right|<V\end{aligned}$$

qualunque siano m, n ed r, V essendo la variazione doppia di $\varphi(x, y)$ in Q.

Inoltre, per l'osservazione del § 5, la variazione totale di $\Phi(y)$ in $(0, nb)$ è, qualunque siano m, n ed r, non maggiore di $4V$.

Si può perciò scrivere

$$\Phi(y) = \Phi(nb) - \Phi_1(y) + \Phi_2(y)$$

con $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$ non negative e non crescenti; inoltre, intendendo che $\Phi_1(y)$ e $\Phi_2(y)$ rappresentino la variazione positiva e negativa di $\Phi(y)$ in (y, nb), si ha

$$\Phi_1(y) + \Phi_2(y) \leqslant 4V,$$

$$\Phi(nb) = \left| \varphi\left(a - \frac{x_1}{m}, 0\right) - \varphi\left(a - \frac{x_2}{m}, 0\right) + \dots + \right.$$
$$\left. + \varphi\left(a - \frac{x_{2r-1}}{m}, 0\right) - \varphi\left(a - \frac{x_{2r}}{m}, 0\right) \right| < H_1,$$

essendo $\varphi(x, 0)$ a variazione limitata e queste due disuguaglianze sussistono indipendentemente da m, n ed r.

Applicando ancora il secondo Teorema della media si ricava che è

$$\left| \int_0^{nb} \Phi(y) \frac{\cos y}{y^\nu} dy \right| < H$$

indipendentemente dalla suddivisione adoperata e da m ed n.

Perciò

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{nb} \varphi\left(a - \frac{x}{m}, b - \frac{y}{n}\right) \frac{\cos y}{y^\nu} dy \tag{14}$$

è in $(0, ma)$ una funzione a variazione limitata e, se si indica con $V_{m,n}$ la sua variazione totale in $(0, ma)$, è

$$V_{m,n} \leqslant 4H, \qquad |\psi_{m,n}(x)| < K \tag{15}$$

qualunque siano m ed n.

Consideriamo ora

$$\int_0^{ma}\int_0^{nb} \varphi\left(a - \frac{x}{m}, b - \frac{y}{n}\right) \frac{\cos x}{x^\mu} \frac{\cos y}{y^\nu} dx dy = \int_0^{ma} \psi_{m,n}(x) \frac{\cos x}{x^\mu} dx.$$

Spezzando al solito $\psi_{m,n}(x)$ nella differenza di due funzioni non negative e rappresentanti rispettivamente la variazione positiva e negativa di $\varphi_{m,n}(x)$ in $(0, mx)$, applicando il secondo Teorema della media e tenendo conto delle (15) si ottiene

$$\left| \int_0^{ma}\int_0^{nb} \varphi\left(a - \frac{x}{m}, b - \frac{y}{n}\right) \frac{\cos x}{x^\mu} \frac{\cos y}{y^\nu} dx dy \right| < M_1$$

qualunque siano m ed n.

Trattando nello stesso modo gli altri tre integrali in cui s'era scomposto (12), risulta

$$\left|\int_0^a\int_0^b \frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^\mu\cdot|y-b|^\nu}\cos mx\cos ny dx dy\right|<\frac{M_5}{m^{1-\mu}n^{1-\nu}},$$

e applicando lo stesso procedimento alle rimanenti tre parti in cui era stato suddiviso l'integrale al secondo membro della (11) si conclude che è

$$|a_{m,n}|<\frac{M}{m^{1-\mu}n^{1-\nu}} \qquad \text{c. v. d.} \quad (^{19}).$$

([19]) Il lemma del § 5 dà una nuova definizione di funzione di una variabile a variazione limitata, perfettamente equivalente a quella classica.

Estendendo formalmente la nuova definizione si ottiene una classe di funzioni, che indicherò con M, che contiene quella delle funzioni a variazione doppia finita, ma che non sembra coincidere con questa.

Definizione. - Dico che una funzione $f(x,y)$, definita in $R\equiv(a,c;\,b,d)$, appartiene alla classe M quando, per qualsiasi suddivisione $(x_1, x_2,\dots, x_{2m})$ dell'intervallo (a,b) dell'asse delle x mediante un numero pari di punti e per qualsiasi suddivisione $(y_1, y_2,\dots, y_{2n})$ dell'intervallo (c,d) dell'asse delle y pure mediante un numero pari di punti, si ha

$$\left|\sum_{p=1}^{2m}\sum_{q=1}^{2n}(-1)^{p+q}f(x_p,y_q)\right|<K \tag{16}$$

con K indipendente dalle suddivisioni.

Le funzioni appartenenti alla classe M godono della seguente proprietà, che per le funzioni a variazione doppia finita risulta subito dalla (1):

Se $f(x,y)$ appartiene alla classe M e se per un certo $\bar{y}$ $[\bar{x}]$ è $f(x,\bar{y})$ $[f(\bar{x},y)]$ a variazione limitata come funzione della sola x $[y]$, allora $f(x,y)$ è a variazione limitata come funzione della sola x $[y]$ per tutti gli y $[x]$ per cui è definita.

Sia infatti $(x_1, x_2,\dots, x_{2m})$ un'arbitraria suddivisione dell'intervallo sull'asse delle x mediante un numero pari di punti e $(\bar{y}, y)$ quella dell'intervallo sull'asse delle y.

Si ha per la (16)

$$\begin{aligned}|f(x_1,\bar{y})-f(x_2,\bar{y})+\dots+f(x_{2m-1},\bar{y})-f(x_{2m},\bar{y})-\\ -[f(x_1,y)-f(x_2,y)+\dots+f(x_{2m-1},y)-f(x_{2m},y)]|<K\end{aligned}$$

ed essendo per ogni suddivisione

$$|f(x_1,\bar{y})-f(x_2,\bar{y})+\dots+f(x_{2m-1},\bar{y})-f(x_{2m},\bar{y})|<K_1$$

è, qualunque sia la suddivisione,

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)+\dots+f(x_{2m1},y)-f(x_{2m},y)|<K+K_1,$$

da cui segue che $f(x,y)$ è per tutti gli y a variazione limitata come funzione della sola x.

Ho notato che le proprietà delle serie di FOURIER note per le funzioni a variazione doppia finita sussistono sistematicamente anche per le funzioni della classe M.

Un esempio di ciò è dato nel § 1 e dal teorema I del § 6, il quale sussiste anche se $\varphi(x,y)$ appartiene alla classe M e se $\varphi(x,0)$ e $\varphi(0,y)$ sono a variazione limitata come funzione di x e y in $(0, 2\pi)$.

2. - Un'altra estensione dello stesso teorema di DARBOUX è data dal

TEOREMA II. - *Se è*

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^{\mu}\cdot|y-b|^{\nu}} \quad \textit{con} \quad 0<\mu<1, \quad 0<\nu<1,$$

(a, b) in Q, e se $\varphi(x, y)$ è quasi-continua e a variazione limitata in Q e tale che le funzioni $\dfrac{V_{(y)}(a-x,\,2\pi)}{|x|^{\mu}}$, $\dfrac{V_{(x)}(2\pi,\,b-y)}{|y|^{\nu}}$

risultino integrabili, la prima rispetto ad x in $(a-2\pi, a)$ e la seconda rispetto ad y in $(b-2\pi, b)$, i coefficienti di Eulero-Fourier di $f(x,y)$ sono almeno dell'ordine di $\dfrac{1}{m^{1-\mu}+n^{1-\nu}}$.

Dimostriamo anzitutto che la $f(x, y)$ è integrabile in Q. Scelto infatti x_1 in $(0, 2\pi)$ in modo che $\dfrac{\varphi(x_1,y)}{|y-b|^{\nu}}$ sia integrabile rispetto ad y — basta prendere un x_1 tale che $\varphi(x_1, y)$ risulti a variazione limitata rispetto ad y — si ha per x in $(0, 2\pi)$

$$|\varphi(x,y)|\leqq|\varphi(x_1,y)|+V_{(x)}(2\pi,y)$$

onde

$$\frac{|\varphi(x,y)|}{|x-a|^{\mu}}\leqq\frac{|\varphi(x_1,y)|}{|x-a|^{\mu}}+\frac{V_{(x)}(2\pi,y)}{|x-a|^{\mu}}$$

e poichè il secondo membro risulta integrabile rispetto ad x in $(0, 2\pi)$, tale è anche il primo e si ha

$$\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(x,y)|}{|x-a|^{\mu}}\,dx\leqq|\varphi(x_1,y)|\int_0^{2\pi}\frac{dx}{|x-a|^{\mu}}+V_{(x)}(2\pi,y)\int_0^{2\pi}\frac{dx}{|x-a|^{\mu}},$$

$$\frac{1}{|y-b|^{\nu}}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^{\mu}}\,dx\leqq\frac{|\varphi(x_1,y)|}{|y-b|^{\nu}}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{|x-a|^{\mu}}+\frac{V_{(x)}(2\pi,y)}{|y-b|^{\nu}}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{|x-a|^{\mu}}$$

e poichè il secondo membro risulta integrabile rispetto ad y in $(0, 2\pi)$ tale è anche il primo e perciò per un teorema del TONELLI ([20])

$$\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^{\mu}\cdot|y-b|^{\nu}}$$

risulta superficialmente integrabile sul campo Q.

Consideriamo ora uno qualunque dei coefficienti di EULERO-FOURIER di $f(x, y)$, ad esempio

$$a_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^{\mu}\cdot|y-b|^{\nu}}\cos mx\cos ny\,dx\,dy. \tag{17}$$

([20]) L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti*, Rend. R. Accad. Lincei, Vol. XVIII, 1909, pp. 246-253.

Come nel precedente teorema suddividiamo Q in quattro parti mediante le parallele agli assi $x=a$, $y=b$ e valutiamo dapprima l'ordine di grandezza di

$$\int_0^a\int_0^b \frac{\varphi(x, y)}{|x-a|^{\mu}\cdot|y-b|^{\nu}} \cos mx \cos ny\,dx\,dy,$$

che, col cambiamento di variabili $a-x=\frac{x'}{m}$, $b-y=y'$, diviene

$$\frac{1}{m^{1-\mu}}\int_0^{ma}\int_{b-2\pi}^{b} \frac{\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)}{x^{\mu}|y|^{\nu}} \cos(ma-x)\cos n(b-y)\,dx\,dy. \tag{18}$$

Sviluppato il prodotto $\cos(ma-x)\cos n(b-y)$, si spezzi l'integrale in quattro del tipo di

$$\frac{\cos ma\cos nb}{m^{1-\mu}}\int_0^{ma}\int_{b-2\pi}^{b} \frac{\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)}{x^{\mu}|y|^{\nu}} \cos x\cos ny\,dx\,dy. \tag{19}$$

Consideriamo

$$\int_0^{ma} \varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)\frac{\cos x}{x^{\mu}}\,dx.$$

Scelto a' con $a\leqslant a'\leqslant 2\pi$ [21] tale che $\varphi(a', b-y)$ sia a variazione limitata per y in $(b-2\pi, b)$, si può per quasi tutti gli y porre

$$\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)=\varphi(a', b-y)+\varphi_1\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)-\varphi_2\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)$$

con $\varphi_1\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)$ e $\varphi_2\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)$ non negative e non decrescenti rispetto a x per x in $(-m(a'-a), ma)$ [e quindi a maggior ragione per x in $(0, ma)$] e rappresentanti rispettivamente la variazione positiva e negativa di $\varphi\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)$ come funzioni della sola x in $(-m(a'-a), x)$; si ha perciò

$$\varphi_1\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)+\varphi_2\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)\leqslant V_{(x)}(a', b-y)\leqslant V_{(x)}(2\pi, b-y). \tag{20}$$

---

[21] Se è $a=2\pi$ e $\varphi(2\pi, y)$ non è a variazione limitata si può definire, per x in $(2\pi, 4\pi)$ $\varphi(x, y)=\varphi(4\pi-x, y)$ e scegliere a' in $(2\pi, 4\pi)$ in guisa che $\varphi(a' y)$ sia a variazione limitata. In questo caso al posto della (20) si ha la disuguaglianza

$$\varphi_1\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)+\varphi_2\left(a-\frac{x}{m}, b-y\right)\leqslant V_{(x)}(a', b-y)\leqslant 2\,V_{(x)}(2\pi, b-y)$$

e la dimostrazione risulta analoga a quella considerata nel testo.

Applicando il secondo Teorema della media e ricordando al solito che $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\,dx$ è convergente si ottiene:

$$\frac{1}{|y|^\nu}\left|\int\limits_0^{ma}\varphi\left(a-\frac{x}{m},\ b-y\right)\frac{\cos x}{x^\mu}\,dx\right| < A\cdot\frac{|\varphi(a',b-y)|+V_{(x)}(2\pi,b-y)}{|y|^\nu}$$

con $A>0$ costante indipendente da m. Essendo $\varphi(a', b-y)$ a variazione limitata e per le ipotesi fatte il secondo membro della precedente disuguaglianza è integrabile rispetto ad y in $(b-2\pi, b)$. Dalle (19) e (20) si ottiene quindi

$$\left|\frac{\cos ma\cos nb}{m^{1-\mu}}\int\limits_0^{ma}\int\limits_{b-2\mu}^{b}\varphi\left(a-\frac{x}{m},\ b-y\right)\frac{\cos x}{x^\mu}\frac{\cos ny}{|y|^\nu}\,dxdy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{m^{1-\mu}}\int\limits_{b-2\mu}^{b}\frac{1}{|y|^\nu}\left|\int\limits_0^{ma}\varphi\left(a-\frac{x}{m},\ b-y\right)\frac{\cos x}{x^\mu}\,dx\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{m^{1-\mu}}\int\limits_{b-2\pi}^{b}\frac{|\varphi(a',b-y)|+V_{(x)}(2\pi,b-y)}{|y|^\nu}\,dy=\frac{K_1}{m^{1-\mu}}.$$

Trattando nello stesso modo gli integrali analoghi a (19) in cui s'era scomposto (18) otteniamo che è

$$\left|\int\limits_0^a\int\limits_0^b\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^\mu\cdot|y-b|^\nu}\cos mx\cos ny\,dxdy\right|<\frac{K_2}{m^{1-\mu}},$$

e applicando lo stesso procedimento agli altri tre integrali, analoghi a questo, in cui s'era suddiviso quello al secondo membro della (17) risulta che $a_{m,n}$ è in valore assoluto $<\frac{K_3}{m^{1-\mu}}$. Analogamente si prova che è $|a_{m,n}|<\frac{K_4}{n^{1-\nu}}$.

Si conclude quindi che è

$$|a_{m,n}|<\frac{K}{m^{1-\mu}+n^{1-\nu}}$$

e il teorema è dimostrato.

Come corollario si ha: *Se è*

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{|x-a|^\mu\cdot|y-b|^\nu}$$

con $0<\mu<1$, $0<\nu<1$, (a,b) *in* Q *e se* $\varphi(x,y)$ *è quasi continua e tale che per essa sia* $V_{(x)}(2\pi,y)<L$, $V_{(y)}(x,2\pi)<L$ *rispettivamente per tutti gli* y *e* x *di* $(0,2\pi)$, *i coefficienti di Eulero-Fourier di* $f(x,y)$ *sono almeno dell'ordine di* $\frac{1}{m^{1-\mu}+n^{1-\nu}}$.

Infatti in questo caso è

$$\frac{V_{(y)}(a-x,\, 2\pi)}{|x|^{\mu}} < \frac{L}{|x|^{\mu}}, \qquad \frac{V_{(x)}(2\pi,\, b-y)}{|y|^{\nu}} < \frac{L}{|y|^{\nu}}$$

che risultano integrabili.

§ 7.

Come avviene per una variabile i precedenti teoremi si possono estendere supponendo l'esistenza delle derivate parziali della $f(x, y)$ fino a un certo ordine e che queste derivate soddisfino alle condizioni già date per la funzione.