ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di calcolo delle variazioni di ordine *n*

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 3-4 (1937), p. 191-209

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_3-4_191_0>

NUOVI TEOREMI DI ESISTENZA DELL'ESTREMO IN CAMPI ILLIMITATI PER I PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI DI ORDINE n. (*)

di SILVIO CINQUINI (Pisa).

In un recente lavoro [1] ho cominciato ad estendere il metodo diretto, fondato dal TONELLI e basato sul concetto di semicontinuità [2], allo studio dei problemi variazionali di ordine n in forma ordinaria, in cui cioè si tratta di trovare, fra le curve $C^{[n]}: y=y(x)$, $(a \leq x \leq b)$, con $y(x)$ assolutamente continua insieme con le proprie derivate dei primi $n-1$ ordini $y'(x)$, $y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$, e per le quali esiste finito l'integrale (del LEBESGUE)

$$I_{C^{[n]}}^{[n]}=\int_a^b f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\, dx,$$

quelle che rendono minimo tale integrale.

Nel citato lavoro ho dato, dapprima, alcuni teoremi di esistenza del minimo, supponendo che il campo $A^{[n]}$, in cui possono variare le x, $y(x)$, $y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$, sia limitato e successivamente, giovandomi di tali risultati, un teorema generale, i cui corollari sono particolarmente interessanti, il quale stabilisce, sotto opportune condizioni, l'esistenza del minimo nel caso in cui il campo $A^{[n]}$ sia illimitato, in ogni classe $K^{[n]}$, completa di ordine n, di curve $C^{[n]}$, sotto l'ipotesi che, per ogni curva della classe $K^{[n]}$ vi sia almeno un punto $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, appartenente ad un dato insieme chiuso e limitato.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[1] S. CINQUINI: *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. V, (1936), pp. 169-190). Tale lavoro verrà indicato nel seguito con *Memoria* (I). - Per altri risultati sullo stesso argomento vedi il Vol. VI, (1937) dei citati Annali, e i TT. XV (1936) e XVI (1937) degli Annali di Matematica pura e applicata.

[2] L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Due volumi (N. Zanichelli, Bologna, 1921-1923).

Vedi anche, L. TONELLI: *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. III, (1934), pp. 401-450).

A prima vista potrebbe sembrare che non ci si possa giovare del teorema ora citato, per stabilire l'esistenza del minimo in quelle classi $K^{[n]}$, per le quali non si suppone, in modo esplicito, che sia verificata quest' ultima ipotesi.

Invece tale teorema presenta una larga applicabilità, che i risultati del presente lavoro mettono bene in evidenza, perchè con semplici considerazioni si stabiliscono, sotto ipotesi molto generali, numerosi teoremi di esistenza del minimo in campi illimitati, valevoli per classi $K^{[n]}$, per le quali non è verificata l'ipotesi sopra ricordata; e queste proposizioni discendono, in ultima analisi, dal citato teorema, perchè dalle loro dimostrazioni risulta che la condizione che figura in tale teorema è verificata, se non proprio per l'intera classe $K^{[n]}$, almeno per una sua sottoclasse $K_0^{[n]}$, la quale gode della proprietà che il minimo di $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ in $K^{[n]}$ coincide con il minimo dello stesso integrale in $K_0^{[n]}$.

In una comunicazione, fatta al Congresso di Matematica di Firenze (3), ho dato un semplice esempio che illumina completamente le precedenti considerazioni ed ho enunciato alcuni dei risultati che figurano nel § 2 della presente Memoria, nella quale mi propongo di studiare in modo sistematico i numerosi casi che si possono presentare al variare, sia delle ipotesi che si fanno sulla funzione $f(x, y, y', ..., y^{(n)})$, sia delle condizioni a cui soddisfano le curve delle classi considerate.

Richiamato nel § 1 il citato teorema generale, nella sua forma originale, ed anche in una forma un po' più vasta, si suppone, in tutta la parte rimanente della presente Memoria, che i valori che la x può assumere, nei punti $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ del campo illimitato $A^{[n]}$, appartengano ad un intervallo limitato.

All'inizio del § 2, in tutto il quale si mantengono invariate le ipotesi sulla funzione f (analoghe a quelle del primo teorema della Memoria (I)), si dà un primo teorema che stabilisce l'esistenza del minimo in ogni classe $K^{[n]}$, tale che, per ogni sua curva $y=y(x)$, esista almeno una n-pla di valori (distinti o no), appartenenti al rispettivo intervallo di definizione e per i quali rispettivamente la $y(x)$ e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini si mantengano, in modulo, ugualmente limitate. In termini concisi, diremo che queste sono n condizioni rispettivamente degli ordini 0, 1, 2,...., $n-1$, perchè sono espresse per mezzo della $y(x)$ e delle sue derivate dei primi $n-1$ ordini.

Da questo risultato, facendo uso del noto teorema del valor medio e di alcune sue generalizzazioni, si deducono numerose altre proposizioni dalle quali risulta, che, *con opportune limitazioni*, ad ognuna delle condizioni di ordine $\geqslant 1$, se ne può sostituire una di ordine minore. In particolare le n condizioni possono essere tutte di ordine zero; cioè basta supporre che per ogni curva della classe considerata vi siano n valori della x, a due a due distinti (e che, con un opportuna limitazione, possono anche essere variabili al variare della curva nella classe consi-

(3) In corso di stampa negli Atti del Congresso Nazionale di Matematica di Firenze.

derata) e per i quali le $y(x)$ si mantengono ugualmente limitate: questa condizione è *sempre* verificata nel notevole caso particolare in cui, pur essendo il campo $A^{[n]}$ illimitato, i valori, che la y può assumere nei punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, sono contenuti in un intervallo limitato.

Nel § 3 si estendono tutti i precedenti risultati al caso in cui la funzione f soddisfi a ipotesi più generali. Si mette in rilievo, innanzi tutto, che le condizioni del § 2 equivalgono all'essere la funzione f inferiormente limitata in $A^{[n]}$ e tale che, per $|y^{(n)}| \to \infty$, sia $|f : y^{(n)}| \to \infty$, uniformemente in tutto $A^{[n]}$, e si danno altre proposizioni valide nel caso in cui la funzione f soddisfi, in ogni campo limitato tutto costituito di punti di $A^{[n]}$, alle ipotesi di almeno uno dei teoremi del § 2 della Memoria (I), e ad altre opportune limitazioni; ne risulta così che si possono anche eliminare entrambe le precedenti ipotesi.

Il lavoro termina con il § 4 in cui si dà un nuovo teorema generale, dal quale può nuovamente dedursi la maggior parte dei risultati sopra indicati.

La presente Memoria ha avuto origine da una conversazione che io ebbi con il prof. G. SANSONE, che qui tengo a ringraziare vivamente.

§ 1.

1. - Teorema generale.

α). Per tutte le generalità rinviamo alla Memoria (I), limitandoci a richiamare il teorema dato al n.° 10 di tale lavoro:

Se: a) scelto comunque un qualsiasi insieme limitato e chiuso $A_1^{[n]}$ del campo $A^{[n]}$, il valore dell'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$, relativo ad una qualunque curva $C^{[n]}$: $y=y(x)$, per la quale almeno un punto $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ appartenga ad $A_1^{[n]}$, tende sempre a $+\infty$, col tendere all'infinito del massimo della somma $x^2+[y(x)]^2+[y'(x)]^2+\ldots+[y^{(n-1)}(x)]^2$; b) in tutto il campo $A^{[n]}$ sono verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi di esistenza del § 2 della Memoria (I), *allora in ogni classe, completa di ordine n, di curve $C^{[n]}$, per ognuna delle quali almeno un punto $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ appartenga ad un dato insieme, chiuso e limitato, esiste sempre il minimo assoluto di $I_{C^{[n]}}^{[n]}$.*

β). Osserviamo che il teorema ora ricordato continua a sussistere anche nella forma più generale che si ottiene, sostituendo alla condizione a) del suo enunciato la seguente:

b') in ogni campo limitato (e chiuso) $A_L^{[n]}$, tutto costituito di punti di $A^{[n]}$, sono verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi di esistenza del § 2 della Memoria (I).

§ 2.

2. - Teorema I.

Se: a) esiste un numero finito $h>0$, *tale che, in tutti i punti di* $A^{[n]}$, *sia* $-h\leqslant x\leqslant h$; *b) l' integrale* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *è quasi-regolare positivo*; *c) esiste una funzione* $\Phi(z)$, *definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata, tale che* $\Phi(z):z\rightarrow+\infty$, *per* $z\rightarrow+\infty$, *e per la quale si abbia in tutto il campo* $A^{[n]}$,

$$f(x, y, y',\dots, y^{(n)})\geqslant\Phi(|y^{(n)}|);$$

d) $K^{[n]}$ *è una classe, completa di ordine n, di curve* $C^{[n]}$: $y=y(x)$, *per ognuna delle quali esiste almeno una n-pla di valori* x_j, $(j=0, 1, 2,\dots, n-1)$, *(distinti o no), appartenenti al rispettivo intervallo di definizione, i quali possono anche essere variabili al variare di* $C^{[n]}$ *nella classe* $K^{[n]}$, *e per i quali sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze*

$$|y^{(j)}(x_j)|\leqslant L, \qquad (j=0, 1, 2,\dots, n-1;\ y^{(0)}\equiv y),$$

con L numero fisso dipendente soltanto dalla classe considerata; allora nella classe $K^{[n]}$ *esiste il minimo assoluto di* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$.

Infatti, indicato con Φ_0 il limite inferiore di $\Phi(z)$ in $(0, +\infty)$, abbiamo per ogni curva $C^{[n]}$ della classe $K^{[n]}$

$$I^{[n]}_{C^{[n]}}\geqslant\int_{C^{[n]}}\Phi(|y^{(n)}|)dx\geqslant-2h|\Phi_0|,$$

e quindi il limite inferiore i di $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ in $K^{[n]}$ risulta finito.

Osserviamo ora che il minimo di $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ nella classe $K^{[n]}$ coincide con il minimo dello stesso integrale nella sottoclasse $K_1^{[n]}$, costituita da quelle curve di $K^{[n]}$ per le quali è

$$I^{[n]}_{C^{[n]}}\leqslant i+1,$$

e pertanto basta limitarsi alla considerazione della classe $K_1^{[n]}$, la quale è pure completa di ordine n.

Ripetendo un ragionamento del TONELLI, del quale già ci siamo giovati nella Memoria (I) ([4]), si prova che le derivate di ordine $n-1$ delle funzioni $y(x)$, che definiscono le curve di $K_1^{[n]}$, costituiscono un insieme di funzioni equiassolutamente continue, e quindi anche ugualmente limitate in virtù della ipotesi a), e della disuguaglianza, che figura in d), per $j=n-1$.

([4]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. per ultimo in ([2]), n.° 9, pp. 415-416; ed anche S. CINQUINI, Memoria (I), n.° 4, p. 175.

Perciò le derivate di ordine $n-2$ delle $y(x)$ costituiscono esse pure un insieme di funzioni equiassolutamente continue e quindi anche ugualmente limitate, in virtù dell'ipotesi a), e della disuguaglianza, che figura in d), per $j=n-2$. Così proseguendo si conclude che ogni punto $(x, y(x), y'(x),...., y^{(n-1)}(x))$ relativo ad una curva di $K_1^{[n]}$ appartiene ad un campo limitato, e basta quindi applicare il teorema del n.° 4 della Memoria (I).

3. - Corollario I.

α). *La condizione d) del n.° 2 è soddisfatta se, indicato con* (a_0, b_0) *l'intervallo comune a tutti gli intervalli di definizione delle curve della classe* $K^{[n]}$, *completa di ordine n, esiste un numero finito* $L_1>0$ *ed una n-pla di valori* x_j, $(j=0, 1, 2,...., n-1)$, *a due a due distinti, appartenenti all'intervallo* (a_0, b_0) *e tali che, qualunque sia la curva* $C^{[n]}: y=y(x)$ *di* $K^{[n]}$, *risulti*

$$|y(x_j)| \leq L_1, \qquad (j=0, 1, 2,...., n-1).$$

Infatti per una nota formula di Calcolo Differenziale ([5]), risulta per ogni intero s, positivo e $\leq n-1$,

$$\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & .... & 1 \\ x_0 & x_1 & .... & x_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^{s-1} & x_1^{s-1} & .... & x_s^{s-1} \\ y(x_0) & y(x_1) & .... & y(x_s) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & .... & 1 \\ x_0 & x_1 & .... & x_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^s & x_1^s & .... & x_s^s \end{vmatrix} \right\} = \frac{y^{(s)}(\xi_s)}{s!}, \tag{1}$$

ove ξ_s è un valore, che può variare al variare della curva $C^{[n]}$ in $K^{[n]}$, ma che è sempre interno al minimo intervallo che contiene gli $s+1$ valori $x_0, x_1,...., x_s$, e quindi anche all'intervallo (a_0, b_0).

Siccome questi valori sono, per ipotesi, a due a due distinti, il loro determinante di VANDERMONDE, ha un valore fisso, diverso dallo zero; e inoltre l'altro determinante che figura al primo membro della (1) non può superare un numero fisso, dipendente soltanto da L_1.

Facendo ora successivamente $s=1, 2,...., n-1$, si conclude che per ciascuna curva di $K^{[n]}$ esiste almeno una n-pla di valori $x_0, \xi_1, \xi_2,...., \xi_{n-1}$, per i quali è soddisfatta la condizione d) del n.° 2.

β). *Un notevole caso particolare, in cui la condizione che figura nell'* a) *del presente numero è sempre verificata, è quello in cui i valori che la y può assumere nei punti* $(x, y, y',...., y^{(n-1)})$ *del campo* $A^{[n]}$ *sono contenuti in un intervallo limitato.*

γ). La condizione data nell' a) del presente numero richiede che i valori $x_0, x_1,...., x_{n-1}$ siano fissi al variare della curva $C^{[n]}$ nella classe $K^{[n]}$; nel caso che

([5]) Vedi, per esempio, G. PEANO: *Lezioni di Analisi Infinitesimale.* (Candeletti, Torino, 1893); Vol. I, § 78, pp. 107-108.

essi possano anche essere variabili riesce utile la seguente condizione che generalizza quella data in α):

La condizione d) del n.° 2 è soddisfatta, se esiste un numero finito $L_2>0$, *in modo che, in corrispondenza ad ogni curva* $C^{[n]}: y=y(x)$, $(a\leq x\leq b)$ *della classe* $K^{[n]}$, *completa di ordine n, esista almeno una n-pla di valori* x_j, $(j=0,1,2,\ldots, n-1)$, *a due a due distinti, e appartenenti all'intervallo* (a, b), *e per i quali sono soddisfatte le seguenti proprietà: per almeno uno degli* x_j *è verificata la disuguaglianza*

$$(2) \qquad |y(x_j)|\leq L_2,$$

e inoltre per ogni numero intero s, >1 *e* $\leq n-1$, *vi è almeno una s-pla di valori* x_j, *che indicheremo con* $x_{j_1}, x_{j_2},\ldots, x_{j_s}$, *e per la quale è verificata la disuguaglianza*

$$(3) \qquad \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{j_1} & x_{j_2} & \ldots & x_{j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{j_1}^{s-2} & x_{j_2}^{s-2} & \ldots & x_{j_s}^{s-2} \\ y(x_{j_1}) & y(x_{j_2}) & \ldots & y(x_{j_s}) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{j_1} & x_{j_2} & \ldots & x_{j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{j_1}^{s-1} & x_{j_2}^{s-1} & \ldots & x_{j_s}^{s-1} \end{vmatrix} \right\| \leq L_2.$$

Infatti, dalla formula di cui abbiamo fatto uso nell'α) del presente numero, segue che per ogni curva $C^{[n]}$ di $K^{[n]}$ esiste almeno una $(n-1)$-pla di valori ξ_1, $\xi_2,\ldots, \xi_{n-1}$, appartenenti all'intervallo (a, b), e per i quali risulta

$$\frac{|y^{(s)}(\xi_s)|}{s!}\leq L_2, \qquad (s=1, 2,\ldots, n-1);$$

e quindi, tenuta presente anche la (2), si conclude che è soddisfatta la condizione d) del n.° 2.

δ). *Un notevole caso particolare in cui, pur essendo i valori* x_j, $(j=0,1,2,\ldots, n-1)$ *variabili al variare della curva* $C^{[n]}$ *in* $K^{[n]}$, *la condizione data in* γ) *è sicuramente soddisfatta, è quello in cui la* (2) *è verificata per tutti i valori di j, e inoltre i moduli di tutte le differenze*

$$x_{s_1}-x_{s_2},$$
$$(s_1, s_2=0,1,2,\ldots, n-1;\ con\ s_1\neq s_2),$$

hanno, al variare della curva $C^{[n]}$ *in* $K^{[n]}$, *un limite inferiore positivo.*

Infatti in tal caso il determinante che figura al numeratore del primo membro della (3) non può superare un numero fisso, che dipende soltanto da L_2, e il determinante che figura al denominatore non può diventare inferiore, in modulo, ad un numero fisso positivo.

4. - Corollario II.

La condizione d) del n.º 2 è soddisfatta se, indicato con (a_0, b_0) *l'intervallo comune a tutti gli intervalli di definizione delle curve della classe* $K^{[n]}$*, completa di ordine n, esistono*: 1°) *un numero finito* $L_1 > 0$; 2°) $p+1$ *valori* $x_0, x_1, \ldots, x_p$, (*con* $p+1 \leqslant n$), *a due a due distinti, appartenenti all'intervallo* (a_0, b_0), *e tali che, a partire da* x_2, *ognuno di essi sia sempre esterno al minimo intervallo che contiene tutti i precedenti*; 3°) $p+1$ *numeri interi non negativi* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$, *tali che sia*

$$\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_p + p + 1 = n;$$

4°) $p+1$ *numeri interi non negativi*

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_p,$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \ldots \beta_{j-1} + j, \end{array} \right. \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

in modo che, qualunque sia la curva $y = y(x)$ *della classe* $K^{[n]}$*, risulti*

$$| y^{(\alpha_s + i)}(x_s) | \leqslant L_1,$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, p; \ i = 0, 1, 2, \ldots, \beta_s; \ y^{(0)} \equiv y).$$

Per provare l'asserto basta dimostrare che, per ogni curva $C^{[n]}$ di $K^{[n]}$, esiste almeno una n-pla di valori $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, i quali possono variare al variare della curva $C^{[n]}$ in $K^{[n]}$, ma appartengono sempre all'intervallo (a_0, b_0), e per i quali risulta

$$| y^{(j)}(\xi_j) | \leqslant L, \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots n-1), \tag{5}$$

con L numero finito indipendente dalla curva considerata.

Per $j = \alpha_s + i$, $(s = 0, 1, 2, \ldots, p; \ i = 0, 1, 2, \ldots, \beta_s)$ il nostro asserto è già provato.

In caso contrario basta far uso di un'opportuna estensione della formula usata al n.º 3 ([6]).

5. - Un notevole caso particolare del Corollario II.

a). Se è

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0,$$

i valori $x_0, x_1, \ldots, x_p$, possono essere comunque distribuiti sull'intervallo (a_0, b_0), purchè siano a due a due distinti, e la condizione del n.º 4 assume la forma seguente:

([6]) *Sia* $f(x)$ *una funzione definita e continua, insieme con le proprie derivate dei primi* μ *ordini, nell'intervallo* (a, b), *sia* $\varphi_i(x) \equiv x^i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, \mu)$, *e siano* $x_0, x_1, \ldots, x_\omega$, $\omega + 1$ *valori*, (*con* $\omega \leqslant \mu$), *a due a due distinti, appartenenti ad* (a, b) *e tali che, a partire da* x_2, *ognuno di essi sia sempre esterno al minimo intervallo che contiene tutti i*

La condizione d) del n.° 2 è soddisfatta, se, indicato con (a_0, b_0) l'intervallo comune a tutti gli intervalli di definizione delle curve della classe $K^{[n]}$, completa di ordine n, esiste un numero finito $L > 0$, t valori, a due a due

---

precedenti. Allora, se $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\omega$ sono $\omega+1$ numeri interi non negativi, tali che sia $\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_\omega+\omega=\mu$, e se $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\omega$ sono $\omega+1$ numeri interi non negativi, tali che sia

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_\omega,$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0, \\ \alpha_r \leqslant \beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{r-1}+r, \end{cases} \qquad (r=1, 2, \ldots, \omega)$$

esiste almeno un valore ξ, interno al minimo intervallo che contiene gli $\omega+1$ valori x_0, $x_1, \ldots, x_\omega$ e per il quale risulta

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\alpha_0)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0)}(x_0) & \ldots & \varphi_{\mu-1}^{(\alpha_0)}(x_0) & f^{(\alpha_0)}(x_0) \\ \varphi_0^{(\alpha_0+1)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0+1)}(x_0) & \ldots & \varphi_{\mu-1}^{(\alpha_0+1)}(x_0) & f^{(\alpha_0+1)}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_0+\beta_0)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0+\beta_0)}(x_0) & \ldots & \varphi_{\mu-1}^{(\alpha_0+\beta_0)}(x_0) & f^{(\alpha_0+\beta_0)}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_\omega)}(x_\omega) & \varphi_1^{(\alpha_\omega)}(x_\omega) & \ldots & \varphi_{\mu-1}^{(\alpha_\omega)}(x_\omega) & f^{(\alpha_\omega)}(x_\omega) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_\omega+\beta_\omega)}(x_\omega) & \varphi_1^{(\alpha_\omega+\beta_\omega)}(x_\omega) & \ldots & \varphi_{\mu-1}^{(\alpha_\omega+\beta_\omega)}(x_\omega) & f^{(\alpha_\omega+\beta_\omega)}(x_\omega) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\alpha_0)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0)}(x_0) & \ldots & \varphi_{\mu}^{(\alpha_0)}(x_0) \\ \varphi_0^{(\alpha_0+1)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0+1)}(x_0) & \ldots & \varphi_{\mu}^{(\alpha_0+1)}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_0+\beta_0)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0+\beta_0)}(x_0) & \ldots & \varphi_{\mu}^{(\alpha_0+\beta_0)}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_\omega)}(x_\omega) & \varphi_1^{(\alpha_\omega)}(x_\omega) & \ldots & \varphi_{\mu}^{(\alpha_\omega)}(x_\omega) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_\omega+\beta_\omega)}(x_\omega) & \varphi_1^{(\alpha_\omega+\beta_\omega)}(x_\omega) & \ldots & \varphi_{\mu}^{(\alpha_\omega+\beta_\omega)}(x_\omega) \end{vmatrix} \frac{f^{(\mu)}(\xi)}{\mu!}.$$

Inoltre il determinante che figura al secondo membro della (I) *è sempre diverso dallo zero.*

La dimostrazione si deduce, con opportune generalizzazioni, da quella della formula citata in (5).

Per provare le (5) si faccia $\mu=j$, tenendo presente che, se j è minore del massimo delle somme $\alpha_s+\beta_s$, $(s=0, 1, 2, \ldots, p)$, nel determinante che figura al primo membro della (I) non dovranno comparire derivate della $y(x)$ di ordine $\geqslant j$, e che, inoltre, in ogni caso tale determinante dovrà essere formato in modo che siano verificate le condizioni ora indicate, ciò che è sempre possibile in virtù delle ipotesi fatte nel presente numero.

distinti, $x_1, x_2, \ldots, x_t$, *(con* $t \leqslant n$*), appartenenti all'intervallo* (a_0, b_0) *e* t *numeri interi non negativi* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$, *con*

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_t + t = n,$$

per i quali, qualunque sia la curva $y = y(x)$ *della classe* $K^{[n]}$, *siano verificate le* n *disuguaglianze*

$$|y^{(q)}(x_i)| \leqslant L,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, t;\ q = 0, 1, 2, \ldots, \gamma_i;\ y^{(0)} \equiv y).$$

Ciò è conseguenza immediata del fatto che si può applicare, in luogo della formula indicata in ([6]), un suo caso particolare ([7]).

β). Più particolarmente ancora, può essere $t = 2$; $\gamma_1 + \gamma_2 + 2 = n$, e la classe $K^{[n]}$ può essere costituita dalle curve che congiungono i due punti (x_1, y_1), (x_2, y_2), nei quali sono fissati anche i valori delle derivate dei primi γ_1 ordini e dei primi γ_2 ordini rispettivamente.

6. - Altri casi particolari del Corollario II.

α). Un altro interessante caso particolare del Corollario II è quello in cui è

$$\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0.$$

([7]) *Sia* $f(x)$ *una funzione definita e continua, insieme con le proprie derivate dei primi* μ *ordini, nell'intervallo* (a, b), *siano* $x_1, x_2, \ldots, x_t$, t *valori (con* $t \leqslant \mu + 1$*) a due a due distinti, appartenenti all'intervallo* (a, b), *e siano* $s_1, s_2, \ldots, s_t$, t *numeri interi non negativi tali che sia*

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_t + t = \mu + 1.$$

Esiste allora almeno un valore ξ, *interno al minimo intervallo, contenente i valori* x_1, $x_2, \ldots, x_t$, *e per il quale si ha*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{\mu-1} & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 \ldots & (\mu-1)x_1^{\mu-2} & f'(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \dfrac{(\mu-1)!}{(\mu-s_1-1)!}x_1^{\mu-s_1-1} & f^{(s_1)}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_t & x_t^2 \ldots & x_t^{\mu-1} & f(x_t) \\ 0 & 1 & 2x_t \ldots & (\mu-1)x_t^{\mu-2} & f'(x_t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \dfrac{(\mu-1)!}{(\mu-s_t-1)!}x_t^{\mu-s_t-1} & f^{(s_t)}(x_t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{\mu} \\ 0 & 1 & 2x_1 \ldots & \mu x_1^{\mu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \dfrac{\mu!}{(\mu-s_1)!}x_1^{\mu-s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_t & x_t^2 \ldots & x_t^{\mu} \\ 0 & 1 & 2x_t \ldots & \mu x_t^{\mu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \dfrac{\mu!}{(\mu-s_t)!}x_t^{\mu-s_t} \end{vmatrix} \dfrac{f^{(\mu)}(\xi)}{\mu!}.$$

In tal caso risulta necessariamente $p+1=n$, e la condizione del n.° 4 assume la forma seguente:

La condizione d) del n.° 2 è soddisfatta, se, indicato con (a_0, b_0) *l'intervallo comune a tutti gli intervalli di definizione delle curve della classe* $K^{[n]}$, *completa di ordine n, esistono*: 1°) *un numero finito* $L_1>0$; 2°) *una n-pla di valori* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, *a due a due distinti, appartenenti ad* (a_0, b_0) *e tali che, a partire da* x_2, *ognuno di essi sia sempre esterno al minimo intervallo contenente tutti i precedenti*; 3°) *n numeri interi non negativi*

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n-1},$$

con

$$\alpha_0=0,$$
$$\alpha_j \leqslant j, \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1)$$

in modo che, qualunque sia la curva $y=y(x)$ *della classe* $K^{[n]}$, *risulti*

$$|y^{(\alpha_j)}(x_j)| \leqslant L_1, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)}\equiv y).$$

OSSERVAZIONE I. - *Se per* $j=k$, (*con* $k>0$), *è* $\alpha_k=k$, *è sufficiente che la condizione* 2°) *sia verificata, separatamente, per ciascuno dei due gruppi di valori,* $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$; $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$.

Ciò è conseguenza immediata del fatto che, secondo che è $j<k$, o $j>k$, nella formula, di cui si fa uso nella dimostrazione del n.° 4, possono figurare rispettivamente, o soltanto i valori del primo gruppo, o soltanto quelli del secondo gruppo ([8]).

OSSERVAZIONE II. - L'osservazione precedente è suscettibile di un'evidente estensione nel caso in cui l'uguaglianza $\alpha_j=j$ abbia luogo per due o più valori positivi di j.

β). *Un caso anche più particolare si ha quando è*:

$$\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_{m_0};\quad \alpha_{m_0+1}=\alpha_{m_0+2}=\ldots=\alpha_{m_1};\quad \ldots\ldots;\quad \alpha_{m_{s-1}+1}=\alpha_{m_{s-1}+2}=\ldots=\alpha_{n-1},$$

con

$$0\leqslant m_0<m_1<\ldots<m_{s-1}<n-1,$$

e sono verificate le s uguaglianze

$$\alpha_{m_j+1}=m_j+1, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, s-1).$$

Allora i valori $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ *possono essere comunque distribuiti sull'intervallo* (a_0, b_0), *purchè ciascuno degli* $s+1$ *gruppi,*

$$x_0, x_1, \ldots, x_{m_0};\quad x_{m_0+1}, x_{m_0+2}, \ldots, x_{m_1};\quad \ldots\ldots;\quad x_{m_{s-1}+1}, x_{m_{s-1}+2}, \ldots, x_{n-1},$$

sia costituito di valori a due a due distinti.

([8]) Inquantochè, per $j>k$, basterà applicare la formula (I), prendendo come funzione $f(x)$, in luogo della $y(x)$, la sua derivata di ordine k.

Infatti per $j=0$, m_0+1, $m_1+1,\dots, m_{s-1}+1$, la (5) è già verificata; e per gli altri valori di j si può far uso della formula (1) usata al n.° 3 del presente lavoro, tenendo presente che, per $m_i+1<j<m_{i+1}+1$, $(i=0, 1, 2,\dots, s-1)$, in tale formula si dovrà sostituire alla funzione $y(x)$ la sua derivata di ordine m_i+1.

7. - Osservazioni.

α). In modo analogo a quanto si è visto al n.° 3, *β*), si possono dare delle estensioni del Corollario II e dei suoi casi particolari, valide anche nel caso in cui i valori x_0, $x_1,\dots, x_p$ possano essere variabili al variare delle curve di $K^{[n]}$.

β). È importante mettere in rilievo, per il seguito, che tutti i risultati dei n.i 3, 4, 5, 6 si sono ottenuti indipendentemente dalle ipotesi fatte al n.° 2 sulla funzione f.

§ 3.

8. - Teorema II.

Nel teorema del n.° 2, e quindi anche in tutti i suoi successivi corollari, alla condizione *c*) può sostituirsi la seguente:

C_1). *Esista un numero finito N tale che, in tutti i punti* $(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *e per ogni valore finito di* $y^{(n)}$, *sia*

$$f(x, y, y',\dots, y^{(n)}) \geqslant N,$$

e inoltre, per $|y^{(n)}|\to\infty$, *sia*

$$\left|\frac{f(x, y, y',\dots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty,$$

uniformemente in tutto il campo $A^{[n]}$.

Infatti, ferma restando l'ipotesi *b*) del n.° 2, le condizioni C) e C_1) sono equivalenti, come si prova con una lieve modificazione delle considerazioni svolte dal TONELLI [9].

OSSERVAZIONE. - È da rilevare che, a differenza da quanto avviene nel caso in cui il campo $A^{[n]}$ sia limitato [10], pur essendo, per $|y^{(n)}|\to\infty$,

$$\left|\frac{f(x, y, y',\dots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty,$$

uniformemente in tutto il campo $A^{[n]}$, la funzione f può non essere inferiormente limitata, anche nel caso in cui l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ sia quasi-regolare positivo, come mostra il seguente esempio:

---

[9] Vedi L. TONELLI, luogo cit. per ultimo in [2], n.° 11, p. 416; ed anche S. CINQUINI, Memoria (I), n.° 5, p. 177.

[10] Vedi S. CINQUINI, idem.

Sia h un numero positivo, e il campo $A^{[n]}$ sia costituito di tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, nei quali è $-h \leqslant x \leqslant h$, e sia

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv [y^{(n)}]^2 + y^2([y^{(n)}]^2 - 1).$$

La derivata parziale

$$f_{y^{(n)}} = 2y^{(n)}(1 + y^2),$$

come funzione della sola $y^{(n)}$, è sempre non decrescente, e quindi l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è quasi-regolare positivo. Per $|y^{(n)}| \geqslant 1$, è

$$\left|\frac{f}{y^{(n)}}\right| = \frac{[y^{(n)}]^2 + y^2\,|[y^{(n)}]^2 - 1|}{|y^{(n)}|} \geqslant |y^{(n)}|,$$

e quindi, per $|y^{(n)}| \to \infty$, $\left|\frac{f}{y^{(n)}}\right| \to \infty$, uniformemente in tutto $A^{[n]}$.

Ma per $y^{(n)} = 0$, è $f = -y^2$, e quindi $f \to -\infty$ per $|y| \to \infty$.

9. - Teorema III.

Nel teorema del n.° 2, e quindi anche in tutti i suoi corollari, alla condizione C) possono sostituirsi le seguenti:

C_2'). *In ciascun punto* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *del campo* $A^{[n]}$ *sia, per* $|y^{(n)}| \to \infty$,

$$\left|\frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty;$$

C_2''). *Esistano due numeri finiti* $\lambda_0 > 0$, N_0, *in modo che si abbia in tutto il campo* $A^{[n]}$

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant \lambda_0 |y^{(n)}| + N_0.$$

Infatti, essendo

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} \geqslant \int_{C^{[n]}} (\lambda_0 |y^{(n)}| + N_0)dx \geqslant -2h|N_0|,$$

il limite inferiore i di $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ nella classe $K^{[n]}$ è sicuramente finito, e perciò possiamo limitarci alla considerazione di quella sottoclasse $K_1^{[n]}$ di $K^{[n]}$, per la quale risulta

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} \leqslant i + 1.$$

Considerata una curva qualunque $C^{[n]}$: $y = y(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$, della classe $K_1^{[n]}$ (la quale è pure completa di ordine n), essendo

$$\sqrt{1 + [y^{(n)}]^2} \leqslant 1 + |y^{(n)}| \leqslant 1 - \frac{N_0}{\lambda_0} + \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\lambda_0},$$

risulta

$$\int_a^b \sqrt{1 + [y^{(n)}]^2}\,dx \leqslant 2h\left(1 + \frac{|N_0|}{\lambda_0}\right) + \frac{1}{\lambda_0}(i + 1),$$

essendo evidentemente $b - a \leqslant 2h$.

Ogni curva $y=y^{(n-1)}(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$, corrispondente ad una curva di $K_1^{[n]}$, ha dunque lunghezza non superiore ad un numero fisso, e perciò, siccome per ogni curva di $K_1^{[n]}$ esiste almeno un valore x_{n-1}, interno all'intervallo (a, b) e per il quale è, per ipotesi,

$$|y^{(n-1)}(x_{n-1})| \leqslant L,$$

ne segue immediatamente che, per ogni curva della classe $K_1^{[n]}$, il modulo della $y^{(n-1)}(x)$ non può superare un numero fisso indipendente dalla curva considerata, ossia le derivate $y^{(n-1)}(x)$ costituiscono un insieme di funzioni ugualmente limitate. Proseguendo come al n.° 2, si conclude che ogni punto $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ relativo ad una curva di $K_1^{[n]}$, appartiene ad un campo limitato $A_0^{[n]}$, e basta quindi applicare il teorema del n.° 5 della Memoria (I) per concludere che in $K_1^{[n]}$, e quindi anche in $K^{[n]}$, esiste il minimo assoluto di $I_{C^{[n]}}^{[n]}$.

ESEMPIO. - La funzione

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{[y^{(n)}]^2}{1+y^2} + \sqrt{1+[y^{(n)}]^2}$$

soddisfa alle condizioni del presente numero, ma non a quelle del numero precedente.

10. - Teorema IV.

a). Alla condizione C_2'') del numero precedente possono sostituirsi le seguenti:

C_3''). *Esiste un numero finito N, in modo che si abbia, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, e per tutti gli $y^{(n)}$,*

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geqslant N; \tag{6}$$

$C_{3,a}'''$). *Esiste un numero positivo λ, e una funzione $\varphi(u)$ definita per $|u| \geqslant \lambda$, continua, non negativa e tale che*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(u)du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(u)du = +\infty,$$

in modo che si abbia, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ con $|y^{(n-1)}| \geqslant \lambda$,

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geqslant |y^{(n)}| \varphi(y^{(n-1)}),$$

per tutti gli $y^{(n)}$ che verificano la disuguaglianza $|y^{(n)}| \geqslant 1 : \varphi(y^{(n-1)})$.

Siccome, in virtù della (6), il limite inferiore i di $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ nella classe $K^{[n]}$ è finito, basta limitarsi a considerare la sottoclasse $K_1^{[n]}$ indicata al numero precedente, e ragionare poi in modo analogo al n.° 14, a) della Memoria (I) [11]. Si per-

---

[11] Si deduca la dimostrazione del n.° 14, a), che è stata omessa, come caso particolare da quella del n.° 12.

viene così alla conclusione che la differenza fra il massimo e il minimo della derivata di ordine $n-1$ di ogni funzione, da cui è definita una curva qualunque di $K_1^{[n]}$, non può superare un numero fisso, e quindi, tenendo conto della disuguaglianza che figura nella condizione d) del n.° 2 del presente lavoro, per $j=n-1$, ne segue che le derivate di ordine $n-1$ delle funzioni da cui sono definite le curve di $K_1^{[n]}$ costituiscono un insieme di funzioni ugualmente limitate; e basta poi ripetere le considerazioni del numero precedente.

β). Un notevole caso particolare del teorema del presente numero è quello in cui è $\varphi(u)\equiv\frac{a}{u}$. In tal caso la condizione $C'''_{3,\alpha}$) può assumere la seguente forma più semplice:

$C'''_{3,\beta}$). *Esistono due numeri positivi* λ, a *in modo che in tutti i punti* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *del campo* $A^{[n]}$, *per i quali è* $|y^{(n-1)}|\geqq\lambda$, *risulti*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\geqq a\left|\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}\right|,$$

per tutti gli $y^{(n)}$ *che verificano la disuguaglianza* $|y^{(n)}|\geqq\frac{|y^{(n-1)}|}{a}$.

γ). Più particolarmente ancora alla condizione $C'''_{3,\beta}$) può sostituirsi la seguente:

$C'''_{3,\gamma}$). *Esistono due numeri positivi* M_1, M_2, *e un numero* $\sigma>0$, *ed una funzione* $g(u)$, *continua e maggiore di zero per ogni* $|u|\geqq 1$, *e soddisfacente alla condizione*

$$|u|^{1+\sigma}g(u)\to\infty,$$

per $u\to\infty$, *in modo che si abbia*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\geqq|y^{(n)}|^{1+\sigma}g(y^{(n-1)}),$$

in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$, *tali che* $|y^{(n-1)}|\geqq M_1$, *e per ogni* $|y^{(n)}|\geqq M_2$ ([12]).

δ). ESEMPIO. - Si può ora mostrare facilmente, con un esempio, che, se non è verificata la condizione 2°) del n.° 4, in una classe completa di ordine n, può non esistere il minimo di $I^{[n]}_{C^{[n]}}$.

Sia $n=3$; il campo $A^{[3]}$ sia costituito da tutti i punti (x, y, y', y''), nei quali è $-2\leqq x\leqq 2$, e sia

$$f(x, y, y', y'', y''')\equiv\frac{1+y'''^2}{1+y''^2}.$$

L'integrale $I^{[3]}_{C^{[3]}}$ è quasi-regolare positivo; è soddisfatta la condizione C_3'') essendo $f\geqq 0$, ed anche la $C'''_{3,\beta}$).

([12]) Al n.° 14 della Memoria (I) trovansi numerosi esempi relativi ai casi considerati nel presente numero; le condizioni $C'''_{3,\alpha}$), $C'''_{3,\beta}$), $C'''_{3,\gamma}$) figurano anche nel luogo ora citato, e sono le estensioni di condizioni date, per $n=1$, da L. TONELLI e da E. J. MCSHANE

Ci domandiamo, se, fra le curve $C^{[3]}$: $y=y(x)$, $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, per le quali è

$$y(-1)=0, \qquad y(1)=0, \qquad y'(0)=0,$$

ne esiste almeno una minimante per l'integrale

$$I^{[3]}_{C^{[3]}}=\int_{-1}^{1}\frac{1+y'''^2}{1+y''^2}\,dx.$$

Osserviamo che, qualunque sia il numero reale k, ogni curva

$$y=k(1-x^2)$$

è una curva $C^{[3]}$ per la quale sono verificate tutte le condizioni (7). Essendo

$$I^{[3]}_{C^{[3]}}\leqslant\frac{2}{1+4k^2}$$

il limite inferiore di $I^{[3]}_{C^{[3]}}$ è uguale allo zero, ma non esiste alcuna curva di $C^{[3]}$, per la quale siano soddisfatte le (7) e risulti $I^{[n]}_{C^{[n]}}=0$.

Ciò dipende dal fatto che non è verificata la condizione 2°) del n.° 6 (e quindi nemmeno la 2°) del n.° 4), perchè il valore $x=0$, in cui è fissato il valore della derivata del primo ordine, è interno all'intervallo $(-1, 1)$, nei cui punti terminali sono fissati i valori delle funzioni.

11. - Teorema V.

Alla condizione C_2'') del n.° 9 può sostituirsi la seguente:

C_4''). *È*

$$f(x, y, y',\dots, y^{(n)})\equiv g_1(x, y^{(n)})-g_2(x, y, y',\dots, y^{(n-1)}),$$

ed è possibile determinare un numero $h_1>2h$ *e due funzioni* $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, *definite e continue per* $u\geqslant 0$, *non decrescenti, con* $\psi_1(u)$ *concava verso l'alto, tali che sia, per* $u\to+\infty$,

$$\psi_1(u)-\psi_2(u)\to+\infty,$$

in modo che risulti, in tutti i punti $(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *e per tutti i valori di* $y^{(n)}$,

$$g_1(x, y^{(n)})\geqslant\psi_1(h_1\,|\,y^{(n)}|), \qquad g_2(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})\leqslant\psi_2(|\,y^{(n-1)}|) \quad (^{13}).$$

Infatti, considerata una curva qualunque $C_1^{[n]}$ di $K^{[n]}$, sia $I^{[n]}_{C_1^{[n]}}=M_0$. Basta quindi limitarsi a considerare quella sottoclasse $K_2^{[n]}$, la quale è pure completa

---

(13) Al n.° 11 della Memoria (I) sono indicati alcuni esempi di funzioni, che si trovano nelle condizioni del presente numero. La condizione C_4'') figura anche nel luogo citato ed è una generalizzazione di una condizione data da L. TONELLI, per $n=1$.

di ordine n, per la quale è

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} \leqslant M_0 + 1.$$

Ragionando come al n.° 11 della Memoria (I) si conclude che la differenza fra il massimo e il minimo della derivata di ordine $n-1$ della funzione, da cui è definita una curva qualunque di $K_2^{[n]}$, non può superare un numero fisso, e basta poi procedere come al n.° 10, a) del presente lavoro.

12. - Teorema VI.

Il teorema del n.° 2 e quindi anche tutti i suoi corollari di cui al § 2, continuano a sussistere se, alla condizione C) di tale enunciato, sostituiamo le seguenti:

C_5'). *In ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$ *tutto costituito di punti di* $A^{[n]}$ *siano soddisfatte le condizioni di almeno uno dei teoremi dei n.*[i] *6, 8, 9 della Memoria* (I).

C_5''). *A prescindere da una parte* $A_0^{[n]}$ *del campo* $A^{[n]}$ *limitata e chiusa, in tutta la parte rimanente che indicheremo con* $A_I^{[n]}$ *sia soddisfatta, o la condizione* C_2''), *o le* C_3'') *e* $C_{3,\alpha}'''$) (*od anche in luogo di quest'ultima la* $C_{3,\beta}'''$) *o la* $C_{3,\gamma}'''$)), *oppure la* C_4''.

Considerata una curva $C_1^{[n]}$ di $K^{[n]}$ basta limitarsi a considerare la sottoclasse $K_2^{[n]}$ indicata al n.° 11, e a provare che le derivate di ordine $n-1$ delle funzioni da cui sono definite le curve della classe $K_2^{[n]}$ costituiscono un insieme di funzioni ugualmente limitate.

Distinguiamo ora tre casi, secondo che, nel campo limitato $A_0^{[n]}$, sono soddisfatte le condizioni del teorema del n.° 6 della Memoria (I), o quelle del n.° 8, o quelle del n.° 9.

a). Nel primo caso, siccome la funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ risulta inferiormente limitata in $A_0^{[n]}$, l'integrale della funzione f esteso a quella parte di ogni curva $C^{[n]}: y = y(x)$ di $K_2^{[n]}$, i cui punti $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ appartengono ad $A_0^{[n]}$, non può essere inferiore ad un numero fisso, indipendente dalla curva considerata, e quindi si possono ripetere le considerazioni dei numeri precedenti e si conclude che i valori delle derivate di ordine $n-1$ delle $y(x)$ non possono differire di una quantità in modulo superiore ad un numero fisso, da valori di $y^{(n-1)}$ che non possono superare un numero fisso, perchè, o sono coordinate di punti del campo limitato $A_0^{[n]}$ o soddisfano alla disuguaglianza che figura nella condizione d) del n.° 2, per $j = n-1$.

b). Se nel campo $A_0^{[n]}$ sono soddisfatte le condizioni del n.° 8 della Memoria (I), non possiamo affermare che la funzione f sia inferiormente limitata nel campo $A_0^{[n]}$, ma, siccome l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è, per ipotesi, quasi-regolare positivo seminormale, abbiamo

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) - \{ f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, 0) + y^{(n)} f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, 0) \} \geqslant 0.$$

Quindi, se indichiamo con $C_0^{[n]}$ l'insieme di quegli archi della curva $C^{[n]}$: $y=y(x)$ della classe $K_2^{[n]}$, i cui punti $(x, y(x), y'(x),\dots, y^{(n-1)}(x))$ appartengono al campo $A_0^{[n]}$, e con Δ_0 il massimo modulo delle funzioni f e $f_{y^{(n)}}$ per $(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ in $A_0^{[n]}$ e $y^{(n)}=0$, risulta

$$\int_{C_0^{[n]}} f dx \geqslant \int_{C_0^{[n]}} \{ f(x, y, y',\dots, y^{(n-1)}, 0)+y^{(n)} f_{y^{(n)}}(x, y, y',\dots, y^{(n-1)}, 0)\} dx \geqslant$$
$$\geqslant -2h\Delta_0 - \Delta_0 \int_{C_0^{[n]}} | y^{(n)} | \, dx,$$

qualunque sia la curva $C^{[n]}$ di $K_2^{[n]}$. Ma riesaminando la dimostrazione del lemma del n.° 7, β) della Memoria (I) risulta che, qualunque sia la curva $C^{[n]}$ di $K_2^{[n]}$, l'integrale

$$\int_{C_0^{[n]}} | y^{(n)} | \, dx,$$

non può superare un numero fisso, che non dipende dalla curva considerata, e quindi, indicato con Δ_1 questo numero, abbiamo

$$\int_{C_0^{[n]}} f(x, y, y',\dots, y^{(n)}) dx \geqslant -\Delta_0(2h+\Delta_1),$$

e non rimane che proseguire in modo analogo a quello indicato in a).

c). Se finalmente in $A_0^{[n]}$ sono soddisfatte le condizioni dell'enunciato del n.° 9 della Memoria (I), basta modificare leggermente le considerazioni svolte in b) tenendo conto della dimostrazione del n.° 9 della Memoria (I), invece che di quella del lemma del n.° 7, β).

§ 4.

13. - Nuovo teorema generale.

Se: a) esiste un numero $h>0$, *in modo che in tutti i punti* $(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *sia* $-h \leqslant x \leqslant h$; *b) scelto comunque un numero* $P>0$, *non inferiore alla minima distanza dei punti di* $A^{[n]}$ *dall'origine delle coordinate, il valore dell'integrale* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *relativo ad una curva qualunque* $C^{[n]}$: $y=y(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$, *per la quale esista almeno una n-pla di valori* x_j, $(j=0, 1, 2,\dots, n-1)$ *(distinti o no), appartenenti all'intervallo* (a, b) *e tali che sia rispettivamente*

$$| y^{(j)}(x_j) | \leqslant P, \qquad (j=0, 1, 2,\dots, n-1; \; y^{(0)} \equiv y)$$

tende sempre a $+\infty$ *col tendere all'infinito del massimo della somma* $y^2(x)+[y'(x)]^2+\dots+[y^{(n-1)}(x)]^2$; *c) in ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$ *tutto costituito di punti di* $A^{[n]}$ *sono verificate le condizioni di uno almeno dei teoremi di esistenza del* § 2 *della Memoria* (I); *d)* $K^{[n]}$ *è una classe completa di ordine n di curve* $C^{[n]}$, *tale che esista un numero* $P_K>0$, *in modo* *che, per ogni curva della classe esiste almeno una n-pla di valori* x_j, $(j=0, 1, 2,...., n-1)$ *(distinti o no), appartenenti al rispettivo intervallo di definizione e per i quali si abbia rispettivamente*

$$|y^{(j)}(x_j)| \leq P_k, \qquad (j=0, 1, 2,...., n-1; \; y^{(0)} \equiv y);$$

allora nella classe $K^{[n]}$ *esiste il minimo assoluto di* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$.

Basta ripetere, con poche modificazioni, la dimostrazione del teorema richiamato al n.° 1, a) (14).

14. - Esempio.

α). OSSERVAZIONE. - Le proposizioni dei n.i 11 e 14 della Memoria (I) forniscono altrettanti corollari del teorema precedente, inquantochè la condizione b) del precedente teorema è sempre soddisfatta, se sono verificate le condizioni di almeno una delle proposizioni citate.

Inoltre dal teorema del numero precedente possono ottenersi nuovamente il risultato del n.° 2 della presente Memoria e le sue estensioni date nel § 3.

Per altro il teorema, richiamato al n.° 1 della presente Memoria ha una portata più vasta di quello del numero precedente, perchè da quest' ultimo non può dedursi il Corollario del n.° 12 della Memoria (I) nella sua forma generale, e neanche nella forma particolare del n.° 13, ma soltanto nella forma particolare del n.° 14, come abbiamo rilevato all' inizio del presente numero.

β). ESEMPIO. - A questo punto si potrebbe però pensare che l' incompleta estensione del Corollario del n.° 12 (e, in particolare, la mancanza dell' analogo di quello del n.° 13) della Memoria (I), alle classi $K^{[n]}$ considerate nel presente lavoro, dipendesse dalla inefficacia dei mezzi di ricerca usati. Ma invece possiamo mettere in evidenza, col seguente esempio, che pur soddisfacendo la funzione f, alle ipotesi di almeno uno dei teoremi del § 2 della Memoria (I) in ogni campo limitato tutto costituito di punti di $A^{[n]}$, e inoltre alle condizioni del n.° 13 della Memoria stessa, può effettivamente mancare il minimo dell' integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ in una classe $K^{[n]}$, completa di ordine n, e per la quale sia verificata la condizione d) del n.° 2 del presente lavoro.

Sia $n=2$; il campo $A^{[2]}$ sia costituito da quella parte dello spazio (x, y, y'), nella quale è $-2 \leq x \leq 2$.

Sia

$$f(x, y, y', y'') \equiv \frac{1+y'^2+y''^2}{(e^4+y^2+y'^2)\lg(e^2+\sqrt{y^2+y'^2})},$$

e si consideri la classe $K^{[2]}$ delle curve $C^{[2]}$: $y=y(x)$, $(0 \leq x \leq 1)$, per le quali è

$$y'(0)=0, \qquad y(1)=0.$$

---

(14) Cfr. L. TONELLI, opera citata in (2), volume II, n.° 90, p. 307.

Ci domandiamo se, nella classe considerata, esiste il minimo dell'integrale

$$I_{C^{[2]}}^{[2]}=\int_0^1 f(x, y, y', y'')dx.$$

In ogni campo limitato tutto costituito di punti di $A^{[2]}$ sono verificate le condizioni del teorema del n.° 5 della Memoria (I). Si ha inoltre

$$f\geqslant 0,$$

ed essendo, per $y^2+y'^2\geqslant e^4$,

$$\lg (e^2+\sqrt{y^2+y'^2})\leqslant \lg 2\sqrt{y^2+y'^2}\leqslant 2\lg\sqrt{y^2+y'^2}\leqslant [\lg\sqrt{y^2+y'^2}]^2,$$

risulta

$$f\geqslant \frac{y'^2+y''^2}{2(y^2+y'^2)[\lg\sqrt{y^2+y'^2}]^2}\geqslant \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{y'^2+y''^2}}{\sqrt{y^2+y'^2}\,\lg\sqrt{y^2+y'^2}},$$

per

$$\sqrt{y'^2+y''^2}\geqslant\sqrt{y^2+y'^2}\,\lg\sqrt{y^2+y'^2},$$

ed è quindi soddisfatta la condizione $3^0_{1,b})$ del n.° 13 della Memoria (I) prendendo

$$\varphi(u)=\frac{1}{2u\lg u},$$

poichè

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{du}{u\lg u}=+\infty.$$

D'altra parte il limite inferiore di $I_{C^{[2]}}^{[2]}$ nella classe $K^{[2]}$ considerata è lo zero. Infatti alla classe considerata appartengono evidentemente le curve

$$y=m(1-x^2), \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

(con m numero reale), per le quali si ha

$$I_{C^{[2]}}^{[2]}=\int_0^1\frac{1+4m^2(1+x^2)}{[e^4+m^2(1+x^2)^2]\lg[e^2+|m|(1+x^2)]}\,dx,$$

quindi

$$I_{C^{[2]}}^{[2]}\leqslant\frac{1+8m^2}{(e^4+m^2)\lg(e^2+|m|)},$$

numero che, evidentemente, tende allo zero, per $|m|\to\infty$.

Tuttavia nella classe $K^{[2]}$ non esiste alcuna curva $C^{[2]}$ per la quale sia $I_{C^{[2]}}^{[2]}=0$, e con ciò il nostro asserto è provato.