ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine *n*

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 2 (1937), p. 149-178
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_2_149_0>

SOPRA LE CONDIZIONI NECESSARIE PER LA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DEI PROBLEMI VARIAZIONALI DI ORDINE n (*)

di SILVIO CINQUINI (Pisa).

In una recente Memoria (1) ho cominciato ad occuparmi dei problemi variazionali, in forma ordinaria, di ordine n, nei quali cioè si devono trovare, fra le curve $y=y(x)$, $(a\leq x\leq b)$, di una certa classe, quelle che rendono minimo l'integrale

$$I_{C^{[n]}}^{[n]}=\int_a^b f\left(x,\, y(x),\, \frac{dy(x)}{dx},\dots,\, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right)dx,$$

ove n è un numero intero >1, ed f è una data funzione, proponendomi di estendere a questi problemi il metodo, fondato dal TONELLI (2) e basato sul concetto di semicontinuità, che, nel caso $n=1$, ha permesso a questo Autore di risolvere, per primo, questo problema in tutta la sua generalità.

All'inizio della citata Memoria, nella quale ho dato teoremi di esistenza del minimo dell'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$, ho enunciato le condizioni sufficienti per la semicontinuità di tali integrali, osservando che le relative dimostrazioni (3) si deducono immediatamente da quelle stabilite dal TONELLI per $n=1$, e soggiungendo che mi sarei occupato in altro lavoro delle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali stessi.

La ricerca di queste condizioni forma oggetto del presente lavoro, che è diviso in cinque paragrafi, nell'ultimo dei quali vengono dedotte, dalle condizioni necessarie per la semicontinuità, quelle di LEGENDRE e di WEIERSTRASS, necessarie per l'esistenza dell'estremo.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) S. CINQUINI: *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. V (1936), pp. 169-190).

(2) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Due volumi. (N. Zanichelli, Bologna, 1921-1923).

(3) Vedi anche, S. CINQUINI: *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n.* (Annali di Matematica pura e applicata, S. IV, T. XV (1936-1937), pp. 77-86).

Anche qui, come nella citata Memoria, si considerano le curve

$$C^{[n]}: \quad y=y(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

con $y(x)$ assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, e tale che esista finito l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$, ove $f(x, y, y', ..., y^{(n)})$ è una data funzione.

Rileviamo subito che i risultati, a cui perveniamo nel presente lavoro, presentano la stessa generalità di quelli che il TONELLI ha stabilito per $n=1$ (4), e che quindi questi ultimi vengono ad essere contenuti, come caso particolare, in quelli del presente lavoro.

Premesse nel § 1 le generalità, vengono date, nel § 2, le condizioni necessarie per la semicontinuità dell'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$, in tutto il campo di definizione della funzione $f(x, y, y', ..., y^{(n)})$, estendendo opportunamente il metodo seguito dal TONELLI per $n=1$.

Invece, per stabilire le condizioni necessarie per la semicontinuità su una data curva, abbiamo dovuto procedere in modo diverso da quello seguito dal TONELLI per $n=1$. Le dimostrazioni di questo Autore sono basate sulla preliminare inscrizione nella curva in questione di una poligonale, sulle proprietà di cui godono queste poligonali, quando le lunghezze di tutti i loro lati tendono allo zero, e sul fatto che in tutti i punti di un intervallo dell'asse delle x, che è proiezione ortogonale, su tale asse, di un lato della poligonale, la derivata del primo ordine della funzione, da cui è definita la poligonale, ha sempre lo stesso valore.

L'idea che, nel nostro caso, si presenterebbe quindi a prima vista, sarebbe quella di giovarsi in luogo delle poligonali, di curve formate di un numero finito di archi $y=y(x)$, con $y(x)$ funzione razionale intera di grado n. Ma ad ognuno di questi archi si possono imporre soltanto $n+1$ condizioni agli estremi, mentre nel nostro caso avremmo bisogno che ognuno di questi archi soddisfacesse a $2n$ condizioni (dovendo la funzione $y(x)$ e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini avere rispettivamente gli stessi valori della funzione $y_0(x)$, da cui è definita la curva data, e delle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, negli estremi dell'intervallo dell'asse delle x corrispondente all'arco considerato), ma evidentemente è, per $n>1$, $2n>n+1$ (mentre per $n=1$, si ha proprio $2n=n+1$). D'altra parte se si prendessero per $y(x)$ delle funzioni razionali intere di grado $2n-1$, sopra ognuno degli archi in questione la derivata di ordine n non sarebbe più costante, e pertanto si presenterebbero altri notevoli ostacoli.

Abbiamo superato questa difficoltà gradatamente, cominciando a stabilire, nel § 3, le condizioni necessarie per la semicontinuità sopra una curva $y=y_0(x)$, tale

(4) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in (2), Vol. I, Cap. X, pp. 369-381.

che la derivata di ordine $n-1$ della $y_0(x)$ è a rapporto incrementale limitato. Le dimostrazioni vengono fatte supponendo, che la condizione, che deve risultare necessaria per la semicontinuità, non sia soddisfatta, ma, a differenza dal TONELLI, le curve $C_m^{[n]}$, di cui facciamo uso per provare che, in tal caso, sulla curva in questione l'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ non sarebbe semicontinuo inferiormente, vengono costruite « *immediatamente* » sulla curva data, cioè facendo uso soltanto di curve costruite come nel § 2.

Alla fine del § 3 si deduce poi, come immediata conseguenza, la forma che assumono queste condizioni nel caso in cui la funzione $y_0(x)$ abbia la derivata di ordine n finita e continua in tutto l'intervallo di definizione della funzione $y_0(x)$.

Nel § 4, in cui viene trattato il caso generale, la costruzione delle curve $C_m^{[n]}$ viene, invece, fatta « *mediatamente* », sostituendo cioè, innanzi tutto, ad alcuni archi della curva data, convenientemente scelti, degli archi di curva definiti da funzioni aventi la derivata di ordine n sempre inferiore ad un numero fisso, e perciò, in ultima analisi, riconducendo il problema in questione a quello trattato nel § 3. Dobbiamo qui rilevare che la costruzione di questi archi ausiliari, per quanto notevolmente diversa dall'originale, ci è stata suggerita da un metodo di approssimazione seguito dal TONELLI per $n=1$ ([5]).

Come già abbiamo rilevato, i risultati del presente lavoro contengono, come casi particolari, quelli stabiliti dal TONELLI per $n=1$, ma mentre le dimostrazioni del § 2, per $n=1$, si riducono a quelle del TONELLI, quelle dei §§ 3 e 4 forniscono nuove dimostrazioni dei teoremi stabiliti da questo Autore per $n=1$.

§ 1. - Generalità.

1. - Generalità.

Per le generalità rimandiamo al lavoro già citato ([6]), limitandoci nel presente numero a qualche cenno e a qualche aggiunta.

a). Considerato uno spazio ad $n+1$ dimensioni (con n intero positivo), riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, dicesi campo $A^{[n]}$ ogni insieme di questo spazio contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito. Inoltre per ogni punto $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, e per ogni valore finito di $y^{(n)}$, supporremo definita una funzione $f(x, y, y', ..., y^{(n)})$ finita e continua, salvo avviso contrario, insieme con le proprie derivate parziali $f_{y^{(n)}}$, $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$.

La funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS è definita, indipendentemente dall'esistenza

([5]) Vedi L. TONELLI: *Sur une question du Calcul des Variations.* (Rec. Math. Moscou, T. XXXIII (1926)). Vedi anche, B. MANIÀ: *Sull'approssimazione delle curve e degli integrali.* (Boll. Unione Matematica Italiana, A. XIII (1934), pp. 36-41).

([6]) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ([1]), § 1, n.° 1.

della derivata parziale $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$, per ogni $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, e per ogni coppia di valori finiti $y^{(n)}$, $\tilde{y}^{(n)}$, nel seguente modo

$$\mathcal{E}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}; \tilde{y}^{(n)}) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \tilde{y}^{(n)}) -$$
$$- f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) - (\tilde{y}^{(n)} - y^{(n)}) f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

β). Si considerano le curve

$$C^{[n]}: \quad y = y(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

per le quali $y(x)$ è una funzione assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini $y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$, ogni punto $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, (con $a \leqslant x \leqslant b$) appartiene al campo $A^{[n]}$, ed inoltre esiste finito l'integrale (del LEBESGUE)

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))\,dx.$$

Se ogni punto $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, (con $a \leqslant x \leqslant b$) è interno al campo $A^{[n]}$, diremo che la curva $C^{[n]}$ è completamente interna al campo $A^{[n]}$.

γ). Sia $C_0^{[n]}$: $y = y_0(x)$, una curva $C^{[n]}$; diremo che l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è una *funzione semicontinua inferiormente sulla curva* $C_0^{[n]}$, se, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\varrho > 0$, in modo che la disuguaglianza

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} > I^{[n]}_{C_0^{[n]}} - \varepsilon,$$

sia verificata per tutte le curve $C^{[n]}$ appartenenti propriamente all'intorno $(\varrho)^n$ della $C_0^{[n]}$.

Se poi $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ gode della semicontinuità inferiore su ogni curva $C^{[n]}$, diremo semplicemente che tale integrale è una *funzione semicontinua inferiormente.*

Analoghe definizioni per la semicontinuità superiore e per la continuità.

δ). Avvertiamo inoltre che ci occuperemo soltanto delle condizioni relative alla semicontinuità inferiore [al minimo], perchè quelle relative alla semicontinuità superiore [al massimo] si ottengono dalle prime, cambiando il senso delle disuguaglianze che vi figurano.

§ 2. - La semicontinuità in tutto il campo.

2. - Condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.

Condizione necessaria, affinchè l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *sia una funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia*

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geqslant 0, \tag{1}$$

per ogni $y^{(n)}$, *in tutti i punti* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *interni al campo* $A^{[n]}$, *e in quelli di accumulazione di tali punti.*

Dimostrazione. - Supponiamo invece che esista almeno un punto $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ interno al campo $A^{[n]}$ e un valore finito $y_0^{(n)}$, per i quali si abbia

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) < 0.$$

Per la continuità della derivata $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$ rispetto alle sue $n+2$ variabili, considerato un numero positivo η, comunque scelto, purchè soddisfacente alla disuguaglianza

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) < -\eta,$$

è possibile determinare un $\delta > 0$, in modo che si abbia

(2) $$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) < -\eta,$$

ogniqualvolta siano verificate le $n+2$ disuguaglianze

(3) $$|x-x_0| \leq \delta, \qquad |y-y_0| \leq \delta, \qquad |y^{(r)}-y_0^{(r)}| \leq \delta, \qquad (r=1, 2, \ldots, n),$$

δ essendo inoltre scelto in modo che ogni punto $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, soddisfacente alle prime $n+1$ delle disuguaglianze (3), appartenga al campo $A^{[n]}$.

Si consideri ora la curva

$$C_*^{[n]}: \quad y = y_*(x), \qquad (x_0 \leq x \leq x_\omega),$$

con

$$y_*(x) \equiv \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + \frac{y_0'}{1!}(x-x_0) + y_0,$$

x_ω essendo scelto in modo che si abbia $|x_\omega - x_0| \leq \delta$, e che in ogni punto dell'intervallo (x_0, x_ω) siano verificate le disuguaglianze

(4) $$\begin{cases} |y_*(x) - y_0| \leq \dfrac{\delta}{2}, \\ |y_*^{(r)}(x) - y_0^{(r)}| \leq \dfrac{\delta}{2}, \qquad \left(r=1, 2, \ldots, n-1\,;\; y_*^{(r)}(x) = \dfrac{d^r y_*(x)}{dx^r}\right). \end{cases}$$

$C_*^{[n]}$ è evidentemente una curva $C^{[n]}$, e in tutto (x_0, x_ω) è $\dfrac{d^n y_*(x)}{dx^n} = y_0^{(n)}$.

Preso un numero intero $m > 1$, si divida l'intervallo (x_0, x_ω) in m parti uguali mediante i punti di ascisse,

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_m \equiv x_\omega\,;$$

poi ognuna di queste parti (x_r, x_{r+1}) si divida in 2^n parti uguali mediante i punti di ascisse

(5) $$x_r \equiv x_{r,0}, \quad x_{r,1}, \quad x_{r,2}, \ldots, \quad x_{r,2^n-1}, \quad x_{r,2^n} \equiv x_{r+1}.$$

Fissato un numero $\lambda > 0$, non superiore a $\frac{\delta}{2}$, si definisca in (x_0, x_ω) una funzione continua $z_m(x)$, nel seguente modo:

$z_m(x)$ e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini siano nulle per $x=x_{r,0}$, inoltre, posto

$$\frac{d^n z_m(x)}{dx^n}=z_m^{(n)}(x),$$

sia

$$z_m^{(n)}(x)=\lambda, \quad \text{per } x_{r,0}<x<x_{r,1};$$
$$z_m^{(n)}(x)=-\lambda, \quad \text{per } x_{r,1}<x<x_{r,2};$$
$$z_m^{(n)}(x)=-z_m^{(n)}(x-[x_{r,2^s}-x_{r,0}]), \quad \text{per } x_{r,2^s}<x<x_{r,2^{s+1}}, \quad (s=1,2,\dots,n-1).$$

$z_m(x)$ viene così ad essere definita in tutto (x_r, x_{r+1}); e, per $x=x_{r+1}$, $z_m(x)$ e le sue derivate dei primi $n-1$ hanno valore nullo. Mediante la periodicità di periodo $x_{r+1}-x_r=\dfrac{x_\omega-x_0}{m}$, definiamo la funzione $z_m(x)$ in tutto (x_0, x_ω).

Osserviamo che in tutto (x_0, x_ω) è sempre

$$(6)\quad \begin{cases} |z_m(x)|\leq\dfrac{\lambda}{n!}\left(\dfrac{x_\omega-x_0}{2m}\right)^n, \\ |z_m^{(j)}(x)|\leq\dfrac{\lambda}{(n-j)!}\left(\dfrac{x_\omega-x_0}{2m}\right)^{n-j}, \qquad \left(j=1,2,\dots,n-1;\ z_m^{(j)}(x)=\dfrac{d^j z_m(x)}{dx^j}\right); \\ \qquad z_m^{(n)}(x)=\pm\lambda, \end{cases}$$

e quindi anche per ogni $m\geq\dfrac{x_\omega-x_0}{2}$, essendo $\lambda\leq\dfrac{\delta}{2}$,

$$(7)\qquad |z_m(x)|\leq\frac{\delta}{2}, \qquad |z_m^{(j)}(x)|\leq\frac{\delta}{2}, \qquad (j=1,2,\dots,n-1).$$

Consideriamo ora la curva

$$C_m^{[n]}:\quad y=y_m(x), \qquad (x_0\leq x\leq x_\omega),$$

con

$$y_m(x)\equiv y_*(x)+z_m(x).$$

Per le (4) e (7), $C_m^{[n]}$ appartiene al campo $A^{[n]}$, e siccome $I_{C_m^{[n]}}$ esiste finito, tale curva è una curva $C^{[n]}$.

Considerata la differenza

$$f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})-f(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n)}),$$

risulta, applicando lo sviluppo accorciato di TAYLOR,

$$\begin{aligned} f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})-f(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n)})= \\ &=[f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})-f(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n-1)}, y_m^{(n)})]+ \\ &+[f(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n-1)}, y_m^{(n)})-f(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n)})]= \\ &=[f(x, y_*+z_m, y_*'+z'_m,\dots, y_*^{(n)}+z_m^{(n)})-f(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n-1)}, y_*^{(n)}+z_m^{(n)})]+ \\ &+z_m^{(n)}(x)f_{y^{(n)}}(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n)})+ \\ &+\frac{[z_m^{(n)}(x)]^2}{2!}f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_*, y_*',\dots, y_*^{(n-1)}, y_*^{(n)}+\bar z_m^{(n)}), \end{aligned}$$

ove $\bar{z}_m^{(n)}$ è compreso fra 0 e $z_m^{(n)}(x)$, ed è quindi $|\bar{z}_m^{(n)}|\leq\lambda$. Abbiamo quindi

$$(8)\quad I^{[n]}_{C_m^{[n]}}-I^{[n]}_{C_*^{[n]}}=\int_{x_0}^{x_\omega} f(x,\,y_m,\,y'_m,\ldots,\,y_m^{(n)})dx-\int_{x_0}^{x_\omega} f(x,\,y_*,\,y_*',\ldots,\,y_*^{(n)})dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_\omega}[f(x,\,y_*+z_m,\,y_*'+z'_m,\ldots,\,y_*^{(n)}+z_m^{(n)})-f(x,\,y_*,\,y_*',\ldots,\,y_*^{(n-1)},\,y_*^{(n)}+z_m^{(n)})]dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x_\omega} z_m^{(n)}(x)f_{y^{(n)}}(x,\,y_*,\,y_*',\ldots,\,y_*^{(n)})dx+$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\int_{x_0}^{x_\omega} f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x,\,y_*,\,y_*',\ldots,\,y_*^{(n-1)},\,y_0^{(n)}+\bar{z}_m^{(n)})dx.$$

Preso $\varepsilon>0$ ad arbitrio, essendo $|y_*^{(n)}(x)+\bar{z}_m^{(n)}(x)|\leq|y_0^{(n)}|+\lambda$, in virtù delle (6), per la continuità della f possiamo determinare un numero $m_1>1$, in modo che, per ogni intero $m>m_1$, l'integrale che figura, per primo, nell'ultimo membro della (8) sia, in modulo, $<\varepsilon$.

Inoltre, per un lemma del TONELLI (7), possiamo determinare un numero $m_2>1$, tale che per $m>m_2$ sia

$$\left|\int_{x_0}^{x_\omega} z_m^{(n)}(x)f_{y^{(n)}}(x,\,y_*,\,y_*',\ldots,\,y_*^{(n)})dx\right|<\varepsilon.$$

Pertanto dalla (8) risulta per tutti gli $m>m_1,\ m_2,\ \dfrac{x_\omega-x_0}{2}$, e tenendo conto della (2)

$$(9)\qquad I^{[n]}_{C_m^{[n]}}-I^{[n]}_{C_*^{[n]}}<2\varepsilon-\frac{1}{2}\lambda^2\eta(x_\omega-x_0)<-\frac{1}{4}\lambda^2\eta(x_\omega-x_0),$$

se è $\varepsilon<\frac{1}{8}\lambda^2\eta(x_\omega-x_0)$.

Ma, per le (6), preso un $\varrho>0$ ad arbitrio, possiamo determinare un numero $m_\varrho>1$, in modo che per ogni intero $m>m_\varrho$, la curva $C_m^{[n]}$ appartenga propriamente all'intorno $(\varrho)^n$ della $C_*^{[n]}$.

Se è quindi anche $m>m_\varrho$, per la (9) l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ non è semicontinuo inferiormente sulla curva $C_*^{[n]}$, contrariamente all'ipotesi fatta.

Pertanto se $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è una funzione semicontinua inferiormente, in tutti i punti $(x,\,y,\,y',\ldots,\,y^{(n-1)})$, interni ad $A^{[n]}$ e per ogni $y^{(n)}$, deve essere verificata la (1). Inoltre per la continuità della $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$, la (1) deve essere verificata anche in ogni punto di accumulazione di punti interni ad $A^{[n]}$.

---

(7) Vedi L. TONELLI, opera cit. in (2) Vol. I, n.° 79, pp. 213-217. Si prenda

$$y(x)\equiv z_m^{(n-1)}(x)\,;\qquad f(x)\equiv f_{y^{(n)}}(x,\,y_*(x),\,y_*'(x),\ldots,\,y_*^{(n)}(x)).$$

3. - Nuova forma della condizione necessaria per la semicontinuità.

Condizione necessaria, affinchè l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che si abbia*

$$\mathscr{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)};\ \tilde{y}^{(n)}) \geqq 0, \tag{10}$$

per tutte le coppie $y^{(n)}$, $\tilde{y}^{(n)}$, *in tutti i punti* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *interni al campo* $A^{[n]}$ *e in quelli di accumulazione di tali punti* ([8]).

Nelle ipotesi indicate nel n.° 1, la dimostrazione di questa proposizione si deduce immediatamente da quella del numero precedente. Ma per quanto dovremo stabilire nel seguito conviene dare una dimostrazione diretta. Questa dimostrazione vale indipendentemente dall'ipotesi dell'esistenza della derivata parziale $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$.

Supponiamo dunque che esista almeno un punto $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ interno al campo $A^{[n]}$ e una coppia di numeri finiti $y_0^{(n)}$, $\tilde{y}_0^{(n)}$, con $y_0^{(n)} \neq \tilde{y}_0^{(n)}$ necessariamente, tali che sia

$$\mathscr{E}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)};\ \tilde{y}_0^{(n)}) < 0. \tag{11}$$

Preso un numero $\eta > 0$, comunque scelto, purchè tale che si abbia

$$\mathscr{E}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)};\ \tilde{y}_0^{(n)}) < -\eta,$$

siccome, per la continuità della f e della $f_{y^{(n)}}$, anche la $\mathscr{E}$ è continua, è possibile determinare un $\delta > 0$, in modo che sia

$$\mathscr{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)};\ \tilde{y}_0^{(n)}) < -\eta \tag{12}$$

ogniqualvolta siano verificate le $n+1$ disuguaglianze

$$|x - x_0| \leqq \delta; \qquad |y - y_0| \leqq \delta; \qquad |y^{(r)} - y_0^{(r)}| \leqq \delta, \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{13}$$

δ essendo inoltre scelto in modo che ogni punto $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ soddisfacente alle (13) appartenga al campo $A^{[n]}$.

Si consideri ora la curva

$$C_*^{[n]}:\quad y = y_*(x), \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_\omega),$$

con

$$y_*(x) \equiv \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + y_0,$$

([8]) Per il teorema del presente numero e per quelli dei n.i 4; 6; 7; 8, *b*; 10; 11; 14; l'ipotesi, fatta al n.° 1, che esista finita anche la derivata parziale $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$ è superflua. Più generalmente, prescindendo anche dall'esistenza della derivata parziale $f_{y^{(n)}}$, si può dimostrare che: *condizione necessaria, affinchè l'integrale* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che, in tutti i punti* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *interni al campo* $A^{[n]}$ *e in* supponendo inoltre che sia $|x_\omega - x_0| \leqslant \delta$, e che in ogni punto di (x_0, x_ω) siano verificate le disuguaglianze

$$(14) \qquad \begin{cases} |y_*(x) - y_0| \leqslant \frac{\delta}{2}, \\ |y_*^{(r)}(x) - y_0^{(r)}| \leqslant \frac{\delta}{2}, \qquad \left(r = 1, 2, \ldots, n-1;\ y_*^{(r)}(x) = \frac{d^r y_*(x)}{dx^r}\right). \end{cases}$$

$C_*^{[n]}$ è evidentemente una curva $C^{[n]}$, e in tutto (x_0, x_ω) è $\frac{d^n y_*(x)}{dx^n} = y_0^{(n)}$.

Per la continuità della derivata $f_{y^{(n)}}$ è possibile determinare un numero $\theta_0 > 0$, in modo che, per tutti gli x di (x_0, x_ω) e per ogni θ, con $|\theta| \leqslant \theta_0$, si abbia, posto $\lambda = \widetilde{y}_0^{(n)} - y_0^{(n)}$,

$$(15) \qquad |f_{y^{(n)}}(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)} + \theta) - f_{y^{(n)}}(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)})| < \frac{1}{2} \frac{\eta}{|\lambda|}.$$

Ciò premesso, preso un numero intero $m > 1$, qualunque, si divida l'intervallo (x_0, x_ω) in m parti uguali, mediante i punti di ascisse

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_m \equiv x_\omega.$$

Poi, considerata una qualunque di queste parti (x_r, x_{r+1}), la si divida in 2^n parti, mediante i punti di ascisse

$$x_r \equiv x_{r,0}, \quad x_{r,1}, \quad x_{r,2}, \ldots, \quad x_{r,2^n-1}, \quad x_{r,2^n} \equiv x_{r+1},$$

in modo che, fissato un numero θ_1, di segno contrario a quello di λ, con

$$|\theta_1| \leqslant \theta_0, \qquad |\theta_1| < |\lambda|,$$

e determinati due numeri l_1, l_2, i quali risultano sempre > 0, tali che sia

$$(16) \qquad l_1 + l_2 = l,$$

$$(17) \qquad l_1 \lambda + l_2 \theta_1 = 0,$$

ove si è indicata con l l'ampiezza dell'intervallo (x_0, x_ω), si possa definire sull'intervallo (x_r, x_{r+1}) una funzione finita e continua insieme con le proprie derivate dei primi $n-1$ ordini, tale che essa e tutte queste derivate abbiano valore nullo per $x = x_r$ e per $x = x_{r+1}$, e tale inoltre che in tutti i punti interni ad un plurintervallo $\Delta_{1,r}^{(m)}$, di lunghezza $\frac{l_1}{m}$, costituito di 2^{n-1} fra gli intervalli, in cui è stato suddiviso (x_r, x_{r+1}), si abbia $\frac{d^n z_m(x)}{dx^n} = \lambda$, e nei punti interni al plurintervallo $\Delta_{2,r}^{(m)}$, costituito dai rimanenti intervalli di (x_r, x_{r+1}), e avente quindi lunghezza $\frac{l_2}{m}$, si abbia $\frac{d^n z_m(x)}{dx^n} = \theta_1$ ([9]).

---

quelli di accumulazione di tali punti, $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, *considerata come funzione della sola* $y^{(n)}$, *sia concava verso l'alto* (ossia convessa secondo JENSEN).

([9]) Per costruire la funzione $z_m(x)$ basta modificare opportunamente la costruzione fatta al n.° 2, ove, essendo $\theta_1 = -\lambda$, avevamo potuto suddividere (x_r, x_{r+1}) in 2^n parti uguali.

Per eliminare ogni difficoltà, premettiamo la seguente osservazione:

Si definisca poi la funzione $z_m(x)$ in tutto (x_0, x_ω) mediante la periodicità di periodo $\frac{l}{m}$.

Al variare di m abbiamo una successione di funzioni $z_m(x)$, $(m=2, 3, \dots)$, le quali, per $m \to \infty$, convergono uniformemente allo zero in (x_0, x_ω) insieme con le loro derivate dei primi $n-1$ ordini.

Presi due numeri qualunque α e β, entrambi >0, e tali che sia

$$(a) \qquad \alpha\lambda + \beta\theta_1 = 0,$$

si considerino sull'asse delle x i punti C_0, C_1, C_2, aventi come rispettive ascisse 0, α, β.

Definiamo una funzione $z(x)$, con $z(0)=0$, $z^{(r)}(0)=0$, $\left(r=1, 2, \dots, n-1;\ z^{(r)}(x)=\frac{d^r z(x)}{dx^r}\right)$, prendendo $z^{(n)}(x)=\lambda$, per $C_0 < x < C_1$; $z^{(n)}(x)=\theta_1$, per $C_1 < x < C_2$.

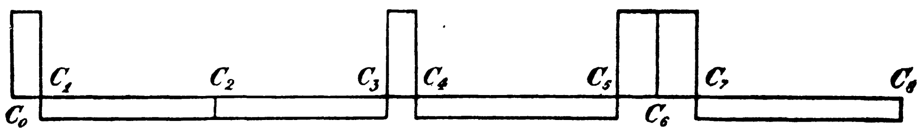

Fig. 1.

Per la (a) risulta $z^{(n-1)}(C_2)=0$ (ove per brevità indichiamo, qui e nel seguito, con $F(C)$ il valore che $F(x)$ assume per x uguale all'ascissa di C).

Poi di seguito a (C_0, C_2) si prenda un intervallo (C_2, C_{2^2}) di ampiezza $\alpha+\beta$, e sia $C_3 - C_2 = \beta$, e si prenda $z^{(n)}(x)=\theta_1$, per $C_2 < x < C_3$; $z^{(n)}(x)=\lambda$, per $C_3 < x < C_{2^2}$.

Risulta evidentemente $z^{(n-1)}(C_{2^2})=0$, $z^{(n-2)}(C_{2^2})=0$; ed inoltre, in tutto l'intervallo (C_0, C_{2^2}), la derivata $z^{(n-2)}(x)$ ha segno costante (positivo o negativo secondochè è $\lambda \gtrless 0$), e si annulla soltanto negli estremi.

Se ora prendiamo di seguito a (C_0, C_{2^2}), che ha ampiezza $2(\alpha+\beta)$, un intervallo (C_{2^2}, C_{2^3}), di ampiezza $2(\alpha+\beta)k_3$, noi potremo determinare k_3 in modo che risulti

$$z^{(n-1)}(C_{2^3}) = z^{(n-2)}(C_{2^3}) = z^{(n-3)}(C_{2^3}) = 0.$$

Infatti, suddividiamo (C_{2^2}, C_{2^3}) in quattro parti mediante i punti di ascisse

$$C_{2^2} \equiv 2(\alpha+\beta), \qquad C_5 \equiv 2(\alpha+\beta)+\beta k_3, \qquad C_6 \equiv 2(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)k_3,$$
$$C_7 \equiv 2(\alpha+\beta)+(2\alpha+\beta)k_3, \qquad C_{2^3} \equiv 2(\alpha+\beta)(1+k_3),$$

e prendiamo $z^{(n)}(x)=\theta_1$, per $C_{2^2} < x < C_5$, e per $C_7 < x < C_{2^3}$; e $z^{(n)}(x)=\lambda$, per $C_5 < x < C_7$.

Allora, qualunque sia k_3, risulta $z^{(n-1)}(C_{2^3}) = z^{(n-2)}(C_{2^3}) = 0$, e inoltre siccome in (C_{2^2}, C_{2^3}) $z^{(n-2)}(x)$ ha segno costante (contrario a quello che ha in (C_0, C_{2^2})) e si annulla soltanto negli estremi, possiamo determinare k_3 in modo che sia

$$\int_{2(\alpha+\beta)}^{2(\alpha+\beta)(1+k_3)} z^{(n-2)}(x)\,dx = -\int_0^{2(\alpha+\beta)} z^{(n-2)}(x)\,dx,$$

e quindi anche $z^{(n-3)}(C_{2^3})=0$; e k_3 risulta certamente >0.

In generale, avendo determinato l'intervallo (C_0, C_{2^s}) e definito in esso la $z^{(n)}(x)$, prenderemo $(C_{2^s}, C_{2^{s+1}})$ di ampiezza $[2(\alpha+\beta)(1+k_3)(1+k_4)\dots(1+k_s)]k_{s+1}$.

Poi, se j è un numero intero tale che $2^s \leqq j < 2^{s+1}$, per determinare l'ampiezza di (C_j, C_{j+1}), considereremo l'intervallo (C_{j-2^s}, C_{j-2^s+1}), e, secondochè in questo intervallo è: I) $z^{(n)}(x)=\lambda$, Potremo quindi determinare un intero $m_1 \geqslant 1$, tale che, per ogni $m > m_1$, sia in tutto (x_0, x_ω)

(18) $$|z_m(x)| \leqslant \frac{\delta}{2}, \qquad |z_m^{(r)}(x)| \leqslant \frac{\delta}{2}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Consideriamo ora la successione di curve

$$C_m^{[n]}: \quad y = y_m(x), \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_\omega), \quad m = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots,$$

con

$$y_m(x) \equiv y_*(x) + z_m(x).$$

Evidentemente ogni curva $C_m^{[n]}$ è una curva $C^{[n]}$. Considerata la differenza

$$f(x, y_m, y'_m, \ldots, y_m^{(n)}) - f(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n)}) = f(x, y_m, y'_m, \ldots, y_m^{(n)}) -$$
$$- f(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n-1)}, y_m^{(n)}) + f(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n-1)}, y_m^{(n)}) - f(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n)}),$$

e tenuto conto della formula di definizione della funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS, abbiamo

(19) $$I_{C_m^{[n]}}^{[n]} - I_{C_*^{[n]}}^{[n]} = \int_{x_0}^{x_\omega} f(x, y_m, y'_m, \ldots, y_m^{(n)})dx - \int_{x_0}^{x_\omega} f(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n)})dx =$$
$$= \int_{x_0}^{x_\omega} [f(x, y_m, y'_m, \ldots, y_m^{(n)}) - f(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n-1)}, y_m^{(n)})]dx +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_\omega} (y_m^{(n)} - y_*^{(n)}) f_{y^{(n)}}(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n)})dx + \int_{x_0}^{x_\omega} \mathcal{E}(x, y_*, y_*', \ldots, y_*^{(n)}; y_m^{(n)})dx.$$

---

oppure II) $z^{(n)}(x) = \theta_1$, prenderemo l'ampiezza di (C_j, C_{j+1}) uguale a quella dell'intervallo considerato, moltiplicata rispettivamente per $\frac{\beta}{\alpha} k_{s+1}$, se ha luogo il caso I), per $\frac{\alpha}{\beta} k_{s+1}$, se ha luogo il caso II), e in (C_j, C_{j+1}) definiremo $z^{(n)}(x) = \lambda$, se in (C_{j-2^s}, C_{j-2^s+1}) è $z^{(n)}(x) = \theta_1$, e viceversa.

Qualunque sia k_{s+1}, risulta $z^{(n-1)}(C_{2^{s+1}}) = z^{(n-2)}(C_{2^{s+1}}) = \ldots = z^{(n-s)}(C_{2^{s+1}}) = 0$, e potremo determinare k_{s+1} in modo che sia anche $z^{(n-(s+1))}(C_{2^{s+1}}) = 0$.

Alla fine veniamo a determinare un intervallo (C_0, C_{2^n}) di ampiezza

$$2(\alpha + \beta)(1 + k_3)(1 + k_4) \ldots (1 + k_n),$$

tale che la somma delle sue parti, in cui è $z^{(n)}(x) = \lambda$, ha ampiezza

$$2\alpha(1 + k_3) \ldots (1 + k_n),$$

e quella delle parti, in cui è $z^{(n)}(x) = \theta_1$, ha ampiezza

$$2\beta(1 + k_3) \ldots (1 + k_n).$$

Inoltre avremo

$$z^{(n-1)}(C_{2^n}) = z^{(n-2)}(C_{2^n}) = \ldots = z'(C_{2^n}) = z(C_{2^n}) = 0.$$

Ciò premesso, per costruire la richiesta funzione $z_m(x)$, basta dividere l'intervallo (x_r, x_{r+1}), in parti proporzionali a quelle in cui è diviso (C_0, C_{2^n}) e in ognuna di queste parti prendere per valore di $z_m^{(n)}(x)$, quello che $z^{(n)}(x)$ ha nella parte corrispondente di (C_0, C_{2^n}).

Preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, possiamo, come al n.° 2, determinare un numero m_2 in modo che, per $m > m_2$, ciascuno dei due integrali che figurano per primi all'ultimo membro della (19), sia, in valore assoluto, $< \varepsilon$.

Rimane da esaminare l'ultimo integrale. Indicato con $\Delta_1^{(m)}$, il plurintervallo somma dei plurintervalli $\Delta_{1,r}^{(m)}$, $(r=1, 2,\ldots, m)$, e con $\Delta_2^{(m)}$ il plurintervallo somma dei $\Delta_{2,r}^{(m)}$, $(r=1, 2,\ldots, m)$, abbiamo

$$\int_{x_0}^{x_\omega} \mathcal{E} dx = \int_{\Delta_1^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}; y_0^{(n)}+\lambda) dx + \\ + \int_{\Delta_2^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}; y_0^{(n)}+\theta_1) dx,$$

ove per la (12), in virtù delle (14), risulta

$$\int_{\Delta_1^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}; y_0^{(n)}+\lambda) dx < -\eta l_1,$$

essendo l_1 la lunghezza del plurintervallo $\Delta_1^{(m)}$.

D'altra parte, tenendo presente la formula di definizione della funzione $\mathcal{E}$, e applicando alla differenza

$$f(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}+\theta_1) - f(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)})$$

la formula del valor medio, abbiamo

$$\int_{\Delta_2^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}; y_0^{(n)}+\theta_1) dx = \\ = \int_{\Delta_2^{(m)}} \theta_1 [f_{y^{(n)}}(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}+\tilde{\theta}) - f_{y^{(n)}}(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)})] dx$$

con $|\tilde{\theta}| < |\theta_1|$.

Pertanto prendendo il valore assoluto, essendo *a fortiori* $|\tilde{\theta}| < \theta_0$, per la (15) risulta

$$(20) \quad \left| \int_{\Delta_2^{(m)}} \mathcal{E} dx \right| \leq |\theta_1| \int_{\Delta_2^{(m)}} | f_{y^{(n)}}(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}+\tilde{\theta}) - \\ - f(x, y_*, y_*',\ldots, y_*^{(n-1)}, y_0^{(n)}) | dx \leq \frac{\eta}{2} \left| \frac{\theta_1}{\lambda} \right| l_2,$$

l_2 essendo la lunghezza del plurintervallo $\Delta_2^{(m)}$.

Abbiamo quindi dalla (19), tenendo conto della (17), e osservando che dalle (16) e (17) si deduce $l_1 = \dfrac{l\theta_1}{\theta_1 - \lambda} = \left| \dfrac{\theta_1}{\theta_1 - \lambda} \right| l$,

$$(21) \quad I_{C_m^{[n]}}^{[n]} - I_{C_*^{[n]}}^{[n]} < 2\varepsilon - \eta l_1 + \frac{\eta}{2} l_2 \left| \frac{\theta_1}{\lambda} \right| = 2\varepsilon - \frac{\eta}{2} l_1 = 2\varepsilon - \frac{\eta}{2} l \left| \frac{\theta_1}{\theta_1 - \lambda} \right| \leq -\frac{\eta}{4} l \left| \frac{\theta_1}{\theta_1 - \lambda} \right|$$

se è $\varepsilon \leqq \frac{\eta}{8} l \left| \frac{\theta_1}{\theta_1 - \lambda} \right|$, per ogni $m > m_1$, m_2; e si conclude in modo analogo alla fine del n.° 2, tenendo ora conto della continuità della funzione $\mathcal{E}$.

4. - Condizione necessaria per la continuità.

Dal teorema del n.° 3 e dal capoverso δ) del n.° 1 si deduce che *se l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è funzione continua deve essere*

$$\mathcal{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}; \tilde{y}^{(n)}) = 0,$$

per tutte le coppie $y^{(n)}$, $\tilde{y}^{(n)}$, in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ interni al campo $A^{[n]}$ e in quelli di accumulazione di tali punti, e quindi f deve essere funzione lineare della $y^{(n)}$, ossia

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv f_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + y^{(n)} f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

§ 3. - La semicontinuità su una data curva $C^{[n]}$, definita da una funzione con derivata di ordine n limitata.

5. - Prima condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.

Sia

$$C_0^{[n]}: \quad y = y_0(x), \qquad (a_0 \leqq x \leqq b_0),$$

una curva $C^{[n]}$, completamente interna al campo $A^{[n]}$, e tale che esista un numero finito $N > 0$, in modo che si abbia in tutti i punti di (a_0, b_0), in cui la $\frac{d^n y_0(x)}{dx^n}$ esiste finita,

$$\left| \frac{d^n y_0(x)}{dx^n} \right| \leqq N. \tag{22}$$

Allora, se l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è semicontinuo inferiormente sulla curva $C_0^{[n]}$, lo pseudointervallo dei valori di x dell'intervallo (a_0, b_0), nei quali esiste finita la derivata $\frac{d^n y_0(x)}{dx^n}$, ed è

$$f_{y^{(n)} y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)) < 0, \tag{23}$$

$\left(\textit{con } y_0^{(r)}(x) \equiv \frac{d^r y_0(x)}{dx^r},\ r = 1, 2, \ldots, n \right)$, *deve avere misura nulla.*

Dimostrazione. - Supponiamo invece che la misura dello pseudointervallo dei punti di (a_0, b_0), in cui esiste finita la $y_0^{(n)}(x)$, ed è verificata la (23), non sia nulla. Indicatala con 2μ, possiamo trovare un $\eta > 0$ e un insieme chiuso E di questi punti, di misura $\mu_1 > \mu$ e tale che in esso sia sempre

$$f_{y^{(n)} y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)) < -\frac{3}{2} \eta.$$

Inoltre per la continuità della $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$, possiamo determinare un numero positivo $\delta<1$, in modo che, se x è un punto qualunque di E, si abbia

$$(24) \qquad f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x,\, y_0(x),\, y_0'(x),\ldots,\, y_0^{(n-1)}(x),\, y^{(n)}) < -\eta,$$

ogniqualvolta sia soddisfatta la disuguaglianza $|y^{(n)}-y_0^{(n)}(x)|\leq\delta$, e che inoltre tutti i punti $(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n-1)})$ soddisfacenti alle disuguaglianze

$$a_0\leq x\leq b_0\,; \qquad |y-y_0(x)|\leq\delta\,; \qquad |y^{(r)}-y_0^{(r)}(x)|\leq\delta, \quad (r=1,\, 2,\ldots,\, n-1)$$

appartengano al campo $A^{[n]}$.

Indicato con M il massimo modulo di $f(x,\, y_0(x),\, y_0'(x),\ldots,\, y_0^{(n-1)}(x),\, y^{(n)})$ per tutti gli x di $(a_0,\, b_0)$ e per tutti gli $y^{(n)}$ soddisfacenti alla disuguaglianza $|y^{(n)}|\leq N+1$, preso un $\varepsilon>0$ ad arbitrio e subordinato ad esso un $\sigma>0$, tale che sia $M\sigma<\varepsilon$, è possibile determinare un numero finito di intervalli di $(a_0,\, b_0)$, non sovrapponentisi, di lunghezza complessiva non superiore a $\mu_1+\sigma$, e tali che in essi siano contenuti tutti i punti di E.

Se qualcuno di questi intervalli ha ampiezza $>\delta$, noi lo divideremo in un numero finito di parti, ognuna delle quali abbia ampiezza non superiore a δ, e fra gli intervalli così ottenuti sopprimeremo quelli che non contengono almeno un punto di E. Verremo così ad avere un numero finito di intervalli di $(a_0,\, b_0)$

$$(25) \qquad (x_0^{(1)},\, x_\omega^{(1)}), \quad (x_0^{(2)},\, x_\omega^{(2)}),\ldots, \quad (x_0^{(\nu)},\, x_\omega^{(\nu)}),$$

di lunghezza complessiva non superiore a $\mu_1+\sigma$, e che contengono tutti i punti di E.

Fissato un numero $\lambda>0$, non superiore a $\frac{\delta}{2}$, procedendo come al n.º 2 e prendendo per $(x_0,\, x_\omega)$ successivamente ciascuno degli intervalli (25), si costruisca su ciascuno di essi la funzione $z_m(x)$ e si definisca poi una curva

$$C_m^{[n]}: \quad y=y_m(x), \qquad (a_0\leq x\leq b_0)$$

ponendo per ogni x, appartenente ad almeno uno degli intervalli (25),

$$y_m(x)\equiv y_0(x)+z_m(x),$$

e negli altri punti di $(a_0,\, b_0)$

$$y_m(x)\equiv y_0(x).$$

Per quanto si è visto al n.º 2 esiste un numero $m_0>0$, tale che, per ogni $m>m_0$, sono verificate le (7), e quindi la curva $C_m^{[n]}$ appartiene al campo $A^{[n]}$; inoltre tenuto conto della (22) l'integrale $I_{C_m^{[n]}}^{[n]}$ esiste finito e quindi $C_m^{[n]}$ è una curva $C^{[n]}$.

Considerata la differenza

$$I_{C_m^{[n]}}^{[n]}-I_{C_0^{[n]}}^{[n]}=\int_{a_0}^{b_0} f(x,\, y_m,\, y'_m,\ldots,\, y_m^{(n)})\,dx-\int_{a_0}^{b_0} f(x,\, y_0,\, y_0',\ldots,\, y_0^{(n)})\,dx,$$

abbiamo evidentemente, e procedendo poi come al n.° 2,

$$(26)\qquad I_{C_m^{[n]}}^{[n]}-I_{C_0^{[n]}}^{[n]}=\sum_{\mu=1}^{\nu}\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}}[f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})-f(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n)})]dx=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}}[f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})-f(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n-1)}, y_m^{(n)})]dx\right]+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}}z_m^{(n)}(x)f_{y^{(n)}}(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n)})dx\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}}\{z_m^{(n)}(x)\}^2 f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n-1)}, \tilde{y}_m^{(n)})dx\right],$$

ove $\tilde{y}_m^{(n)}(x)$ è compreso fra $y_0^{(n)}(x)$ e $y_0^{(n)}(x)+z_m^{(n)}(x)$.

In modo analogo al n.° 2 possiamo determinare un numero $m'>0$ in modo che, per ogni intero $m>m'$, ciascuna delle due somme, che figurano per prime all'ultimo membro della (26), sia in modulo $<\varepsilon$. Inoltre, indicato con $C(E)$ il complementare di E rispetto agli intervalli (25), abbiamo evidentemente

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}}\{z_m^{(n)}(x)\}^2 f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n-1)}, \tilde{y}_m^{(n)})\,dx\right]=\frac{\lambda^2}{2}\int_E f_{y^{(n)}y^{(n)}}dx+\frac{\lambda^2}{2}\int_{C(E)} f_{y^{(n)}y^{(n)}}dx,$$

e quindi tenendo conto che in ogni punto E è verificata la (24), mentre in ogni punto di $C(E)$, la funzione integranda è in modulo $\leqq M$, e ricordando che la misura di $C(E)$ è non superiore a σ, dalla (26) abbiamo, siccome $\lambda<\frac{\delta}{2}<1$,

$$(27)\qquad I_{C_m^{[n]}}^{[n]}-I_{C_0^{[n]}}^{[n]}<2\varepsilon-\eta\,\frac{\lambda^2}{2}\,\mu_1+\frac{1}{2}\,M\sigma<\frac{5}{2}\,\varepsilon-\frac{1}{2}\,\eta\lambda^2\mu<-\frac{1}{4}\,\eta\lambda^2\mu,$$

se è $\varepsilon<\frac{1}{10}\,\eta\lambda^2\mu$, per ogni $m>m_0$, m'.

Ma per le (6), preso $\varrho>0$ ad arbitrio, possiamo determinare un numero positivo m_ϱ tale che per ogni $m>m_\varrho$, la curva $C_m^{[n]}$ appartenga propriamente all'intorno $(\varrho)^n$ della $C_0^{[n]}$, e quindi per la (27) l'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ non è semicontinuo inferiormente sulla curva $C_0^{[n]}$.

Pertanto se $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ è semicontinuo inferiormente sulla curva $C_0^{[n]}$, lo pseudo-intervallo dei punti di (a_0, b_0), nei quali esiste finita la derivata $y_0^{(n)}(x)$ ed è verificata la (23), deve avere misura nulla.

Osservazione. - È da rilevare, per il seguito, che in ciascuno degli estremi dell'intervallo (a_0, b_0) la funzione $y_m(x)$ e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini hanno rispettivamente gli stessi valori della $y_0(x)$ e delle sue derivate dei primi $n-1$ ordini.

6. - Seconda condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.

Se la curva

$$C_0^{[n]}: \quad y=y_0(x), \qquad (a_0 \leqslant x \leqslant b_0),$$

soddisfa alle condizioni del n.° 5, condizione necessaria, affinchè l'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *sia semicontinuo inferiormente sulla curva* $C_0^{[n]}$, *è che abbia misura nulla lo pseudointervallo dei valori di* x *dell'intervallo* (a_0, b_0), *nei quali esiste finita la* $y_0^{(n)}(x)$, *e non è verificata per tutti gli* $y^{(n)}$ *la disuguaglianza*

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x),\ldots, y_0^{(n)}(x);\ y^{(n)}) \geqslant 0, \tag{28}$$

$\left(ove\ y_0^{(r)}(x) \equiv \frac{d^r y_0(x)}{dx^r},\ r=1, 2,\ldots, n\right).$

Dimostrazione. - Supposto invece che lo pseudointervallo E' dei punti di (a_0, b_0), nei quali esiste finita la $y_0^{(n)}(x)$, ed esiste almeno un numero finito $y^{(n)}$, tale che risulti

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x),\ldots, y_0^{(n)}(x);\ y^{(n)}) < 0,$$

abbia misura positiva, con considerazioni analoghe a quelle fatte dal TONELLI [10], ma opportunamente modificate, possiamo determinare un numero fisso λ, diverso dallo zero, un numero $\eta > 0$ ed uno pseudointervallo E', di misura $\mu_1 > 0$, in ogni punto del quale esista finita la $y_0^{(n)}(x)$ e sia verificata la disuguaglianza

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x),\ldots, y_0^{(n)}(x);\ y_0^{(n)}(x)+\lambda) < -\eta. \tag{29}$$

Preso un numero positivo $\delta < 1$, tale che tutti i punti $(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ soddisfacenti alle disuguaglianze

$$a_0 \leqslant x \leqslant b_0; \qquad |y-y_0(x)| \leqslant \delta; \qquad |y^{(r)}-y_0^{(r)}(x)| \leqslant \delta, \quad (r=1, 2,\ldots, n-1)$$

appartengano al campo $A^{[n]}$, indicato con M il massimo modulo di

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x),\ldots, y_0^{(n)}(x);\ y^{(n)}),$$

per tutti gli x di (a_0, b_0) e per tutti gli $y^{(n)}$, con $|y^{(n)}| \leqslant N+|\lambda|$, ($N$ essendo il numero che figura nella (22)), preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e subordinato ad esso un $\sigma > 0$, con $\eta\sigma < \varepsilon$ e $M\sigma < \varepsilon$, ripetendo le considerazioni fatte al n.° 5, possiamo determinare un numero finito di intervalli di (a_0, b_0), non sovrapponentisi,

$$(x_0^{(1)}, x_\omega^{(1)}), \quad (x_0^{(2)}, x_\omega^{(2)}),\ldots, \quad (x_0^{(\nu)}, x_\omega^{(\nu)}), \tag{30}$$

([10]) Vedi L. TONELLI, opera cit. in ([2]), Vol. I, n.° 91, *a*) pag. 256.

di lunghezza complessiva $\bar{l}$ non superiore a $\mu_1+\sigma$, i quali contengano tutti i punti di E, siano tali che ciascuno di essi abbia ampiezza non superiore a δ, e contenga almeno un punto di E.

Per la continuità della $f_{y^{(n)}}$ è possibile determinare un numero $\theta_0>0$, in modo che, per ogni x appartenente ad uno almeno degli intervalli (30), sia, per ogni $|\theta|\leqslant\theta_0$,

$$(31)\qquad |f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x),\dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)+\theta)- \\ -f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x),\dots, y_0^{(n)}(x))|<\frac{\eta}{2|\lambda|}.$$

Fissato un numero θ_1, di segno contrario a quello di λ, con $|\theta_1|\leqslant\theta_0$, $|\theta_1|<|\lambda|$, procedendo come al n.° 3 e prendendo per (x_0, x_ω), successivamente, ciascuno degli intervalli (30), si costruisca su ciascuno di essi la funzione $z_m(x)$ ([11]), e si definisca la curva

$$C_m^{[n]}:\quad y=y_m(x),\qquad (a_0\leqslant x\leqslant b_0),$$

ponendo, per ogni x appartenente ad uno almeno degli intervalli (30),

$$y_m(x)\equiv y_0(x)+z_m(x),$$

e negli altri punti di (a_0, b_0),

$$y_m(x)\equiv y_0(x).$$

Per quanto abbiamo visto al n.°.3 esiste un numero $m_1>1$ tale che, per ogni $m>m_1$, sono verificate le (18) in tutti i punti appartenenti agli intervalli (30), e quindi la curva $C_m^{[n]}$ appartiene al campo $A^{[n]}$; per la (22) esiste finito l'integrale $I_{C_m^{[n]}}^{[n]}$, e quindi si conclude facilmente che $C_m^{[n]}$ è una curva $C^{[n]}$.

Considerata la differenza

$$I_{C_m^{[n]}}^{[n]}-I_{C_0^{[n]}}^{[n]}=\int_{a_0}^{b_0} f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})dx-\int_{a_0}^{b_0} f(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n)})dx,$$

abbiamo evidentemente, e procedendo poi in modo analogo al n.° 3,

$$(32)\quad I_{C_m^{[n]}}^{[n]}-I_{C_0^{[n]}}^{[n]}=\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}}\{f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})-f(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n)})\}\,dx\right]=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}}\{f(x, y_m, y'_m,\dots, y_m^{(n)})-f(x, y_0, y_0',\dots, y_0^{(n-1)}, y_m^{(n)})\}\,dx\right]+$$

([11]) È da tener presente che, nel secondo membro della (16) del n.° 3, si dovrà sostituire al posto di l, successivamente, l'ampiezza di ognuno degli intervalli (30).

$$+\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}} z_m^{(n)}(x) f_{y^{(n)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) dx\right]+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}} \mathcal{E}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)};\ y_m^{(n)}) dx\right].$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte al n.° 3, possiamo determinare un numero $m'>0$ in modo che per ogni intero $m>m'$ ciascuna delle due somme che figurano, per prime, nell'ultimo membro della (32) sia, in valore assoluto, minore di ε.

Indicando con $\overline{\Delta}_1^{(m)}$ il plurintervallo (chiuso) somma di tutti i $\Delta_1^{(m)}$, di cui al n.° 3 e relativi ai vari intervalli (30), e con $\overline{\Delta}_2^{(m)}$ il plurintervallo somma di tutti i $\Delta_2^{(m)}$, di cui al n.° 3 e relativi ai vari intervalli (30), e con $C(E_1^{(m)})$ l'insieme complementare, rispetto a $\overline{\Delta}_1^{(m)}$, di quella parte $E_1^{(m)}$ di E, che è contenuta in $\overline{\Delta}_1^{(m)}$, abbiamo

$$(33)\qquad \sum_{\mu=1}^{\nu}\left[\int_{x_0^{(\mu)}}^{x_\omega^{(\mu)}} \mathcal{E}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)};\ y_m^{(n)}) dx\right]=$$

$$=\int_{\overline{\Delta}_1^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)};\ y_0^{(n)}+\lambda) dx+\int_{\overline{\Delta}_2^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)};\ y_0^{(n)}+\theta_1) dx=$$

$$=\int_{E_1^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)};\ y_0^{(n)}+\lambda) dx+\int_{C(E_1^{(m)})} \mathcal{E}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)};\ y_0^{(n)}+\lambda) dx+$$

$$+\int_{\overline{\Delta}_2^{(m)}} \mathcal{E}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)};\ y_0^{(n)}+\theta_1) dx.$$

In ogni punto di $E_1^{(m)}$ è verificata la (29), e in ogni punto di $C(E_1^{(m)})$, la cui misura è non superiore a σ, il massimo modulo della funzione integranda è non superiore ad M, e quindi, ragionando sull'integrale esteso a $\overline{\Delta}_2^{(m)}$ in modo analogo al n.° 3 tenendo ora conto della (31) (cfr. la (20)), si deduce dalla (32), indicando con $\overline{l}_2$ la lunghezza del plurintervallo $\overline{\Delta}_2^{(m)}$,

$$I_{C_m^{[n]}}^{[n]}-I_{C_0^{[n]}}^{[n]}<2\varepsilon-\eta m(E_1^{(m)})+M\sigma+\frac{\eta}{2}\left|\frac{\theta_1}{\lambda}\right|\overline{l}_2,$$

e quindi, poichè la misura $m(E_1^{(m)})$ di $E_1^{(m)}$ non è inferiore alla differenza fra la lunghezza $\overline{l}_1$ del plurintervallo $\overline{\Delta}_1^{(m)}$ e il numero σ, siccome è $\eta\sigma<\varepsilon$, ed anche $M\sigma<\varepsilon$, risulta,

$$I_{C_m^{[n]}}^{[n]}-I_{C_0^{[n]}}^{[n]}<2\varepsilon-\eta(\overline{l}_1-\sigma)+M\sigma+\frac{\eta}{2}\left|\frac{\theta_1}{\lambda}\right|\overline{l}_2<4\varepsilon-\eta\overline{l}_1+\frac{\eta}{2}\left|\frac{\theta_1}{\lambda}\right|\overline{l}_2.$$

Sommando membro a membro le analoghe delle (16) relative a tutti gli intervalli (30), e così pure le analoghe delle (17), abbiamo

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}, \qquad \bar{l}_1\lambda + \bar{l}_2\theta_1 = 0,$$

da cui si deduce

$$\bar{l}_1 = \frac{\theta_1 \bar{l}}{\theta_1 - \lambda} = \left|\frac{\theta_1}{\lambda - \theta_1}\right| \bar{l}, \qquad \bar{l}_2 = \frac{\lambda \bar{l}}{\lambda - \theta_1} = \left|\frac{\lambda}{\lambda - \theta_1}\right| \bar{l},$$

e quindi risulta

$$I^{[n]}_{C^{[n]}_m} - I^{[n]}_{C^{[n]}_0} < 4\varepsilon - \frac{\eta}{2}\bar{l}\left|\frac{\theta_1}{\lambda - \theta_1}\right| \leq 4\varepsilon - \frac{\eta}{2}\mu_1\left|\frac{\theta_1}{\lambda - \theta_1}\right| < -\frac{\eta}{4}\mu_1\left|\frac{\theta_1}{\lambda - \theta_1}\right|,$$

se è $\varepsilon < \frac{1}{16}\eta\mu_1\left|\frac{\theta_1}{\lambda - \theta_1}\right|$. E si conclude poi in modo analogo al n.° 5.

Osservazione. - Può ripetersi l'osservazione fatta alla fine del n.° 5.

7. - Condizione necessaria per la continuità.

Dal teorema del n.° 6, tenendo presente il capoverso δ) del n.° 1, si deduce che: *se la curva*

$$C^{[n]}_0: \quad y = y_0(x), \qquad (a_0 \leq x \leq b_0)$$

soddisfa alle condizioni del n.° 5, condizione necessaria, affinchè l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ sia una funzione continua sulla curva $C^{[n]}_0$, è che, per tutti i valori di $y^{(n)}$, la funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ abbia, in tutti i punti della curva $C^{[n]}_0$, la forma seguente

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv f_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + y^{(n)} f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad (^{12}).$$

8. - Curve $C^{[n]}$ definite da funzioni aventi derivata di ordine n finita e continua.

Se

$$C^{[n]}_0: \quad y = y_0(x), \qquad (a_0 \leq x \leq b_0)$$

è una curva $C^{[n]}$ completamente interna al campo $A^{[n]}$, tale che la derivata di ordine n della $y_0(x)$ sia finita e continua in tutto l'intervallo (a_0, b_0), le condizioni necessarie date ai n.i 5 e 6 assumono la forma seguente:

a). Condizione necessaria, affinchè l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ sia semicontinuo inferiormente sulla curva $C^{[n]}_0$, è che si abbia, per ogni x di (a_0, b_0),

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)) \geq 0.$$

b). Condizione necessaria, affinchè l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ sia semicontinuo

(12) Per la dimostrazione cfr. L. TONELLI, opera cit. in (2), Vol. I, n.° 93, pp. 258-259.

inferiormente sulla curva $C_0^{[n]}$, *è che si abbia, per ogni* x *di* (a_0, b_0) *e per tutti i valori di* $y^{(n)}$,

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)\,;\; y^{(n)}) \geqslant 0.$$

Ciò segue immediatamente dai teoremi dei n.i 5 e 6 rispettivamente.

Osservazione. - Può ripetersi l'osservazione fatta alla fine del n.° 5.

§ 4. - La semicontinuità su una data curva $C^{[n]}$ (nel caso generale).

9. - Prima condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.

Se

$$C_0^{[n]}:\quad y = y_0(x), \qquad (a_0 \leqslant x \leqslant b_0),$$

è una curva $C^{[n]}$, *completamente interna al campo* $A^{[n]}$, *condizione necessaria, affinchè l'integrale* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *sia una funzione semicontinua inferiormente sulla curva* $C_0^{[n]}$, *è che lo pseudointervallo dei valori di* x *dell'intervallo* (a_0, b_0), *nei quali esiste finita la derivata* $y_0^{(n)}(x)$, *ed è*

$$(34)\qquad f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)) < 0,$$

$\left(\text{con } y_0^{(r)}(x) \equiv \dfrac{d^r y_0(x)}{dx^r},\ r = 1, 2, \ldots, n\right)$, *abbia misura nulla.*

Dimostrazione. - Supposto invece che la misura dello pseudointervallo dei punti di (a_0, b_0), nei quali esiste finita la $y_0^{(n)}(x)$ ed è verificata la (34), sia >0 e indicatala con 2μ, possiamo trovare un $\eta > 0$ e un insieme chiuso E' di questi punti, di misura $\mu' > \mu$, e tale che, in esso, sia sempre

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)) < -\frac{3}{2}\eta,$$

e che il modulo di $y_0^{(n)}(x)$ ammetta, in E', un limite superiore finito che indicheremo con N.

Per la continuità della $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$ possiamo determinare un numero positivo $\delta < 1$, in modo che, se $\bar{x}$ è un punto qualunque di E', e $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ è un punto di $A^{[n]}$, soddisfatte le disuguaglianze

$$(35)\qquad \begin{cases} |x - \bar{x}| \leqslant 2\delta\,; \qquad |y - y_0(\bar{x})| \leqslant 2\delta\,; \\ |y^{(r)} - y_0^{(r)}(\bar{x})| \leqslant 2\delta, \qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

sia

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) < -\eta,$$

δ essendo inoltre scelto in modo che i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, soddisfacenti alle prime $n+1$ delle (35), appartengano al campo $A^{[n]}$.

Sia M_0 il massimo modulo di $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ per ogni $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

soddisfacente alle prime $n+1$ delle (35), e per ogni $|y^{(n)}| \leqq N+1$, e sia M il massimo modulo di $f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ per gli stessi valori di $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Si indichi poi con D_n, il valore $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} 2^{n-2} \cdot 3^{n-3} \cdot \ldots \cdot (n-3)^3 (n-2)^2 (n-1)$ del determinante

$$(35^*) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2n-1 & 2n-2 & \ldots & n \\ (2n-1)(2n-2) & (2n-2)(2n-3) & \ldots & n(n-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2n-1)(2n-2)\ldots(n+1) & (2n-2)(2n-3)\ldots n & \ldots & n(n-1)\ldots 2 \end{vmatrix}$$

e con Γ_n il maggiore dei valori assoluti dei suoi minori di ordine $n-1$.

Fissato un numero positivo ε_0, con

$$(36) \qquad \varepsilon_0 \leqq \frac{\delta}{K}, \qquad \varepsilon_0 \leqq \frac{1}{44}\eta\lambda^2\mu',$$

ove

$$K = \left(1 + \frac{\Gamma_n}{|D_n|} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} n^2\right) \frac{1}{\mu'},$$

determiniamo un numero positivo σ_0, tale che sia

$$(36^*) \qquad M_0\sigma_0 < \varepsilon_0, \qquad M\sigma_0 < \varepsilon_0,$$

e che, se J è uno pseudointervallo di (a_0, b_0) di misura non superiore a σ_0, risulti

$$(37) \qquad \int_J |f(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x))| \, dx < \varepsilon_0.$$

Sia R un numero intero positivo $\geqq \frac{1}{\varepsilon_0}$.

Costruita la successione $g_1, g_2, g_3, \ldots$, degli intervalli di (a_0, b_0), contigui allo pseudointervallo E', sia ν'_R il minimo intero tale che, indicato il J_R il plurintervallo costituito da tutti gli intervalli $g_{\nu'_R}, g_{\nu'_R+1}, g_{\nu'_R+2}, \ldots$, sia

$$(38) \qquad \int_{J_R} |y_0^{(n)}(x)| \, dx < \frac{1}{2R},$$

e inoltre la lunghezza di J_R non sia superiore a σ_0.

Soppressi dall'intervallo (a_0, b_0) i punti interni agli intervalli $g_1, g_2, \ldots, g_{\nu'_R-1}$, nonchè i punti a_0, b_0 se sono estremi di uno almeno di questi intervalli, si ottiene un numero finito di intervalli di (a_0, b_0), $i_1', i_2', \ldots, i'_{\nu^*_R}$, (con $\nu^*_R \leqq \nu'_R$), di lunghezza complessiva non superiore a $\mu' + \sigma_0$, e contenenti tutti i punti di E'.

Fra gli intervalli così determinati, possiamo trovarne un numero finito, $i_j^{(R)}$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu_R)$, contenenti una porzione di E' di misura complessiva non inferiore a $\frac{1}{2}\mu'$, e tali che, indicato con $E_j^{(R)}$ lo pseudointervallo costituito dai punti di E' contenuti in $i_j^{(R)}$, con $C(E_j^{(R)})$ il complementare di $E_j^{(R)}$ rispetto all'intervallo $i_j^{(R)}$, e con $i_j^{(R)}$ anche l'ampiezza dell'intervallo $i_j^{(R)}$, si abbia

$$(39) \qquad \frac{1}{i_j^{(R)}}\int_{C(E_j^{(R)})} |y_0^{(n)}(x)|\, dx < \frac{1}{\mu' R}, \qquad (j=1, 2,\ldots, \nu_R).$$

Infatti, in caso contrario, potremmo trovare fra gli intervalli i_j', $(j=1, 2,\ldots, \nu_R^*)$ un numero finito di essi, $i'_{s_1}, i'_{s_2},\ldots, i'_{s_p}$ contenenti una porzione di E' di misura complessiva $>\frac{1}{2}\mu'$, e tali che, indicati con $C(E'_{s_1}), C(E'_{s_2}),\ldots, C(E'_{s_p})$ i complementari, rispetto agli intervalli $i'_{s_1}, i'_{s_2},\ldots, i'_{s_p}$, delle porzioni $E'_{s_1}, E'_{s_2},\ldots, E'_{s_p}$ di E', contenute rispettivamente in $i'_{s_1}, i'_{s_2},\ldots, i'_{s_p}$, si abbia

$$\int_{C(E'_{s_t})} |y_0^{(n)}(x)|\, dx \geqslant \frac{i'_{s_t}}{\mu' R}, \qquad (t=1, 2,\ldots, p),$$

e quindi, sommando membro a membro, e indicando con $C(E')$ il complementare di E' rispetto agli intervalli i_j', $(j=1, 2,\ldots, \nu_R^*)$,

$$\int_{C(E')} |y_0^{(n)}(x)|\, dx \geqslant \frac{1}{\mu' R}(i'_{s_1}+i'_{s_2}+\ldots+i'_{s_p}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\mu' R}[m(E'_{s_1})+m(E'_{s_2})+\ldots+m(E'_{s_p})] > \frac{1}{\mu' R}\frac{\mu'}{2} = \frac{1}{2R},$$

contrariamente alla (38).

Il nostro asserto è con ciò provato, e conveniamo di prendere, come intervalli $i_j^{(R)}$, quelli, fra gli i_j' che soddisfano alla (39), i cui primi estremi hanno la minima ascissa; inoltre possiamo senz'altro supporre che ogni intervallo $i_j^{(R)}$ abbia ampiezza non superiore ad 1, poichè, se così non è, possiamo sempre ridurci a questo caso, modificando lievemente le precedenti considerazioni. Notiamo anche che la somma delle misure dei $C(E_j^{(R)})$, $(j=1, 2,\ldots, \nu_R)$, non può superare σ_0.

Prendiamo ora uno qualunque degli intervalli $i_j^{(R)}$, i cui estremi indicheremo con $a_j^{(R)}$, $b_j^{(R)}$, $(a_j^{(R)}<b_j^{(R)})$ e sopra ciascuno di questi intervalli definiamo due funzioni $y_{R,1}(x)$, $y_{R,2}(x)$ procedendo nel seguente modo.

Posto $y_{R,1}^{(s)}(x) \equiv \frac{d^s y_{R,1}(x)}{dx^s}$, $(s=1, 2,\ldots, n)$, sia

$$y_{R,1}(a_j^{(R)})=y_0(a_j^{(R)}), \qquad y_{R,1}^{(s)}(a_j^{(R)})=y_0^{(s)}(a_j^{(R)}), \quad (s=1, 2,\ldots, n-1),$$
$$y_{R,1}^{(n)}(x)=y_0^{(n)}(x), \quad \text{per ogni } x \text{ di } E_j^{(R)},$$
$$y_{R,1}^{(n)}(x)=0, \quad \text{per ogni } x \text{ di } C(E_j^{(R)}).$$

Indicando con $E_{j,x}^{(R)}$ la porzione di $E_j^{(R)}$ contenuta nell'intervallo $(a_j^{(R)}, x)$, abbiamo per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$,

$$y_{R,1}(x)=y_0(a_j^{(R)})+y_0'(a_j^{(R)})(x-a_j^{(R)})+ \dots +y_0^{(n-1)}(a_j^{(R)})\frac{(x-a_j^{(R)})^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+\int_{a_j^{(R)}}^{x} dx \dots \int_{a_j^{(R)}}^{x} dx \int_{E_{j,x}^{(R)}} y_0^{(n)}(x)dx.$$

Pertanto, essendo per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$,

$$y_0(x)=y_0(a_j^{(R)})+y_0'(a_j^{(R)})(x-a_j^{(R)})+ \dots +y_0^{(n-1)}(a_j^{(R)})\frac{(x-a_j^{(R)})^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+\int_{a_j^{(R)}}^{x} dx \dots \int_{a_j^{(R)}}^{x} y_0^{(n)}(x)dx,$$

risulta per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, in virtù della (39),

$$(40)\qquad \left\{ \begin{array}{l} |y_{R,1}(x)-y_0(x)|\leq \frac{1}{\mu' R}, \\ |y_{R,1}^{(s)}(x)-y_0^{(s)}(x)|\leq \frac{1}{\mu' R} \end{array} \right. \qquad (s=1, 2, \dots, n-1),$$

ed anche più precisamente, indicando con $C(E_{j,x}^{(R)})$ il complementare di $E_{j,x}^{(R)}$ rispetto all'intervallo $(a_j^{(R)}, x)$,

$$d_{R,j}^{(0)}=y_0(b_j^{(R)})-y_{R,1}(b_j^{(R)})=\int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} dx \int_{a_j^{(R)}}^{x} dx \dots \int_{a_j^{(R)}}^{x} dx \int_{C(E_{j,x}^{(R)})} y_0^{(n)}(x)dx=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} (b_j^{(R)}-x)^{n-2}dx \int_{C(E_{j,x}^{(R)})} y_0^{(n)}(x)dx,$$

$$d_{R,j}^{(1)}=y_0'(b_j^{(R)})-y'_{R,1}(b_j^{(R)})=\frac{1}{(n-3)!}\int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} (b_j^{(R)}-x)^{n-3}dx \int_{C(E_{j,x}^{(R)})} y_0^{(n)}(x)dx,$$

. . . .

$$d_{R,j}^{(n-2)}=y_0^{(n-2)}(b_j^{(R)})-y_{R,1}^{(n-2)}(b_j^{(R)})=\int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} dx \int_{C(E_{j,x}^{(R)})} y_0^{(n)}(x)dx,$$

$$d_{R,j}^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}(b_j^{(R)})-y_{R,1}^{(n-1)}(b_j^{(R)})=\int_{C(E_j^{(R)})} y_0^{(n)}(x)dx.$$

Costruiamo ora su ciascuno degli intervalli $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, $(j=1, 2, \dots, \nu_R)$ una funzione razionale intera $y_{R,2}(x)$ di grado non superiore a $2n-1$, e tale che sia

$$(41)\qquad \left\{ \begin{array}{l} y_{R,2}(a_j^{(R)})=y'_{R,2}(a_j^{(R)})= \dots =y_{R,2}^{(n-1)}(a_j^{(R)})=0, \\ y_{R,2}(b_j^{(R)})=d_{R,j}^{(0)}, \quad y'_{R,2}(b_j^{(R)})=d_{R,j}^{(1)}, \dots, \quad y_{R,2}^{(n-1)}(b_j^{(R)})=d_{R,j}^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

Si trova facilmente, con calcoli elementari che tralasciamo, che, per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, l'espressione di $y_{R,2}(x)$ è la seguente:

$$y_{R,2}(x) \equiv \frac{1}{D_n} \sum_{q=1}^{n} \left[\gamma_{1,q}^{(n)} \frac{d_{R,j}^{(0)}}{(b_j^{(R)} - a_j^{(R)})^{2n-q}} + \gamma_{2,q}^{(n)} \frac{d_{R,j}^{(1)}}{(b_j^{(R)} - a_j^{(R)})^{2n-q-1}} + \dots + \right.$$

$$\left. + \gamma_{n,q}^{(n)} \frac{d_{R,j}^{(n-1)}}{(b_j^{(R)} - a_j^{(R)})^{n-q+1}} \right] (x - a_j^{(R)})^{2n-q},$$

ove D_n è il valore del determinante (35*), e $\gamma_{1,q}^{(n)}, \gamma_{2,q}^{(n)}, \dots, \gamma_{n,q}^{(n)}$ sono i valori dei complementi algebrici degli elementi della sua colonna q-esima.

Osserviamo che la derivata $y_{R,2}^{(n)}(x)$ è, in ognuno degli intervalli $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, $(j = 1, 2, \dots, \nu_R)$, infinitesima con $\frac{1}{R}$, e quindi, in virtù delle (41), della stessa proprietà godono anche le $y_{R,2}(x)$, $y'_{R,2}(x), \dots, y_{R,2}^{(n-1)}(x)$.

Infatti, considerato uno qualunque dei termini di grado $n-q$ che compaiono nella derivata di ordine n di $y_{R,2}(x)$,

$$T_{s+1,q}(x) = \frac{(2n-q)(2n-q-1)\dots(n-q+1)}{D_n} \gamma_{s+1,q}^{(n)} \frac{d_{R,j}^{(s)}}{(b_j^{(R)} - a_j^{(R)})^{2n-q-s}} (x - a_j^{(R)})^{n-q},$$

abbiamo, per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, e per $s = 0, 1, 2, \dots, n-2$, tenendo presente che Γ_n è il maggiore dei moduli dei numeri $\gamma_{1,q}^{(n)}, \gamma_{2,q}^{(n)}, \dots, \gamma_{n,q}^{(n)}$, $(q = 1, 2, \dots, n)$,

$$|T_{s+1,q}(x)| \leq \frac{(2n-q)\dots(n-q+1)}{|D_n|} \frac{\Gamma_n}{[n-(s+2)]!\,(b_j^{(R)} - a_j^{(R)})^{n-s}} \left| \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} (b_j^{(R)} - x)^{n-(s+2)} dx \int_{C(E_{j,x}^{(R)})} y_0^{(n)}(x)\, dx \right|$$

$$\leq \frac{(2n-q)\dots(n-q+1)}{[n-(s+2)]!} \frac{\Gamma_n}{|D_n|} \frac{1}{(b_j^{(R)} - a_j^{(R)})^{n-s}} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} (b_j^{(R)} - a_j^{(R)})^{n-(s+2)} dx \int_{C(E_j^{(R)})} |y_0^{(n)}(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \frac{(2n-q)\dots(n-q+1)}{[n-(s+2)]!} \frac{\Gamma_n}{|D_n|} \frac{1}{i_j^{(R)}} \int_{C(E_j^{(R)})} |y_0^{(n)}(x)|\, dx,$$

e analogamente

$$|T_{n,q}(x)| \leq \frac{(2n-q)\dots(n-q+1)\Gamma_n}{|D_n|\, i_j^{(R)}} \int_{C(E_j^{(R)})} |y_0^{(n)}(x)|\, dx,$$

e quindi per la (39)

$$(42) \quad |y_{R,2}^{(n)}(x)| \leq \left[\frac{\Gamma_n}{|D_n|} \frac{1}{i_j^{(R)}} \int_{C(E_j^{(R)})} |y_0^{(n)}(x)|\, dx \right] \left[\sum_{q=1}^{n} \left\{ \sum_{s=0}^{n-2} \frac{(2n-q)\dots(n-q+1)}{(n-(s+2))!} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (2n-q)\dots(n-q+1) \right\} \right] \leq \frac{\Gamma_n}{|D_n|} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} n^2 \frac{1}{\mu' R},$$

e perciò « a fortiori »

$$|y_{R,2}^{(s)}(x)| \leqslant \frac{\Gamma_n}{|D_n|} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} n^2 \frac{1}{\mu' R}, \tag{43}$$

$$(s=0, 1, 2, \ldots, n-1\,;\ y_{R,2}^{(0)}(x) \equiv y_{R,2}(x)).$$

Se ora definiamo per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$ la funzione

$$y_R(x) \equiv y_{R,1}(x) + y_{R,2}(x),$$

risulta evidentemente

$$y_R^{(s)}(a_j^{(R)}) = y_0^{(s)}(a_j^{(R)}), \qquad y_R^{(s)}(b_j^{(R)}) = y_0^{(s)}(b_j^{(R)}),$$

$$(s=0, 1, 2, \ldots, n-1\,;\ j=1, 2, \ldots, \nu_R),$$

inoltre per le (40) e (43), tenendo presente la prima delle (36), risulta per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$,

$$|y_R^{(s)}(x) - y_0^{(s)}(x)| \leqslant \frac{K}{R} \leqslant K\varepsilon_0 \leqslant \delta, \qquad (s=0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{44}$$

ed anche, essendo $|y_{R,1}^{(n)}(x)| \leqslant N$, e tenendo conto della (42),

$$|y_R^{(n)}(x)| \leqslant N + \frac{K}{R} \leqslant N + \delta, \tag{45}$$

e, per ogni x di $E_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$,

$$|y_R^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)| \leqslant \frac{K}{R} \leqslant \delta. \tag{46}$$

Inoltre possiamo determinare un numero intero R_0, tale che, per ogni $R \geqslant R_0$, sia per ogni x appartenente ad $E_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$,

$$|f(x, y_R, y'_R, \ldots, y_R^{(n)}) - f(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{\mu'};$$

e siccome la somma delle misure dei $C(E_j^{(R)})$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$, non può superare σ_0, tenendo conto della (37) e della prima delle (36*), posto

$$\bar{I}^{[n]}_{C_R^{[n]}} - \bar{I}^{[n]}_{C_0^{[n]}} = \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} f(x, y_R, y'_R, \ldots, y_R^{(n)})\,dx - \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} f(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})\,dx,$$

risulta, per ogni $R \geqslant R_0$,

$$|\bar{I}^{[n]}_{C_R^{[n]}} - \bar{I}^{[n]}_{C_0^{[n]}}| \leqslant \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{E_j^{(R)}} |f(x, y_R, y'_R, \ldots, y_R^{(n)}) - f(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})|\,dx + \tag{47}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{C(E_j^{(R)})} |f(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})|\,dx + \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{C(E_j^{(R)})} |f(x, y_R, y'_R, \ldots, y_R^{(n)})|\,dx < 3\varepsilon_0.$$

Sia $R > R_0$ e $> \frac{1}{\varepsilon_0}$, e, fissato un numero positivo $\lambda < \frac{\delta}{2}$, procedendo come al n.° 2, sostituendo a (x_0, x_ω) successivamente ciascuno degli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$, e prendendo $m=R$ si costruisca su ciascuno di essi la funzione $z_R(x)$ e si definisca la curva

$$C_{0,R}^{[n]}: \quad y = y_{0,R}(x), \qquad (a_0 \leq x \leq b_0),$$

prendendo negli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$,

$$y_{0,R}(x) \equiv y_R(x) + z_R(x),$$

e nelle parti rimanenti di (a_0, b_0)

$$y_{0,R}(x) \equiv y_0(x).$$

Osserviamo che, per $R \to \infty$, ognuna delle R parti uguali, in cui analogamente al n.° 2 deve essere diviso ognuno degli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$ (l'ampiezza dei quali può variare con R, ma non può mai superare il numero fisso $b_0 - a_0$) tende necessariamente allo zero.

Pertanto, per quanto si è visto al n.° 2, possiamo determinare un numero R_0', non inferiore al maggiore dei due numeri R_0 e $\frac{1}{\varepsilon_0}$, tale che, per ogni $R > R_0'$, e tenendo anche presenti le (44), la curva $C_{0,R}^{[n]}$ appertenga al campo $A^{[n]}$. Tenendo conto delle (45) si conclude facilmente che la funzione $y_{0,R}(x)$ è assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, che esiste finito l'integrale $I_{C_{0,R}^{[n]}}^{[n]}$, e che quindi $C_{0,R}^{[n]}$ è una curva $C^{[n]}$.

Considerata la differenza

$$I_{C_{0,R}^{[n]}}^{[n]} - I_{C_0^{[n]}}^{[n]} = \int_{a_0}^{b_0} f(x, y_{0,R}, y_0'{}_{,R}, \ldots, y_{0,R}^{(n)})dx - \int_{a_0}^{b_0} f(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})dx,$$

abbiamo evidentemente

$$(48) \qquad I_{C_{0,R}^{[n]}}^{[n]} - I_{C_0^{[n]}}^{[n]} = \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} [f(x, y_{0,R}, y_0'{}_{,R}, \ldots, y_{0,R}^{(n)}) - f(x, y_R, y'_R, \ldots, y_R^{(n)})]dx +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} [f(x, y_R, y'_R, \ldots, y_R^{(n)}) - f(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})]dx.$$

Per le (44) e (46) è, per ogni x appartenente a $E_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$,

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_R(x), y'_R(x), \ldots, y_R^{(n)}(x)) < -\eta,$$

e siccome per ogni x di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$, è verificata la (45), possiamo ripetere il ragionamento del n.° 5 sopra la somma che figura per prima nel secondo membro della (48), e tenere poi conto della (47). Concludiamo che esiste un numero R_0'' non inferiore a R_0', e tale che per ogni $R > R_0''$ risulta

$$I^{[n]}_{C^{[n]}_{0,R}} - I^{[n]}_{C^{[n]}_0} < 2\varepsilon_0 - \eta\,\frac{\lambda^2}{2}\,\frac{\mu'}{2} + \frac{1}{2}M\sigma_0 + 3\varepsilon_0 < \frac{11}{2}\,\varepsilon_0 - \frac{1}{4}\,\eta\lambda^2\mu' \leqslant -\frac{1}{8}\,\eta\lambda^2\mu',$$

ove si è tenuto conto della seconda delle (36).

Ma preso un $\varrho > 0$ ad arbitrio, tenendo conto delle (44) e delle proprietà di cui godono le funzioni $z_R(x)$, possiamo determinare un intero R_ϱ (non inferiore a R_0'') tale che per ogni $R > R_\varrho$, la curva $C^{[n]}_{0,R}$ appartenga propriamente all'intorno $(\varrho)^n$ della $C^{[n]}_0$, dopodichè concludiamo in modo analogo al n.° 5.

Osservazioni. - Può ripetersi l'osservazione fatta alla fine del n.° 5.

10. - Seconda condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.

Se

$$C^{[n]}_0:\quad y = y_0(x), \qquad (a_0 \leqslant x \leqslant b_0),$$

è una curva $C^{[n]}$ completamente interna al campo $A^{[n]}$, condizione necessaria, affinchè l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ sia semicontinuo inferiormente sulla curva $C^{[n]}_0$, è che lo pseudointervallo dei valori di x dell'intervallo (a_0, b_0), nei quali esiste finita la $y^{(n)}_0(x)$ e non è verificata per tutti gli $y^{(n)}$ la disuguaglianza

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y^{(n)}_0(x);\ y^{(n)}) \geqslant 0, \tag{49}$$

$\left(\textit{ove } y^{(r)}_0(x) \equiv \dfrac{d^r y_0(x)}{dx^r},\ r = 1, 2, \ldots, n\right)$ *abbia misura nulla.*

La dimostrazione si ottiene facilmente da quella del n.° 6, tenendo presenti le considerazioni fatte al n.° 9, con le seguenti modificazioni.

Supposto invece che lo pseudointervallo E'' dei punti di (a_0, b_0), in cui esiste finita la $y^{(n)}_0(x)$ ed esiste almeno un numero finito $y^{(n)}$ per il quale non è soddisfatta la (49) abbia una misura positiva, che indicheremo con 2μ, possiamo trovare un numero fisso λ, un altro numero $\eta > 0$, ed un insieme chiuso E', tutto costituito di punti di E'', di misura $\mu' > \mu$, tale che in ogni suo punto, il modulo di $y^{(n)}_0(x)$ abbia un limite superiore finito che indicheremo con N, e sia

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y^{(n)}_0(x);\ y^{(n)}_0(x) + \lambda) < -\frac{3}{2}\,\eta.$$

Per la continuità della $\mathcal{E}$ possiamo determinare un numero positivo $\delta < 1$, in modo che, se $\bar{x}$ è un punto qualunque di E' e $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ è un punto di $A^{[n]}$, soddisfatte le disuguaglianze

$$\begin{cases} |x - \bar{x}| \leqslant 2\delta, & |y - y_0(\bar{x})| \leqslant 2\delta, \\ |y^{(r)} - y^{(r)}_0(\bar{x})| \leqslant 2\delta, & \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \end{cases} \tag{50}$$

sia

$$\mathcal{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n)};\ y^{(n)} + \lambda) < -\eta,$$

δ essendo inoltre scelto in modo che i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ soddisfacenti alle prime $n+1$ delle (50) appartengano al campo $A^{[n]}$.

Si determini ora un numero positivo θ_0, in modo che, per ogni $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ soddisfacente alle prime $n+1$ delle (50), per ogni $|y^{(n)}| \leq N+1$, e per ogni $|\theta| \leq \theta_0$, sia

$$|f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}+\theta) - f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})| < \frac{\eta}{2|\lambda|},$$

e si fissi un numero θ_1 di segno contrario a quello di λ, con $|\theta_1| \leq \theta_0$, $|\theta_1| < |\lambda|$.

Ciò premesso si ripetano le considerazioni del n.° 9, indicando ora con M il massimo modulo di $\mathcal{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}; \widetilde{y}^{(n)})$ per ogni $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ soddisfacente alle prime $n+1$ delle (50) e per ogni coppia $|y^{(n)}| \leq N+1$, $|\widetilde{y}^{(n)}| \leq N+|\lambda|+1$, scegliendo ε_0 in modo che sia

$$(50^*) \qquad \varepsilon_0 \leq \frac{\delta}{K}, \qquad \varepsilon_0 \leq \frac{1}{56}\eta\mu_1 \left|\frac{\theta_1}{\lambda-\theta_1}\right|,$$

ove

$$K = \left(1 + \frac{\Gamma_n}{|D_n|}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}n^2\right)\frac{1}{\mu_1},$$

e determinando σ_0 in modo che siano soddisfatte le (36*) e che si abbia anche $\sigma_0\eta < \varepsilon_0$, e si prosegua fino a stabilire la formula (47).

Poi preso $R > R_0$ e $> \frac{1}{\varepsilon_0}$, procedendo come al n.° 3, sostituendo a (x_0, x_ω) successivamente ciascuno degli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$, e prendendo $m=R$, si costruisca su ciascuno di essi la funzione $z_R(x)$ e si definisca la curva

$$C_{0,R}^{[n]}: \ y = y_{0,R}(x), \qquad (a_0 \leq x \leq b_0),$$

prendendo negli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$,

$$y_{0,R}(x) \equiv y_R(x) + z_R(x),$$

(ove $y_R(x)$ è la funzione definita al n.° 9), e nelle parti rimanenti di (a_0, b_0)

$$y_{0,R}(x) \equiv y_0(x).$$

Come al n.° 9 $C_{0,R}^{[n]}$ è una curva $C^{[n]}$; e per le (44) e (46) è, per ogni x appartenente a $E_j^{(R)}$, $(j=1, 2, \ldots, \nu_R)$,

$$\mathcal{E}(x, y_R(x), y'_R(x), \ldots, y_R^{(n)}(x);\ y_R^{(n)}(x)+\lambda) < -\eta.$$

Quindi, ripetendo sulla somma che figura, per prima, nel secondo membro dell'analoga della (48) il ragionamento del n.° 6, e tenendo poi conto della (47), si conclude che esiste un numero positivo R_0^* tale che per ogni $R > R_0^*$ risulta

$$I_{C_{0,R}^{[n]}}^{[n]} - I_{C_0^{[n]}}^{[n]} < 4\varepsilon_0 - \frac{\eta}{2}\frac{\mu_1}{2}\left|\frac{\theta_1}{\lambda-\theta_1}\right| + 3\varepsilon_0 = 7\varepsilon_0 - \frac{\eta}{4}\mu_1\left|\frac{\theta_1}{\lambda-\theta_1}\right| < -\frac{1}{8}\eta\mu_1\left|\frac{\theta_1}{\lambda-\theta_1}\right|,$$

ove si è tenuto conto della seconda delle (50*), e, tenendo presente le considerazioni fatte al fine del n.° 9, si perviene alla conclusione del n.° 6.

Osservazione. - Può ripetersi l'osservazione fatta alla fine del n.° 5.

11. - Condizione necessaria per la continuità.

Dal teorema del n.° 10, tenendo presente il capoverso δ) del n.° 1, risulta che, *se* $C_0^{[n]}$: $[y=y_0(x), (a_0 \leq x \leq b_0)]$ *è una curva* $C^{[n]}$ *completamente interna al campo* $A^{[n]}$, *condizione necessaria, affinchè l'integrale* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *sia semicontinuo inferiormente sulla curva* $C_0^{[n]}$, *è che la funzione* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *abbia la forma*

$$f_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + y^{(n)} f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

per tutti i valori di $y^{(n)}$, *in tutti i punti della curva* $C_0^{[n]}$.

§ 5. - Le condizioni necessarie di Legendre e di Weierstrass per l'esistenza del minimo.

12. - Definizione.

Data una classe $K^{[n]}$ di curve $C^{[n]}$, diremo che un punto

$$P_0 \equiv (x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)}(x_0)),$$

$\left(\text{ove } y_0^{(r)}(x) \equiv \frac{d^r y_0(x)}{dx^r},\ r=1, 2, \ldots, n-1\right)$ di una curva $C^{[n]}$

$$C_0^{[n]}: \quad y=y_0(x), \qquad (a_0 \leq x \leq b_0),$$

è *punto di indifferenza rispetto al campo* $A^{[n]}$ *e alla classe* $K^{[n]}$, se è possibile determinare un suo intorno $(\varrho_0)_n$, definito dai punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ per i quali è

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0(x_0))^2 + (y'-y_0'(x_0))^2 + \ldots + (y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}(x_0))^2 \leq \varrho_0^2,$$

in modo che si ottenga ancora una curva della classe $K^{[n]}$, quando si sostituisca ad un qualunque arco della $C_0^{[n]}$ (i cui punti terminali abbiano ascisse a, b), contenente P_0, e tutto appartenente a questo intorno, un qualunque arco di una curva $C^{[n]}$: $[y=y(x), (a \leq x \leq b)]$, appartenente al medesimo intorno e al campo $A^{[n]}$, e tale inoltre che si abbia

$$y(a)=y_0(a), \quad y^{(r)}(a)=y_0^{(r)}(a); \qquad y(b)=y_0(b), \quad y^{(r)}(b)=y_0^{(r)}(b);$$
$$(r=1, 2, \ldots, n-1),$$

intendendosi che le prime n di queste uguaglianze, o le ultime n, o tutte quante possano anche non essere soddisfatte, quando rispettivamente a, oppure b, coincidono con uno dei valori a_0, b_0.

13. - La condizione di Legendre.

a). Se $C_0^{[n]}$: $[y=y_0(x),\ (a_0 \leq x \leq b_0)]$ *è una curva minimante per* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *in una classe* $K^{[n]}$ *di curve* $C^{[n]}$, *per ogni suo arco i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano interni al campo* $A^{[n]}$ *e di indifferenza rispetto ad* $A^{[n]}$ *e a* $K^{[n]}$, *deve essere soddisfatta, in quasi tutto l'intervallo dell'asse delle* x *che gli corrisponde, la disuguaglianza*

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x,\ y_0(x),\ y_0'(x),\dots,\ y_0^{(n)}(x)) \geq 0. \tag{51}$$

b). Se poi nell'intervallo dell'asse delle x, *corrispondente all'arco indicato, la derivata* $y_0^{(n)}(x)$ *è sempre finita e continua, la disuguaglianza precedente deve essere verificata in tutto l'intervallo indicato.*

Basta ripetere la dimostrazione fatta dal TONELLI per $n=1$ ([13]), tenendo conto dei risultati dei n.i 9 e 8, *a*) del presente lavoro, e dell'osservazione fatta alla fine dei numeri indicati.

14. - La condizione di Weierstrass.

a). Se $C_0^{[n]}$: $[y=y_0(x),\ (a_0 \leq x \leq b_0)]$ *è una curva minimante per* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *in una classe* $K^{[n]}$ *di curve* $C^{[n]}$, *per ogni suo arco, i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano interni al campo* $A^{[n]}$ *e di indifferenza rispetto ad* $A^{[n]}$ *e a* $K^{[n]}$, *deve essere soddisfatta, in quasi tutto l'intervallo dell'asse delle* x *che gli corrisponde, e per tutti i possibili valori di* $y^{(n)}$, *la disuguaglianza*

$$\mathcal{E}(x,\ y_0(x),\ y_0'(x),\dots,\ y_0^{(n)}(x);\ y^{(n)}) \geq 0. \tag{52}$$

b). Se la derivata $y_0^{(n)}(x)$ *soddisfa alla condizione indicata al n.º 13, b) la disuguaglianza* (52) *deve essere verificata in tutto l'intervallo indicato.*

Basta ripetere la dimostrazione fatta dal TONELLI per $n=1$ ([14]), tenendo conto dei risultati dei n.i 10 e 8, *b*), del presente lavoro, e dell'osservazione fatta alla fine dei numeri indicati.

Osservazione. - È da rilevare che possono effettivamente esistere punti, in cui non valgono le (51) e (52), su curve minimanti tutte costituite di punti interni al campo $A^{[n]}$ e, ad eccezione di quelli terminali, di indifferenza rispetto ad $A^{[n]}$ e a $K^{[n]}$, come ha mostrato il TONELLI per $n=1$ ([15]).

([13]) Vedi L. TONELLI, opera cit. in ([2]), Vol. II, n.º 93, pp. 317-318.

([14]) Vedi L. TONELLI, idem, Vol. II, n.º 94, pag. 318.

([15]) Vedi L. TONELLI, ibidem, Vol. II, n.º 28, pag. 86.