ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Funzioni olomorfe di matrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 1 (1937), p. 41-70

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_1_41_0>

FUNZIONI OLOMORFE DI MATRICI

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa).

Sono ben noti i tentativi di vari Autori diretti a stabilire una definizione di funzione analitica di matrice. Ultimamente lo SPAMPINATO ([1]) è riuscito a dare a questa nozione un assetto molto soddisfacente dal punto di vista logico, ponendosi nell'ambiente più generale delle algebre associative.

Per l'interesse che la teoria delle matrici ha in questi ultimi anni assunto in vasti campi della matematica pura e delle sue applicazioni alla fisica, credo non sia inutile intraprendere la trattazione autonoma del caso delle matrici. Sopratutto è desiderabile riuscire a dare una definizione di funzione olomorfa ancor più intimamente aderente alla nozione di funzione monogena di variabile complessa, che non quella che si presenta come la più spontanea nel campo delle algebre.

Per conseguire risultati precisi e abbastanza semplici, può sembrare indispensabile dover limitare notevolmente l'algebra di matrici in cui si definiscono le nostre funzioni. Però, causa la generalità di cui abbisognano le applicazioni cui si è accennato, non conviene considerare separatamente matrici degli ordini successivi 2, 3,...., come si suol fare, ad esempio, in geometria.

È invece più opportuno supporre soltanto che l'algebra (di matrici) considerata sia commutativa. Ciò consente maggior agilità all'indagine, pur senza restringere soverchiamente il campo delle applicazioni. Inoltre, le definizioni ed i risultati conseguiti in algebre commutative, come accennerò anche in queste pagine, possono talvolta estendersi, al più con opportuni accorgimenti ([2]), anche al caso non commutativo.

Però questa limitazione, diciamo così, quantitativa a nulla mi sarebbe giovata se non fossi riuscito a ravvisare nelle parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica

---

([1]) *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità dotata di modulo.* Memorie I-II-III. [Rend. Pal., t. 57-58-59 (1933-1934-1935)]. Nella prima di esse il lettore troverà anche citati i tentativi cui si accenna qui sopra. Un breve riassunto della presente Memoria è stato da me comunicato, col titolo *Fonctions holomorphes de matrice,* nei Comptes Rendus del giugno 1936.

([2]) Per questi rimandiamo alle or citate Memorie dello SPAMPINATO.

di una matrice gli enti da sostituire alle parti reale ed imaginaria di una variabile complessa.

Questa interessante analogia mi si era già presentata a proposito delle condizioni di permutabilità e di diagonalizzabilità delle matrici complesse (3). Essa è però assai più intima e profonda di quel che può pensarsi a prima vista. Il suo sfruttamento mi ha permesso, come si vedrà in questa ricerca, di dar la definizione di funzione olomorfa di matrici e di fondare una teoria di tali funzioni su basi del tutto analoghe, anche sotto l'aspetto formale, a quelle della teoria delle funzioni di variabile complessa ordinaria. Vari dei risultati fondamentali di questa importante teoria son qui raggiunti con sviluppi aventi analogia perfetta con quelli in uso nella teoria classica delle funzioni monogene (4).

Il punto di partenza, che è la definizione di funzione olomorfa ed è valevole anche in algebre non commutative, potrebbe formularsi *a priori*. Ma ciò non convien fare, senza rischio di far perdere a questa ricerca parte del suo interesse speculativo. A tal definizione, che pure possedevo, in sostanza, sin da quando trovai le condizioni di permutabilità, pervengo invece qui *a posteriori*, attraverso un ragionamento che mette in evidenza l'intima connessione concettuale di essa con la feconda costruzione logica dello SPAMPINATO (5).

Ciò fornisce la speranza che queste pagine non resteranno isolate, ma daranno la possibilità di ulteriormente sviluppare la teoria adombrata, giovando anche alle applicazioni.

§ 1. - Rappresentazione ridotta di un'algebra commutativa di matrici.

1. - Sia A un'algebra commutativa complessa di matrici contenente l'identità I e qualche matrice a non scalare. Poichè A è definita nel corpo complesso C essa conterrà anche la matrice scalare

$$J = iI, \qquad i = \sqrt{-1}$$

e detto m (necessariamente >1) il suo ordine, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ un suo sistema di

---

(3) CHERUBINO S.: *Sulle matrici permutabili o diagonalizzabili.* [Atti Acc. Peloritana, vol. 37 (Messina, 1935)].

(4) E ciò senza bisogno di considerare la variabile x sempre e soltanto in un *piano principale* come necessiterebbe fare seguendo la trattazione dello SPAMPINATO. La commutatività dell'algebra, verificata nell'ambiente molto più ristretto di ciascun piano principale, giuoca anche in questo caso un ruolo essenziale, benchè non esplicito.

(5) La nostra definizione non sembra adottabile, nelle algebre, con altrettanta naturalezza come quella di questo A. Tanto perchè la nozione di parti antisimmetrica od antiemisimmetrica non può presentarsi, per gli elementi di un'algebra, se non attraverso la considerazione di un'algebra di matrici isomorfa a quella considerata.

unità, la matrice corrente x si rappresenta con

$$x=\sum_{r=1}^{m} \xi_r u_r \tag{1}$$

dove $\xi_1,\dots, \xi_m$ sono numeri complessi univocamente determinati da x.

Gli elementi di A si rappresentano dunque biunivocamente, senza eccezioni, coi punti di uno spazio euclideo complesso S_m, di dimensione m: basta prender come corrispondente di x il punto X di S_m di coordinate $\xi_1,\dots, \xi_m$.

Separiamo in queste le parti reali dalle imaginarie scrivendo

$$\xi_r=\xi_r'+i\xi_r''$$

e poniamo

$$u_{m+r}=iu_r=Ju_r.$$

Con ciò, la (1) si scrive

$$x=\sum_{r=1}^{m} \xi_r' \cdot u_r+\sum_{r=1}^{m} \xi_r'' \cdot u_{m+r} \tag{2}$$

cioè gli elementi di A son combinazioni lineari (omogenee) a coefficienti *reali* dei suoi $2m$ elementi

$$u_1,\dots, u_m; \quad u_{m+1},\dots, u_{2m}.$$

Questi, come subito si riconosce, nel corpo reale R sono linearmente indipendenti. Se ne deduce una rappresentazione biunivoca senza eccezioni degli elementi di A sui punti, di coordinate $\xi_1',\dots, \xi'_m, \xi_1'',\dots, \xi''_m$ di uno spazio euclideo reale Σ_{2m}, di dimensione $2m$.

Le rappresentazioni fatte, a meno di un cambiamento di essi coordinati, non dipendono dalla scelta del sistema di unità, quindi sono indipendenti dall'esistenza o non della identità in A. Nessuna influenza esercita, su queste rappresentazioni, la supposta commutatività di A.

2. - Per tener conto della commutatività di A, scindiamo ogni suo elemento x nelle sue parti antisimmetrica s ed antiemisimmetrica t e scriviamo [6]

$$x=sj_1+tj_2=j_1s+j_2t \tag{3}$$

ove j_1 e j_2 son due *simboli* sui quali facciamo le convenzioni

$$j_1^2=j_2^2=j_1; \qquad j_1\times j_2=j_2\times j_1=j_2. \tag{4}$$

Con queste posizioni, e per la supposta commutatività di A, è possibile operare in quest'algebra con le solite regole del calcolo formale, *nel corpo reale.*

---

[6] Come nella mia Nota cit. [3], n.i 2-3.

In termini meno precisi, ma più espressivi, si può dire di aver con ciò istituito in A un'*algebra reale* isomorfa a quella di secondo ordine ([7]) individuata nel corpo reale da 2 unità, che indichiamo ancora j_1, j_2, soddisfacenti alla tabella di moltiplicazione (4). La imprecisione di questo modo di dire sta nel che non si tratta di un'algebra nel senso ordinario: meglio sarebbe dire che si ha a che fare con una *pseudo algebra.*

Ricordiamo ([8]) ora che una matrice antisimmetrica o antiemisimmetrica moltiplicata per un numero reale resta della stessa specie, mentre cambia di specie quando si moltiplica per un imaginario puro. Perciò, ponendo

$$u_r = {}_1u_r j_1 + {}_2u_r j_2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2m) \tag{5}$$

e tenendo presente che ogni matrice individua le proprie parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica, dalle (2)-(3) si ricava che

$$s = \sum_{r=1}^{m} \xi_r' \cdot {}_1u_r + \sum_{r=1}^{m} \xi_r'' \cdot {}_1u_{m+r} \tag{6}$$

$$t = \sum_{r=1}^{m} \xi_r' \cdot {}_2u_r + \sum_{r=1}^{m} \xi_r'' \cdot {}_2u_{m+r} . \tag{6*}$$

Dicendo S e T gli insiemi costituiti dalle parti antisimmetriche, rispettivamente antiemisimmetriche delle matrici di A, queste (6)-(6*) ci assicurano che questi insiemi sono dei *sistemi* ([9]), nel corpo reale.

E poichè A contiene l'identità, si vede subito che: *S e T sono due sistemi di ordine non superiore a* $2m-1$. Perchè potrà prendersi

$$u_1 = I, \qquad u_{m+1} = J$$

quindi

$${}_1u_1 = I, \qquad {}_2u_1 = 0\,; \qquad {}_1u_{m+1} = 0, \qquad {}_2u_{m+1} = J,$$

onde ciascun sistema S o T è combinazione lineare di $2m-1$ elementi (non necessariamente indipendenti).

Segue che S e T si rappresentano biunivocamente, senza eccezioni, sui punti di due spazi reali euclidei, di dimensioni $\leqslant 2m-1$. Questi spazi, quando occorrano, si indicheranno con le stesse lettere S e T.

Ogni elemento x di A ne determina due, uno in S, l'altro in T, ma non è

([7]) Ibidem. Richiamiamo qui l'enunciato della osservazione fondamentale che ci consente di istituire questa pseudo algebra: *affinchè 2 matrici A e B siano permutabili occorre e basta che la parte antisimmetrica (antiemisimmetrica) del prodotto AB o BA sia data dalla somma dei prodotti delle parti omonime (eteronime) di A e B.*

([8]) Ididem, n.° 1.

([9]) SCORZA G.: *Corpi numerici ed algebre.* [Messina, Principato (1921)], p. 194.

detto che ogni coppia di matrici, una scelta in S l'altra in T, diano come somma una matrice di A. Perciò, negli spazi rappresentativi, ad un punto di Σ_{2m} ne corrispondono due, uno in S l'altro in T; ma ad una coppia di punti scelti uno in S l'altro in T non sempre corrisponde un punto di Σ_{2m}: però, se uno vi corrisponde, esso è unico.

3. - Introduciamo due nuovi simboli, v_1 e v_2, legati a j_1 e j_2 dalle relazioni formali

$$j_1 = v_1 + v_2, \qquad j_2 = -v_1 + v_2 \tag{7}$$

dalle quali conveniamo deducibili le altre due

$$v_1 = \frac{j_1 - j_2}{2}, \qquad v_2 = \frac{j_1 + j_2}{2} \tag{7*}$$

che devon reputarsi equivalenti alle (7). In forza delle (4), i due nuovi simboli soddisferanno alle relazioni

$$v_1^2 = v_1, \qquad v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0, \qquad v_2^2 = v_2 \tag{8}$$

mentre la (3) si scrive

$$x = x^* v_1 + x^{**} v_2 = v_1 x^* + v_2 x^{**} \tag{9}$$

con

$$x^* = s - t, \qquad x^{**} = s + t = x. \tag{10}$$

In tal modo, viene istituita in A una pseudo algebra di secondo ordine isomorfa alla precedente ed a quella individuata *nel corpo reale* da due unità possedenti la tabella di moltiplicazione (8). Questa nuova algebra presenta il vantaggio di mettere in evidenza la propria reduttibilità, sicchè il prodotto di due elementi di A:

$$x = x^* v_1 + x^{**} v_2, \qquad y = y^* v_1 + y^{**} v_2$$

si esprime con

$$xy = yx = x^* y^* v_1 + x^{**} y^{**} v_2 = y^* x^* v_1 + y^{**} x^{**} v_2.$$

La commutatività di x^* ed y^*, come conseguenza di quella di $x = x^{**}$ ed $y = y^{**}$, viene assicurata dalla proprietà richiamata nella nota (7). Invero, dette s, t; s', t' le parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica di x e di y, ordinatamente, quelle di $xy = yx$ sono

$$ss' + tt' = s's + t't; \qquad st' + ts' = t's + s't$$

e queste, salvo a cambiar di segno la seconda, sono anche quelle dei prodotti

$$x^* y^* = (s - t)(s' - t'), \qquad y^* x^* = (s' - t')(s - t).$$

4. - Poichè $u_{m+r} = i u_r$, $i = \sqrt{-1}$, si ha

$$u_{m+r} = i \cdot {}_2u_r \cdot j_1 + i \cdot {}_1u_r \cdot j_2 \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

cioè

$$ {}_1u_{m+r} = i \cdot {}_2u_r, \qquad {}_2u_{m+r} = i \cdot {}_1u_r, $$

cosicchè le (6)-(6*) si scrivono anche

$$ (6_1) \qquad s = \sum_{r=1}^{m} \xi_r' \cdot {}_1u_r + i \sum_{r=1}^{m} \xi_r'' \cdot {}_2u_r $$

$$ (6_1^*) \qquad t = \sum_{r=1}^{m} \xi_r' \cdot {}_2u_r + i \sum_{r=1}^{m} \xi_r'' \cdot {}_1u_r. $$

Ne segue che

$$ (11) \qquad x^* = s - t = \sum_{r=1}^{m} (\xi_r' - i\xi_r'')({}_1u_r - {}_2u_r) = \sum_{r=1}^{m} \bar{\xi}_r \cdot u_r^* $$

dove

$$ (12) \qquad \bar{\xi}_r = \xi_r' - i\xi_r'', \qquad u_r^* = {}_1u_r - {}_2u_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). $$

Poichè si ha

$$ (13) \qquad u_r = u_r^* \cdot v_1 + u_r^{**} \cdot v_2, \qquad u_r^{**} = u_r $$

il ragionamento prova anche, più generalmente, che alle combinazioni lineari degli elementi x di A corrispondono quelle, a coefficienti complessi coniugati, degli elementi x^* e, viceversa, che a queste corrispondono quelle. Il che, intanto, insieme alla chiusa dell'articolo precedente prova che al variare di x in A, x^* varia in un'algebra A^*, commutativa anch'essa ([10]).

Questa A si rappresenta biunivocamente, senza eccezione, sui punti dello stesso spazio complesso S_m su cui si rappresenta A. Però, se ad x corrisponde il punto X, ad x^* corrisponde il punto $\bar{X}$ di coordinate complesse coniugate di quelle di X.

Potrebbe perciò dirsi che A^* si rappresenta biunivocamente sui punti dello spazio $\bar{S}_m$ complesso coniugato di S_m (benchè questi due spazi coincidano). Si deduce inoltre che A^* ha lo stesso ordine m di A.

Quest'ultimo fatto si può dimostrar direttamente osservando che se le matrici u_r^* fossero dipendenti, si annullerebbe una loro combinazione lineare, sia la (11), a coefficienti non tutti nulli. Ma la matrice nulla ha necessariamente nulle le parti antisimmetrica e antiemisimmetrica, sicchè si avrebbe

$$ s = -t = 0 $$

([10]) Si badi che non può dirsi che A ed A^* sono isomorfe (nè reciproche) poichè ciò esigerebbe che ad una combinazione lineare di elementi di A corrispondesse la combinazione lineare degli elementi corrispondenti di A^* con *gli stessi coefficienti*. Cfr. SCORZA G., loco cit. ([9]), p. 191. Converrebbe forse dire che sono *anti-isomorfe*.

e sarebbe nulla anche

$$s+t=x=\sum_{r=1}^{m}\xi_r u_r,$$

il che, per l'indipendenza delle u_r, esigerebbe che si annullassero tutti i coefficienti ξ_r. Sarebbero dunque nulli anche i coefficienti $\bar{\xi}_r$ e la indipendenza delle u_r^* è dimostrata.

5. - Ricordiamo che le parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica s e t di una matrice x, son caratterizzate dalle condizioni

$$\bar{s}=s_{-1}, \qquad \bar{t}=-t_{-1} \tag{14}$$

ove con $\bar{a}$ s'indica la matrice ad elementi complessi coniugati di a e con a_{-1} la trasposta della matrice a.

Perciò si ha

$$\bar{x}=\bar{s}+\bar{t}=s_{-1}-t_{-1}=(s-t)_{-1}=x^*_{-1}$$

quindi

$$x^*=\bar{x}_{-1}=s-t, \tag{5}$$

cioè x^* è la trasposta coniugata della matrice x, e viceversa.

Perciò, le due algebre A ed A^* posson dirsi l'una *trasposta-coniugata* dell'altra.

Pur coincidendo gli spazi rappresentativi di A ed A^*, non è detto che queste 2 algebre coincidano.

6. - È immediato che i polinomi caratteristici di 2 matrici trasposto-coniugate

$$|x-\lambda I|=f(\lambda), \qquad |x^*-\lambda I|=\bar{f}(\lambda)$$

sono complessi coniugati insieme alle radici caratteristiche. Se α, $\bar{\alpha}$ sono due di queste radici, le due matrici $x-\alpha I$, $x^*-\bar{\alpha}I$, sono trasposto-coniugate, quindi hanno eguali le caratteristiche e le nullità: altrettanto accade delle loro potenze. Ciò basta ([11]) per concludere che le *segnature* di x ed x^* relative a radici complesse coniugate coincidono, quindi che le matrici canoniche ([12]) di x ed x^* differiscono soltanto perchè le loro diagonali principali son complesse coniugate.

Se c è la forma canonica di x e si ha

$$a\cdot x\cdot a^{-1}=c$$

([11]) SCORZA G., loco cit., p. 433.

([12]) Sia sotto la forma di JORDAN che sotto quella del PREDELLA. Cfr. la mia Nota: *Sulla riduzione di una matrice a forma canonica.* [Rend. Lincei (1936)], Note I e II.

si ha anche

$$\bar{a}_{-1}^{-1}\bar{x}_{-1}\cdot\bar{a}_{-1}=\bar{a}_{-1}^{-1}\cdot x^{*}\cdot\bar{a}_{-1}=\bar{c}_{-1}.$$

Questa $\bar{c}_{-1}$ non è proprio la forma canonica di x^*, intesa come al solito, ma ne è semplicemente la trasposta. Convenendo perciò di considerare come forma canonica sia quella solita che la trasposta, si può dire che

Se a *riduce* x *a forma canonica, l'inversa della trasposta coniugata di* a *riduce a forma canonica* $x^*=\bar{x}_{-1}$.

§ 2. - Funzioni di matrice ([13]).

7. - Continueremo a designare con A la nostra algebra commutativa di matrici, con m l'ordine, con $u_1, u_2, \ldots, u_m$ un sistema di unità, e con x un elemento generico.

La commutatività di A sarà molte volte superflua, varie altre inessenziale: tuttavia la supporremo ancora, per maggior semplicità e brevità di esposizione.

Posto, come si deve

$$x=\xi_1 u_1+\ldots+\xi_m u_m, \tag{1}$$

per *modulo* di x s'intenderà il numero assoluto

$$\operatorname{mod} x=\sqrt{\sum_{r}^{1,\ldots,m}\xi_r\cdot\bar{\xi}_r} \tag{2}$$

che esprime la distanza dall'origine del punto rappresentativo di x in Σ_{2m}.

Si ha che $\operatorname{mod}(x-y)$ è la distanza fra i punti rappresentativi di x e di y e che l'elemento nullo, ed esso solo, ha il modulo nullo, onde si ha $\operatorname{mod}(x-y)=0$ allora e soltanto che $x=y$.

È inoltre

$$\operatorname{mod}(xy)\leqq a\cdot(\operatorname{mod} x)(\operatorname{mod} y) \tag{3}$$

ove a è una costante (reale) non nulla, dipendente da quelle di moltiplicazione dell'algebra A, ma non dai fattori x, y. In particolare, poichè $xx^{-1}=I$ si ha

$$\operatorname{mod} x^{-1}\geqq\frac{\operatorname{mod} I}{a\operatorname{mod} x}. \tag{3'}$$

Dire che x *varia in una sfera di centro* x_0 *e raggio* r significa che si ha

$$\operatorname{mod}(x-x_0)\leqq r \tag{4}$$

([13]) Per comodità del lettore includiamo in questo paragrafo varie nozioni e proprietà già stabilite ed osservate dallo SPAMPINATO nelle Memorie più volte citate. Qui vi sono soltanto le aggiunte o modificazioni necessarie per l'adattamento ai nostri scopi e alle nostre notazioni.

e dire che x *tende ad* x_0 significa che x può prendersi *interno* ad una sfera di centro x_0 e raggio arbitrario (onde in (4) vale il solo segno $<$).

Dopo di che è ovvio in che modo si estendano agli *insiemi* di matrici di A, le nozioni di *elementi di accumulazione*, di insieme *derivato*, *finito*, *limitato*, *chiuso*, *perfetto*, *continuo*, etc., note per gli insiemi di punti.

8. - Se $\mathfrak{J}$ è un insieme di elementi di A, si dirà che la matrice y di A è *funzione* della matrice x variabile in $\mathfrak{J}$, quando y è univocamente determinata ogni volta che è assegnato x, in $\mathfrak{J}$. Si scrive

$$y=f(x)$$

e si dice che: *y è funzione di x in A, definita in $\mathfrak{J}$*. Notiamo che è essenziale la esistenza di x e di y nella stessa algebra A.

Le nozioni di *limite* e di *continuità* si stabiliscono al modo solito. Cioè, si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \tag{5}$$

quando a è un elemento di A ed x_0 un elemento di accumulazione di $\mathfrak{J}$ tali che, fissato un $h>0$, esiste un $r>0$ per modo che ogni volta che x è interno alla sfera di centro x_0 e raggio r, $f(x)$ riesce interno a quella di centro a e raggio h. In altri termini, quando si ha

$$\operatorname{mod}\,[f(x)-a]=\mu\cdot\operatorname{mod}\,(x-x_0) \tag{6}$$

ove μ è un numero reale che resta finito quando x varia in una sfera di centro x_0 e raggio conveniente.

Per la continuità in x_0, elemento di accumulazione dell'insieme chiuso $\mathfrak{J}$, si deve avere

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{7}$$

Intendiamo qui acquisite tutte quelle proprietà che ovviamente si deducono dalle definizioni poste ([14]).

9. - Poniamo

$$x-x_0=\Delta x, \qquad f(x)-f(x_0)=\Delta y, \qquad y=f(x).$$

Le matrici Δx e Δy sono entrambe in A, mentre x ed x_0 sono entrambe in $\mathfrak{J}$ ed x_0 è elemento di accumulazione di $\mathfrak{J}$, che supponiamo chiuso.

Potrà allora accadere che per ogni x variabile in $\mathfrak{J}$, o in una sfera di centro x_0 (e raggio conveniente) appartenente ad $\mathfrak{J}$, si abbia che:

([14]) Per esse rimandiamo il lettore alle Memorie dello SPAMPINATO.

a) esistono due ben determinate matrici z e w di A, la prima indipendente da Δx, tali che ([15])

$$\Delta y = z \cdot \Delta x + w; \tag{8}$$

b) risulta

$$\operatorname{mod} w = \mu \cdot \operatorname{mod} \Delta x \tag{9}$$

con μ numero reale tendente a zero *comunque* Δx tende alla matrice nulla.

In tali condizioni si dice che $y = f(x)$ è *differenziabile* in x_0 e che ivi il suo *differenziale* è $z\Delta x$, mentre la *derivata* è z. Si scriverà anche

$$dy = df(x) = z\Delta x, \tag{10}$$

$$z = f'(x_0) = y_0'. \tag{11}$$

Segue che può porsi $\Delta x = dx$, quindi

$$dy = zdx.$$

Se $\mathfrak{J}$ è perfetto ed $y = f(x)$ è differenziabile in ogni elemento di $\mathfrak{J}$, o di una sua parte $\mathfrak{J}_1$, si definisce ovviamente la *funzione derivata* $z(x) = f'(x)$ di $f(x)$ in $\mathfrak{J}_1$.

Scriveremo talvolta

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{12}$$

per quanto una tale scrittura perda significato per $dx = \Delta x$ degenere. Tuttavia essa non può dar luogo ad ambiguità (almeno quando A è commutativa).

Con la stessa avvertenza, hanno significato le scritture

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = z. \end{cases} \tag{13}$$

Osserviamo che nell'ultima relazione riesce ormai indifferente il modo come Δx tende a zero, visto che z non dipende da Δx.

Seguono le ordinarie regole di derivazione o differenziazione e le solite proprietà delle funzioni differenziabili.

([15]) Perchè la matrice z sia definita senza ambiguità da questa (8), occorre, ovviamente, che Δx non sia divisore dello zero. Convien perciò eliminare tutti gli elementi di A nulli o divisori dello zero. *Ciò può sempre supporsi effettuato e sarà, qui e nel seguito, sottinteso.*

Osserviamo però che, a meno che A non possegga dei *nullifici* di se stessa (cioè degli elementi il cui prodotto per ogni matrice di A è sempre nullo) i nullifici di Δx *dipendon* da Δx. Quindi l'ipotesi che z sia indipendente da Δx implica, almeno in generale, che z resti ben determinata dalla (8) non appena fissati Δy e w.

10. - Poniamo

(14) $$\begin{cases} x_0 = \xi_1^0 u_1 + \dots + \xi_m^0 u_m, \\ y = \eta_1 u_1 + \dots + \eta_m u_m. \end{cases}$$

Se y è funzione di x in A, definita in un suo insieme $\mathfrak{J}$, le coordinate $\eta_1, \dots, \eta_m$ di y saran funzioni di quelle $\xi_1, \dots, \xi_m$ di x: dalla continuità o differenziabilità di y in x_0, seguono, come andiamo a constatare, quelle delle funzioni $\eta_1, \dots, \eta_m$ nel punto $\xi_1^0 \dots \xi_m^0$.

Porremo ancora

$$\eta_r = \eta_r(\xi_1, \dots, \xi_m); \qquad \eta_r^0 = \eta_r(\xi_1^0, \dots, \xi_m^0), \qquad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Introducendo l'm-complesso verticale *simbolico* (perchè i suoi elementi son matrici, anzichè numeri),

$$u = (u_1, \dots, u_m)_{-1}$$

e quelli, *effettivi*, orizzontali,

(15) $$\begin{cases} \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m), & \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \\ \xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0), & \eta^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_m^0) \end{cases}$$

onde

(16) $$\Delta\xi = \xi - \xi^0 = (\Delta\xi_1, \dots, \Delta\xi_m); \qquad \Delta\eta = \eta - \eta^0 = (\Delta\eta_1, \dots, \Delta\eta_m)$$

si può scrivere

(17) $$\begin{cases} x = \xi \cdot u, \quad y = \eta \cdot u, \quad x_0 = \xi^0 u, \quad y_0 = \eta^0 u \\ \Delta x = \Delta\xi \cdot u, \quad \Delta y = \Delta\eta \cdot u. \end{cases}$$

Ponendo ancora, con significato ormai evidente,

(18) $$z = \zeta u, \quad w = \nu \cdot u; \qquad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m), \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$$

la (8) diventa

(8_1) $$\Delta\eta \cdot u = \zeta \cdot u \cdot \Delta\xi \cdot u + \nu \cdot u.$$

Occorre qui introdurre le costanti γ_{rsj} di moltiplicazione dell'algebra A, che si definiscono con le relazioni

$$u_r u_s = \sum_j^{1,\dots,m} \gamma_{rsj} u_j.$$

Con ciò si ha

(19) $$u_r \cdot \Delta\xi \cdot u = \chi^{(r)} \cdot u$$

dove s'intende

(20) $$\chi^{(r)} = (\chi_1^{(r)}, \dots, \chi_m^{(r)}), \qquad \chi_j^{(r)} = \sum_s^{1,\dots,m} \gamma_{rsj} \Delta\xi_s.$$

Quindi si ottiene

(21) $$u \cdot \Delta\xi \cdot u = \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \cdots \\ \chi^{(m)} \end{pmatrix} \cdot u = \chi \cdot u,$$

ove si è intanto definito χ. Dalla (8_1) discende allora che

(22) $$\Delta\eta = \zeta \cdot \chi + \nu,$$

cioè a dire

(22′) $$\Delta\eta_j = \sum_r^{1,\ldots,m} \zeta_r \cdot \chi_j^{(r)} + \nu_j, \qquad (j=1, 2,\ldots, m).$$

Indicando con ζ'_{sj} i parametri ([16]) di z ossia ponendo

(23) $$\zeta'_{sj} = \sum_r^{1,\ldots,m} \zeta_r \cdot \gamma_{rsj}$$

le (22′) diventano, a causa della (20):

(22″) $$\Delta\eta_j = \sum_s^{1,\ldots,m} \zeta'_{sj} \Delta\xi_s + \nu_j$$

onde dovrà porsi

(24) $$\Delta\eta = \Delta\xi \cdot Z + \nu$$

ove $Z = \|\zeta'_{sj}\|$ è la *matrice dei parametri* di z.

Si osservi ora che per le ipotesi fatte su z e su w, la matrice Z è indipendente da $\Delta\xi$ e mod $w = \sqrt{\nu \cdot \bar{\nu}_{-1}} = \mu \cdot \text{mod}\, x = \mu \sqrt{\xi \cdot \bar{\xi}_{-1}}$. Perciò la (24) ci assicura che può porsi

(25) $$d\eta = \Delta\xi \cdot Z = d\xi \cdot Z$$

cioè che η è differenziabile, ossia lo sono le funzioni $\eta_r(\xi_1,\ldots, \xi_m)$. Scrivendo

$$d\eta_j = \frac{\partial\eta_j}{\partial\xi_1} d\xi_1 + \ldots + \frac{\partial\eta_j}{\partial\xi_m} d\xi_m$$

e tenendo conto dell'arbitrarietà dei differenziali delle variabili indipendenti $\xi_1,\ldots, \xi_m$, la (25) ci assicura che

(26) $$\frac{\partial\eta_j}{\partial\xi_h} = \zeta'_{hj} \qquad (j, h=1, 2,\ldots, m).$$

([16]) SCORZA G., loco cit., p. 289. I parametri di cui sopra, pel modo come abbiam scritto le relazioni precedenti, (che è quello che si adoprerebbe per la differenziabilità a destra) sono i parametri *sinistri* di z. Ma poichè la nostra algebra è commutativa essi coincidono coi parametri *destri* e perciò li diciamo senz'altro *parametri*. Così per la matrice Z.

Complessivamente, si ha

$$(27)\qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_m} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_m} \end{pmatrix} = Z_{-1} = \begin{pmatrix} \zeta'_{11} \cdots \zeta'_{m1} \\ \cdots\cdots \\ \zeta'_{1m} \cdots \zeta'_{mm} \end{pmatrix}$$

e si enuncia che (17):

Se y è funzione differenziabile di x, le coordinate di y sono funzioni differenziabili delle coordinate di x e la matrice jacobiana delle prime rispetto alle seconde coincide con la trasposta della matrice dei parametri della derivata di y rispetto ad x.

Risalendo la catena delle relazioni (8) a (22), si ha l'inversione della proposizione ora enunciata.

§ 3. - Funzioni di più matrici.

11. - Non occorre fermarsi sull'estensione alle funzioni di più matrici dei concetti e delle proprietà di cui al paragrafo precedente, trattandosi di cosa abbastanza ovvia.

È però utile intrattenersi alquanto sul concetto di *funzione differenziabile di più matrici.* Ci limiteremo, per semplicità, alle funzioni di due matrici.

Sia, in A, la funzione

$$z = f(x, y)$$

delle due matrici x, y variabili nei due insiemi chiusi $\mathfrak{J}_1$ ed $\mathfrak{J}_2$ di A e siano x_0, y_0 due elementi di accumulazione di detti insiemi.

Si dirà che z è differenziabile in (x_0, y_0) quando si verifichino le seguenti condizioni:

a) esistono quattro matrici ben determinate U, V, w, t di A, le prime due indipendenti da $\Delta x = x - x_0$ e da $\Delta y = y - y_0$, per le quali si ha

$$(1)\qquad \Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = U\Delta x + V\Delta y + w + t,$$

relazione valevole per x, y variabili rispettivamente in $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ od (almeno) in due sfere di centri x_0, y_0 e raggi convenienti, appartenenti a detti insiemi;

b) si ha

$$(2)\qquad \text{mod}\, w = \mu \cdot \text{mod}\, \Delta x, \quad \text{mod}\, t = \nu \cdot \text{mod}\, \Delta y$$

con μ, ν valori finiti tendenti a zero quando tendono comunque a zero entrambi

(17) SPAMPINATO N.: *a*). *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo.* [Rend. Lincei, vol. XXI (1935-XIII)], n.° 1; *b*). *Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili.* [Ibidem], n.° 1.

i moduli di Δx e di Δy, cioè al tendere simultaneamente alla matrice nulla dei due incrementi Δx e Δy.

In tali condizioni si dice anche che $U\Delta x + V\Delta y$ è il *differenziale totale* di $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0) e si scriverà

$$dz = U\Delta x + V\Delta y = Udx + Vdy,$$

poichè manifestamente si ha $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Ponendo, in (1), successivamente $x = x_0$, $y = y_0$ si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = V\Delta y + t^0 \\ f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = U\Delta x + w^0 \end{array} \right. \tag{3}$$

ove il significato di t^0 e w^0 è manifesto, insieme alle conseguenze delle condizioni $a)$ e $b)$.

Da queste (3) si deducono i *differenziali parziali* di z

$$\partial_x z = U\Delta x = Udx; \qquad \partial_y z = V\Delta y = Vdy.$$

Si scriverà

$$U = \frac{\partial z}{\partial x_0} = z'_{x_0} = f_x'(x_0, y_0); \qquad V = \frac{\partial z}{\partial y_0} = z'_{y_0} - f_y'(x_0, y_0)$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_0}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y_0}\, dy,$$

con le solite avvertenze relative al caso in cui i denominatori ∂x, ∂y sian degeneri.

Adottando le notazioni del n.° 10, scriveremo

$$x = \sum_r \xi_r u_r = \xi u, \qquad y = \sum_r \eta_r u_r = \eta u, \qquad z = \sum_r \zeta_r u_r = \zeta u$$
$$U = \sum_r \mu_r u_r = \mu u; \qquad V = \sum_r \nu_r u_r = \nu u$$

onde, in base allo stesso n.° 10, si ha che le coordinate ζ_j di z sono funzioni parzialmente derivabili rispetto alle variabili (complesse) ζ_h, η_h e che

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial \xi_h} = \mu'_{hj}, \qquad \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_h} = \nu'_{hj} \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

dove μ'_{hj}, ν'_{hj} sono i parametri ([18]) di U e di V.

12. - Di qui ricaviamo una conseguenza che sarà invocata nel paragrafo seguente.

Per x variabile in $\mathfrak{I}_1$ o in una sua parte $\mathfrak{I}_1'$, sia identicamente $U = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

([18]) Se A è commutativa basta dir parametri, altrimenti questi son parametri sinistri o destri secondo che si sta considerando la differenziabilità a destra o a sinistra di $z = f(x, y)$. Le scritture adoperate corrispondono esattamente alla differenziabilità a destra.

Saran nulle le coordinate μ_r ed i parametri μ'_{hj} di U quindi, per le (4), le ζ_j sono indipendenti dalle ξ_h, cioè ζ non dipende da ξ e $z=f(x, y)$ è indipendente da x.

Almeno nel caso che qui a noi interessa, vale anche la proprietà inversa ([19]). Osserviamo perciò che le (4) permettono di scrivere

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_h}=\mu U_h$$

dove U_h è la matrice dei parametri ([20]) dell'unità u_h dell'algebra A.

Poichè questa si è supposta dotata di modulo (cioè in A figura la matrice identica) può scegliersi u_h eguale a questo modulo e risulterà ([21]) $U_h=I$. Può dunque supporsi, per questa scelta di u_h, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_h}=\mu$. Onde, se z non dipende da x, ossia se ζ non dipende da ξ, si ha necessariamente $\mu=0$, quindi $U=0$.

Abbiam dunque che:

Se z è funzione differenziabile delle due variabili x, y nell'algebra A, condizione necessaria e sufficiente perchè z sia indipendente da una di queste variabili è che si annulli identicamente la derivata parziale di z rispetto a detta variabile.

§ 4. - Funzioni olomorfe di matrici.

13. - Ricorrendo alla rappresentazione ridotta dell'algebra A (ora necessamente commutativa) si scriva

$$x=x^*v_1+x^{**}v_2, \qquad y=y^*v_1+y^{**}v_2. \tag{1}$$

Variando $x=x^{**}$ nell'insieme $\mathfrak{J}$ di A, x^* varierà nell'insieme $\mathfrak{J}^*$ dell'algebra A^* trasposto-coniugata di A. E se $y=y^{**}$ è funzione di $x=x^{**}$ in A, definita in $\mathfrak{J}$, y^* sarà funzione di x^* in A^*, definita in $\mathfrak{J}^*$.

Se prescindessimo dalle considerazioni che han dato luogo alla rappresentazione ridotta di A, l'essere y funzione di x definita in $\mathfrak{J}$, porterebbe come conseguenza soltanto che y^* ed y^{**} sarebbero funzioni ciascuna delle due matrici x^* ed x^{**}, variabili in certi due insiemi $\mathfrak{J}_1$ ed $\mathfrak{J}_2$, dedotti da $\mathfrak{J}$.

Poniamoci, per maggior generalità, in queste condizioni.

Dire che y è funzione differenziabile di x, significa poter porre

$$dy=zdx \tag{2}$$

([19]) *A priori*, cioè per la sola definizione, la verità di questa inversa non sembra senz'altro affermabile.

([20]) *Destri*, se A non fosse commutativa. Vedi SCORZA G., loco cit., p. II, n.° 184, p. 289.

([21]) Ibidem, n.° 189, p. 293.

con

$$\left\{\begin{aligned} z &= z^* v_1 + z^{**} v_2 , \\ dx &= dx^* v_1 + dx^{**} v_2 , \\ dy &= dy^* v_1 + dy^{**} v_2 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ed infine

$$\left\{\begin{aligned} dy^* &= y^*_{x^*} dx^* + y^*_{x^{**}} dx^{**} \\ dy^{**} &= y^{**}_{x^*} dx^* + y^{**}_{x^{**}} dx^{**} . \end{aligned}\right. \tag{4}$$

In queste relazioni $dx^* = \Delta x^*$ e $dx^{**} = \Delta x^{**}$ variano in $\mathfrak{J}_1$ e $\mathfrak{J}_2$ in modo che $dx = \Delta x$ varî in $\mathfrak{J}$: $y^*_{x^*}$, $y^*_{x^{**}}$, $y^{**}_{x^*}$, $y^{**}_{x^{**}}$ son le derivate parziali di y^*, y^{**} rispetto ad x^*, x^{**}. Cioè a dire, y^* ed y^{**} si devon supporre funzioni differenziabili di x^* ed x^{**}, variabili in $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$.

Si tenga presente che *questa definizione non è necessaria conseguenza di quelle date nei due paragrafi precedenti* ([22]); *essa ne è soltanto la naturale estensione,* nelle pseudo-algebre costruite innanzi.

Sostituendo le (3) nella (2) e tenendo conto della tabella di moltiplicazione delle unità v_1, v_2, si ricava subito

$$dy^* = z^* dx^* , \qquad dy^{**} = z^{**} dx^{**} . \tag{5}$$

Queste relazioni paragonate con le (4), per l'indipendenza dei differenziali dx^* e dx^{**}, ci danno

$$\left\{\begin{aligned} y^*_{x^*} &= z^* , \qquad & y^*_{x^{**}} &= 0 , \\ y^{**}_{x^*} &= 0 , \qquad & y^{**}_{x^{**}} &= z^{**} , \end{aligned}\right. \tag{6}$$

le quali, intanto, per la proprietà dimostrata in fine del § 3, ci fanno ritrovare che y^* è funzione della sola x^* ed y^{**} della sola x^{**}.

Dopo di che potremo scrivere, per la (2),

$$y' = z = y^*_{x^*} \cdot v_1 + y^{**}_{x^{**}} \cdot v_2 \tag{7}$$

od anche, con l'avvertenza solita:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy^*}{dx^*} v_1 + \frac{dy^{**}}{dx^{**}} v_2 . \tag{7'}$$

La funzione $y = f(x)$ qui considerata si dirà *funzione olomorfa della matrice x, in A, definita in $\mathfrak{J}$.*

Osservazione. - Nelle (4)-(5)-(6) si potrebbe parlar soltanto di derivate destre. Ma poichè A è commutativa, la (2) può scriversi anche $dy = dx \cdot z$ onde, sostituendovi le (3) e scrivendo i differenziali dx^*, dx^{**}, nelle (4), a sinistra anzichè

([22]) Perchè la rappresentazione ridotta dell'algebra A non coincide con quella propria di un'algebra.

a destra, le (6) diventan derivate sinistre. Dunque y^* ed y^{**} han derivate destre coincidenti con le sinistre: perciò basta dir soltanto « derivate ».

14. - Si badi che la condizione di olomorfismo è compendiata nelle (6) e nella (7) e che questa non discende da quelle, poichè la (7) esige che $y^*_{x^*}$, $y^{**}_{x^{**}}$ sian due matrici trasposte coniugate e che z sia in A.

Perciò la definizione di cui all'articolo precedente si enuncia esattamente come appresso.

Si dice che la matrice $y=y^*v_1+y^{**}v_2$ *è funzione olomorfa della matrice* $x=x^*v_1+x^{**}v_2$ *nell'algebra commutativa* A (definita in un certo insieme $\mathfrak{J}$ di variabilità di x in A) *quando* y^* *ed* y^{**} *son funzioni differenziabili rispettivamente della sola* x^* *e della sola* x^{**} *e quando le loro derivate* $y^*_{x^*}$ *ed* $y^{**}_{x^{**}}$ *son due matrici trasposto-coniugate tali che* $z'=y^*_{x^*}v_1+y^{**}_{x^{**}}v_2$ *sia in* A. *Dopo di che* y *è differenziabile ed ha per derivata*

(8) $$y'=y^*_{x^*}\cdot v_1+y^{**}_{x^{**}}\cdot v_2=y^{**}_{x^{**}}.$$

15. - Torniamo ora alle parti antisimmetriche ed antiemisimmetriche degli elementi di A scrivendo

(9) $$x=sj_1+tj_2, \qquad y=\sigma j_2+\tau j_2.$$

Essendo y funzione di x, le matrici σ e τ son funzioni di s e t. Precisamente si ha

(10) $$\begin{cases} \sigma=\frac{1}{2}(y^*+y^{**}), & \tau=\frac{1}{2}(-y^*+y^{**}) \\ x^*=s-t, & x^{**}=s+t \end{cases}$$

onde applicando (com'è manifestamente consentito da quel che precede) la regola di derivazione delle funzioni composte si ha ([23])

(11) $$\begin{cases} \sigma_s'=\frac{1}{2}(y^*_{x^*}+y^{**}_{x^{**}}), & \tau_s'=\frac{1}{2}(-y^*_{x^*}+y^{**}_{x^{**}}) \\ \sigma_t'=\frac{1}{2}(-y^*_{x^*}+y^{**}_{x^{**}}), & \tau_t'=\frac{1}{2}(y^*_{x^*}+y^{**}_{x^{**}}) \end{cases}$$

quindi

(12) $$\sigma_s'=\tau_t', \qquad \sigma_t'=\tau_s'.$$

Inoltre, la prima delle due matrici ora scritte è antisimmetrica mentre l'altra è antiemisimmetrica.

Dalle (11) segue che

(13) $$y^*_{x^*}=\sigma_s'-\tau_s'=\tau_t'-\sigma_t'\,; \qquad y^{**}_{x^{**}}=\sigma_s'+\tau_s'=\sigma_t'+\tau_t'$$

([23]) Anche per σ e τ, in conseguenze di quanto si è visto per y^* e y^{**}, le derivate parziali destre, rispetto ad s e a t, coincidono con le sinistre.

quindi, dalla (8):

$$y'=\sigma_s' j_1+\tau_s' j_2=\tau_t' j_1+\sigma_t' j_2=y_s'=y_t' \tag{14}$$

ossia, con la solita avvertenza,

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\sigma}{\partial s} j_1+\frac{\partial\tau}{\partial s} j_2=\frac{\partial\tau}{\partial t} j_1+\frac{\partial\sigma}{\partial t} j_2=\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{14'}$$

Prendendo ds e dt nei sistemi S e T in cui variano s e t in modo che la loro somma sia in A, potrà scriversi

$$dx=ds\cdot j_1+dt\cdot j_2, \qquad dy=y'dx, \tag{15}$$

e si ottiene, per la (14'):

$$dy=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s} ds+\frac{\partial\sigma}{\partial t} dt\right)j_1+\left(\frac{\partial\tau}{\partial s} ds+\frac{\partial\tau}{\partial t} dt\right)j_2. \tag{16}$$

Questa ci dice anche che i due differenziali

$$d\sigma=\frac{\partial\sigma}{\partial s} ds+\frac{\partial\sigma}{\partial t} dt, \qquad d\tau=\frac{\partial\tau}{\partial s} ds+\frac{\partial\tau}{\partial t} dt \tag{17}$$

son due matrici la prima antisimmetrica, la seconda antiemisimmetrica. Perciò potrà scriversi

$$dy=d\sigma\cdot j_1+d\tau\cdot j_2. \tag{18}$$

Viceversa, da queste due ultime, in base alle (12), si risale alla (14) e poi, mediante le (10)-(11), alla (8).

Dopo di che la definizione del numero precedente si muta in quest'altra:

La matrice $y=\sigma j_1+\tau j_2$ si dice funzione olomorfa di $x=sj_1+tj_2$ in un'algebra commutativa A quando σ e τ sono funzioni differenziabili di s e t con le derivate parziali soddisfacenti alle condizioni

$$\sigma_s'=\tau_t', \qquad \sigma_t'=\tau_s' \tag{I}$$

e quando inoltre la matrice $\sigma_s'=\tau_t'$ è antisimmetrica mentre $\sigma_t'=\tau_s'$ è antiemisimmetrica e la loro somma è in quell'algebra.

La derivata di y si esprime con le (14), che riscriviamo

$$y'=\sigma_s'\cdot j_1+\tau_s'\cdot j_2=\tau_t'\cdot j_1+\sigma_t'\cdot j_2 \tag{II}$$

e le (I) possono compendiarsi nell'unica relazione, conseguenza di quelle ora scritte,

$$y_s'=y_t'. \tag{III}$$

Osservazione. - In questa seconda definizione la commutatività di A non è ipotesi essenziale: se essa non si suppone, si può lasciar la definizione posta sopprimendo ovunque i simboli j_1 e j_2. E si potrebbe anche far distinzione fra olomorfismo a destra ed olomorfismo a sinistra.

Invero, posto che sian verificate le (I) e che $\sigma_s' + \tau_s' = \sigma_t' + \tau_t'$ stia in A, basta prender $ds + dt = dx$ in A per poter dedurre, dalle (17),

$$dy = d\sigma + d\tau = (\sigma_s' + \tau_s')dx = (\sigma_t' + \tau_t')dx$$

con dy in A. E si può, occorrendo, ritener che si tratti di sole derivate e differenziali destri (o sinistri).

Noi ci manterremo sempre nel caso più restrittivo, supponendo A commutativa, altrimenti le proprietà che andiamo a esporre verrebbero in gran parte meno.

§ 5. - Esempi di funzioni olomorfe di matrici.

16. - Posto

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2, \qquad y = y_1 v_1 + y_2 v_2 = x^p$$

la tabella di moltiplicazione delle v_1, v_2 ci fa subito trovare

$$x^p = x_1^p v_1 + x_2^p v_2, \qquad y_1 = x_1^p, \qquad y_2 = x_2^p.$$

E poichè l'algebra A in cui operiamo è commutativa si ha

$$y'_{1x_1} = p x_1^{p-1}, \qquad y'_{2x_2} = p x_2^{p-1}$$

quindi

$$y' = p(x_1^{p-1} v_1 + x_2^{p-1} v_2) = p x^{p-1},$$

funzione che appartiene ad A. Dunque $y = x^p$ è funzione olomorfa di x.

Ne segue l'olomorfismo delle funzioni razionali intere e delle serie di potenze ad esponenti interi e positivi, con coefficienti appartenenti alla stessa algebra A. Queste ultime risultan derivabili termine a termine.

Per provare l'olomorfismo delle funzioni razionali fratte e delle serie di potenze ad esponenti interi anche negativi, basta provar quello della funzione

$$y = \frac{I}{x}.$$

Questa è intanto derivabile ed ha per derivata $-I : x^2$, come subito si constata. Per verificare l'olomorfismo, poniamo, al solito

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2, \qquad y = y_1 v_1 + y_2 v_2.$$

Dalla relazione $xy = yx = I = I v_1 + I v_2$ si ha senz'altro

$$y_1 = I : x_1, \quad y_2 = I : x_2$$

quindi

$$y'_{1x_1} = -I : x_1^2, \quad y'_{2x_2} = -I : x_2^2.$$

Queste essendo fra loro trasposte coniugate ci permettono di scrivere

$$y' = -\left(\frac{I}{x_1} v_1 + \frac{I}{x_2} v_2\right)^2 = -\frac{I}{x^2}.$$

17. - La considerazione di una serie di potenze della matrice x come funzione di x presuppone un criterio di convergenza. Questo esiste ed è stato stabilito dallo SPAMPINATO ([24]) e da me ([25]).

Una serie di potenze

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + \dots$$

ponendo

$$a_r = \| a_r^{hj} \| \qquad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (h, j = 1, 2, \dots, n)$$

risulta convergente in x, quando e solo quando lo sono le n^2 serie di variabile complessa z

$$(2) \qquad f_{hj}(z) = a_0^{hj} + a_1^{hj} z + a_2^{hj} z^2 + \dots \qquad (h, j = 1, 2, \dots, n)$$

per z eguale alle radici caratteristiche della matrice x.

Queste radici variano con continuità al variare di x. Se dunque x è variabile in un insieme perfetto $\mathfrak{J}$ di A, e se la (1) è convergente per $x = x_0$, si può restringere convenientemente $\mathfrak{J}$ intorno ad x_0 (ad esempio in una sfera di centro x_0 e raggio opportuno) per modo che le radici caratteristiche di x restino nel campo di convergenza comune alle serie (2): nell'intorno di x_0 così ristretto la (1) risulterà convergente e vi definisce una funzione $f(x)$ in A, ovviamente olomorfa. Le derivate successive di questa $f(x)$ sono anch'esse olomorfe nello stesso intorno di x_0.

18. - Quanto ora si è detto può applicarsi allo sviluppo in serie di potenze della funzione

$$(3) \qquad y = \frac{I}{a - x} = (a - x)^{-1},$$

dove a ed x sono due matrici di A (commutativa) la prima costante, la seconda variabile.

Poichè la serie di potenze di variabile complessa

$$(4) \qquad \frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^p + \dots$$

converge per $|z| < 1$, detta serie converge anche se z è una matrice, purchè le radici caratteristiche di essa siano, in modulo, tutte inferiori all'unità.

([24]) Memoria I cit., pag. 31.

([25]) CHERUBINO S.: *Sulle funzioni di matrici* [Boll. Acc. Gioenia, 1935] e: *Sulle serie di potenze di una variabile in un'algebra* [Rend. Lincei, vol. XXII, s. 6ª (1935)]. In queste 2 Note si dà anche una precisazione dell'importante teorema dello SPAMPINATO.

Poniamo che a sia non degenere e facciamo variare x in maniera che $a^{-1}x$ abbia le sue radici caratteristiche, tutte di modulo inferiore ad uno, pel che basta che le radici caratteristiche di x siano tutte, in modulo, inferiori a quelle di a ([26]). In tali condizioni la (4) converge per $z=a^{-1}x$ e potrà scriversi

$$ay=\frac{I}{I-a^{-1}x}=I+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\ldots,$$

quindi

(5) $$\frac{I}{a-x}=\frac{I}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\ldots+\frac{x^p}{a^{p+1}}+\ldots$$

Anche se a è degenere, purchè le radici caratteristiche di $x-(a-I)$ siano tutte di modulo inferiore ad 1, si può scrivere

(6) $$\frac{I}{a-x}=\frac{I}{I-[x-(a-I)]}=I+[x-(a-I)]+[x-(a-I)]^2+\ldots$$

In particolare, se le radici caratteristiche di x, *diminuite di uno*, hanno moduli tutti inferiori ad 1, si ha

(7) $$-\frac{I}{x}=\frac{I}{I-(x+I)}=I+(x+I)+(x+I)^2+\ldots$$

E se la matrice x si mantiene non degenere, mentre le sue radici caratteristiche son sempre superiori, in modulo, a quelle di a, si può porre

(8) $$-\frac{I}{a-x}=\frac{I}{x}\cdot\frac{I}{I-\dfrac{a}{x}}=\frac{I}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\ldots$$

Infine se x, non degenere, ha radici caratteristiche tutte di modulo superiore ad uno, si ha

(9) $$-\frac{I}{I-x}=\frac{I}{x}+\frac{I}{x^2}+\frac{I}{x^3}+\ldots$$

§ 6. - Integrazione ([27]).

19. - La funzione $y=f(x)$, considerata nell'algebra commutativa A, sia definita nell'insieme $\mathfrak{J}$ di A costituito dai punti di una curva Γ di JORDAN, semplice, continua e rettificabile dello spazio reale euclideo Σ_{2m} rappresentativo di A. Siano a e b due matrici assegnate di $\mathfrak{J}$, corrispondenti a due punti di Γ, e supponiamo che $f(x)$ sia continua in $\mathfrak{J}$. Stabilito su Γ un verso, che diciamo da a a b, queste due matrici individueranno un arco di Γ che diremo arc ab.

([26]) O meglio, soltanto a quelle *corrispondenti* di a. Invero, poichè $a^{-1}x=xa^{-1}$, le radici caratteristiche di questo prodotto si hanno moltiplicando quelle di x per quelle di a^{-1} (cioè per le inverse delle radici caratteristiche di a) convenientemente ordinate. Così in seguito.

([27]) Anche per questo paragrafo il lettore può utilmente tener presente le Memorie dello SPAMPINATO cit. ([1]).

Ciò posto, l'integrale

$$\int_{\text{arc } ab} f(x)\,dx$$

si definisce come limite delle solite somme

$$\sum_r^{0,\dots,m} f_r \cdot \Delta x_r$$

ove si è posto

$$f_r = f(x_r'), \qquad \Delta x_r = x_{r+1} - x_r$$

con $x_0 = a$, $x_1, \dots, x_2, \dots, x_{m+1} = b$ punti di Γ susseguentisi nel verso fissato, ed x_r' punto di Γ appartenente all'arco $x_r x_{r+1}$.

Per la continuità di $f(x)$, la somma di cui sopra tende ad un limite indipendente sia dalla legge con la quale si scelgono i punti x_r ed x_r' sia da quella con la quale tende a zero ciascuno degli archi $x_r x_{r+1}$.

Indicando con L la lunghezza dell'arco ab di Γ, la definizione ora posta dà subito, al modo abituale

(1) $$\operatorname{mod} \int_{\text{arc } ab} f(x)\,dx \leqslant aML$$

ove M è il massimo modulo di $f(x)$ lungo l'arco, ed a è la costante già incontrata all'art. 7 (§ 2).

Seguono ovviamente le solite proprietà elementari della nozione di integrale, di cui ci serviremo nel seguito.

20. - Dalla definizione segue subito che

(2) $$\int_{\text{arc } ab} dx = b - a\,; \qquad \int_{\text{arc } ab} x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Infatti, il primo è limite della somma costante

$$\sum_r^{0,\dots,m} (x_{r+1} - x_r) = b - a,$$

mentre il secondo è il comune limite delle due somme

$$\sum_r^{0,\dots,m} x_r(x_{r+1} - x_r), \qquad \sum_r^{0,\dots,m} x_{r+1}(x_{r+1} - x_r)$$

quindi della loro semisomma che è la costante

$$\frac{1}{2}\sum_r^{0,\dots,m} (x_{r+1} + x_r)(x_{r+1} - x_r) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad (^{28}).$$

([28]) Qui interviene la commutatività di A.

Segue che, *se Γ è chiusa*,

$$\int_{\Gamma} dx = 0, \qquad \int_{\Gamma} x dx = 0. \tag{3}$$

21. - È facile accorgersi che mentre la matrice x, cioè il suo punto rappresentativo in Σ_{2m}, descrive un arco Γ di JORDAN continuo e rettificabile, la trasposta coniugata x^* ne descrive un altro Γ^* anch'esso continuo e rettificabile. Ciò dipende essenzialmente dal fatto, di per sè ovvio, che

$$\text{mod}\, x = \text{mod}\, x^*, \tag{4}$$

e dalla rappresentabilità di A^* in $\Sigma^*_{2m} = \Sigma_{2m}$.

Così pure si riconosce che, posto

$$x = sj_1 + tj_2 \quad \text{quindi} \quad x^* = sj_1 - tj_2$$

le 2 matrici s e t descrivono, nei due spazi rappresentativi dei sistemi S e T dedotti da A, due archi di JORDAN Γ_s e Γ_t, perfettamente determinati da Γ, ed anch'essi continui e rettificabili.

Se Γ è chiuso, lo son certo anche Γ^*, Γ_s e Γ_t. Però, mentre dall'esser chiuso Γ^* segue che lo è Γ, occorre supporre che sian chiusi *entrambi* gli archi Γ_s e Γ_t per dedurre che lo è anche Γ. Il che è abbastanza ovvio. Ed analogamente, se Γ presenta un *nodo*, ne possiede uno anche Γ^*, ed uno ne posseggono entrambe le curve Γ_s e Γ_t, in corrispondenza dello stesso valore del parametro, nel comune intervallo base delle 4 curve ora dette ([29]). Viceversa, se per un certo valore di detto parametro, Γ_s e Γ_t presentano *entrambe* un nodo, lo possiederanno *ivi* anche Γ e Γ^*.

Segue che, posto

$$y = f(x) = \sigma j_1 + \tau j_2, \qquad x = sj_1 + tj_2, \qquad dx = dsj_1 + dtj_2 \tag{5}$$

si ha, tenendo conto della commutatività di y con dx,

$$z = \int_{\Gamma} f(x) dx = j_1 \left[\int_{\Gamma_s} \sigma ds + \int_{\Gamma_t} \tau dt \right] + j_2 \left[\int_{\Gamma_s} \tau ds + \int_{\Gamma_t} \sigma dt \right] \tag{6}$$

$$z^* = \int_{\Gamma^*} y^* dx^* = j_1 \left[\int_{\Gamma_s} \sigma ds + \int_{\Gamma_t} \tau dt \right] - j_2 \left[\int_{\Gamma_s} \tau ds + \int_{\Gamma_t} \sigma dt \right], \tag{6*}$$

dove i versi da considerare su Γ^*, Γ_s, Γ_t son quelli indottivi dal verso fissato su Γ.

([29]) Per maggior semplicità, convien rappresentare x, x^*, $s = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $t = \frac{1}{2}(x - x^*)$ nello stesso spazio reale euclideo di dimensione $2n^2$ (n essendo l'ordine delle matrici di A): in esso le coordinate del punto variabile son date dalle parti reali e dalle imaginarie degli

§ 7. - Estensione del teorema di Cauchy.

22. - Imitando la dimostrazione del GOURSAT, premetteremo il lemma seguente: *Sia $\mathfrak{I}$ un insieme perfetto e limitato dello spazio reale euclideo rappresentativo dell'algebra commutativa A ed $f(x)$ una funzione di x in A definita in $\mathfrak{I}$ ed ivi ammettente derivata in ogni punto di $\mathfrak{I}$ e della sua frontiera. Dico che dato un $\varepsilon > 0$ è sempre possibile decomporre $\mathfrak{I}$ in un numero finito di insiemi parziali tali che, all'interno o sulla frontiera di ciascuno di questi, esista un punto x_0 pel quale, mentre x descrive la frontiera dello insieme parziale, si ha*

$$\text{mod}\,[f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)] < \varepsilon \cdot \text{mod}\,(x-x_0). \tag{1}$$

Essendo $\mathfrak{I}$ limitato, esso è contenuto in un parallelepipedo P a spigoli paralleli agli assi coordinati. Decomponiamo P, mediante iperpiani paralleli a quelli coordinati, in un certo numero (finito) di parallelepipedi parziali fra loro eguali e consideriamo soltanto quelli che contengono punti di $\mathfrak{I}$ o della sua frontiera. Se il lemma non fosse vero, in uno (almeno) di questi parallelepipedi parziali, ad esempio in P_1, il lemma non sarebbe soddisfatto dalla parte di $\mathfrak{I}$ e della sua frontiera appartenente ad esso. Decomponiamo allo stesso modo P_1 in parallelepipedi parziali eguali: ne avremo uno, sia P_2, contenente punti di $\mathfrak{I}$ o della sua frontiera costituenti un insieme non soddisfacente al lemma.

Così continuando si avrebbe una successione di parallelepipedi

$$P, \quad P_1, \quad P_2, \dots \tag{2}$$

ciascuno contenente il successivo, le cui dimensioni tendono a zero, nei quali il nostro insieme non soddisfarebbe al lemma.

Sia x_0 un punto di $\mathfrak{I}$ o della sua frontiera, certo esistente, interno a tutti i parallelepipedi (2). In x_0 la $f(x)$ è derivabile, quindi (art. 9) assegnato $\varepsilon > 0$ si ha [n.° 9, condizione b)] un $y > 0$ tale che scelto a piacere x, in $\mathfrak{I}$, internamente ad una sfera di centro x_0 e raggio y, vale per esso la (1).

Orbene, i parallelepipedi (2), da un certo P_h in poi, son tutti interni a questa sfera, dunque, a cominciare da P_h, il lemma è soddisfatto ([30]).

---

elementi delle matrici predette. Allora il punto rappresentativo di x, che descrive Γ, ha le sue coordinate funzioni reali di un parametro λ, variabile in un certo intervallo $\lambda_0 \vdash\!\dashv \lambda_1$. Le coordinate dei punti che rappresentano x^*, s, t, descrivendo Γ^*, Γ_s, Γ_t, si deducono immediatamente da quelle di x, senza ricorrere alle considerazioni del § 1.

([30]) Per una dimostrazione fondata su una proposizione più generale di quella di PINCHERLE-BOREL, vedi TONELLI L.: *Su una proposizione fondamentale dell'analisi matematica* [Rend. Lincei, vol. XXIII, s. 6ª, 1936-XIV].

23. - L'insieme $\mathfrak{J}$ di cui al lemma dimostrato, sia una porzione Ω di superficie, connessa e col contorno Γ costituito di una o più curve semplici di JORDAN, ciascuna chiusa, continua e rettificabile. Gli insiemi parziali ottenuti da Ω con la costruzione precedente o con altra soddisfacente al lemma, consistano in porzioni $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_l$ di Ω i cui contorni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ sono altrettante curve chiuse di JORDAN come quelle di Γ. Poniamo infine che il contorno Γ di Ω faccia parte della riunione dei contorni $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ e che sia possibile percorrere la rete di questi in modo che ciascuna curva di Γ sia percorsa una sola volta, in uno dei due versi, mentre le rimanenti parti della rete predetta sian percorse ciascuna due volte, in sensi opposti.

In tali condizioni si ha ovviamente, nel verso ora descritto,

$$\int_{\Gamma} f(x)dx = \sum_{h}^{1,\ldots,l} \int_{\gamma_h} f(x)dx. \tag{3}$$

Diciamo x_h il punto di cui al lemma precedente, che appartiene ad Ω_h. Percorrendo x il contorno γ_h si avrà, pel lemma stesso

$$f(x) = f(x_h) + (x - x_h)f'(x_h) + w$$

con

$$\mathrm{mod}\, w < \varepsilon \cdot \mathrm{mod}\, (x - x_h).$$

Integrando si ha

$$\int_{\gamma_h} f(x)dx = [f(x_h) - x_h f'(x_h)] \int_{\gamma_h} dx + f'(x_h) \int_{\gamma_h} x dx + \int_{\gamma_h} w dx.$$

I primi due integrali, essendo γ_h chiusa, sono nulli mentre il terzo, dicendo l_h la lunghezza di γ_h, riesce, per la (1) del n.º 19, di modulo minore di $a l_h \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{mod}\,(x - x_h)$.

Sostituendo nella (3) si ha

$$\mathrm{mod} \int_{\Gamma} f(x)dx < a\varepsilon \sum_{h}^{1,\ldots,l} l_h \cdot \mathrm{mod}\,(x - x_h). \tag{4}$$

Poichè $\mathrm{mod}\,(x - x_h)$ non supera il diametro, finito, di Ω_h, la sommatoria al secondo membro è una quantità finita; tale è anche a, mentre ε è arbitraria, dunque il primo membro è nullo e si conclude che

$$\int_{\Gamma} f(x)dx = 0$$

cioè il teorema di CAUCHY è dimostrato.

§ 8. - Conseguenze del teorema di Cauchy.

24. - Poniamo che l'insieme limitato $\mathfrak{J}$ sia tale che su ogni linea di JORDAN chiusa continua e rettificabile valga il teorema di CAUCHY, cioè supponiamo che ogni tal linea sia contorno completo di una porzione di superficie, appartenente ad $\mathfrak{J}$, nelle condizioni dell'articolo precedente. Poniamo ancora che ogni coppia di punti di $\mathfrak{J}$ possa congiungersi con un arco che sia parte di una linea di JORDAN chiusa continua e rettificabile, appartenente ad $\mathfrak{J}$ e sia $f(x)$ una funzione della matrice x in A, definita su $\mathfrak{J}$, ed ivi derivabile.

In queste condizioni, considerati due punti a e z di $\mathfrak{J}$, il primo fisso, il secondo variabile, resta definita la funzione

$$F(z)=\int_a^z f(x)\,dx$$

indipendentemente dall'arco di JORDAN percorso per andare da a a z.

Dico che la (1) *è una funzione olomorfa in* A, *definita su* $\mathfrak{J}$.

Per la continuità di $f(x)$ su $\mathfrak{J}$, per ogni coppia z, x di $\mathfrak{J}$, se $z+x$ è ancora in $\mathfrak{J}$, si può porre (art. 8)

$$f(z+x)-f(z)=\varphi(x)$$

con $\mathrm{mod}\,\varphi(x)=\mu\,\mathrm{mod}\,x$, ove μ è un numero finito.

Si ha quindi, per y e $z+y$ in $\mathfrak{J}$,

$$F(z+y)-F(z)=\int_z^{z+y} f(x)\,dx=\int_0^y f(z+x)\,dx$$

$$=f(z)\int_0^y dx+\int_0^y \varphi(x)\,dx=yf(z)+\int_0^y \varphi(x)\,dx.$$

Dicendo l la lunghezza, finita, dell'arco di curva su cui si integra, si ha (art. 19)

$$\mathrm{mod}\int_0^y \varphi(x)\,dx\leqq a\cdot l\cdot\mu\cdot\mathrm{mod}\,x. \tag{2}$$

La lunghezza l dell'arco che congiunge 0 con y tende a zero quando y tende all'elemento nullo, sicchè confrontando la relazione

$$F(z+y)-F(z)=yf(z)+\int_0^y \varphi(x)\,dx$$

con la definizione (art. 9) di funzione differenziabile, si deduce, per la (2), che $F(z)$ è differenziabile e che la sua derivata è $f(x)$.

Ponendo ora
$$f(x)=\sigma j_1+\tau j_2, \qquad F(z)=Sj_1+Tj_2$$
si ha (art. 21)

(3)
$$S=\int_{\Gamma_s}\sigma ds+\int_{\Gamma_t}\tau dt, \qquad T=\int_{\Gamma_s}\tau ds+\int_{\Gamma_t}\sigma dt,$$

ove Γ_s e Γ_t sono archi di JORDAN compresi fra un punto fisso e uno variabile le cui lunghezze tendono entrambe a zero insieme a quella dell'arco Γ che congiunge a con z.

Di qui, per la continuità di $\sigma(s, t)$, $\tau(s, t)$, imitando il ragionamento precedente e tenendo presente la definizione di funzione differenziabile di 2 variabili (n.° 11), si ha

(4)
$$dS=\sigma ds+\tau dt, \qquad dT=\tau ds+\sigma dt$$

quindi

(5)
$$S_s'=T_t'=\sigma, \qquad S_t'=T_s'=\tau$$

e le condizioni di olomorfismo di $F(z)$ son verificate.

25. - La funzione $f(x)$ potrebb'essere assegnata mediante una serie di potenze

(6)
$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+ \dots$$

con a_0, a_1, a_2,.... elementi dell'algebra commutativa A in cui varia x ed in cui (o in un suo insieme) converge la serie (6) ossia è definita $f(x)$.

La integrazione per serie è manifestamente consentita sotto la condizione della convergenza della serie degli integrali.

Tenendo presente ([31]) il ragionamento che porta alla condizione di convergenza di una serie di potenze di matrici, si vede subito che quella desiderata si verifica, perchè son convergenti le serie degli integrali dei termini delle n^2 serie di variabile complessa z
$$f_{rh}(z)=a_0^{rh}+a_1^{rh}z+a_2^{rh}z^2+ \dots$$
nelle quali a_j^{rh} è l'elemento di posto rh della matrice a_j.

§ 9. - Integrale di Cauchy e teorema di Morera.

26. - Sia γ una circonferenza di centro a e raggio ϱ, situata in un piano principale ([32]) β dello spazio rappresentativo Σ_{2m} della nostra algebra commutativa A. Il piano β essendo principale, cioè passante per l'origine di Σ_{2m}, i

([31]) CHERUBINO S., Nota cit. ([25]).
([32]) SPAMPINATO N., Mem. I cit. ([1]), p. 12.

suoi punti sono rappresentativi di tutti e soli gli elementi μb di A, dove μ è un fattore scalare complesso arbitrario, mentre b è un qualunque elemento fisso e *non nullo*, di A, rappresentato su β.

Perciò, posto $a=\mu_0 b$, se x varia su γ, si ha

$$\frac{dx}{x-a}=\frac{bd\mu}{b(\mu-\mu_0)}=\frac{d\mu}{\mu-\mu_0}\cdot I,$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{dx}{x-a}=I\int_{\gamma_0}\frac{d\mu}{\mu-\mu_0}=2\pi i\cdot I, \qquad i=\sqrt{-1} \tag{1}$$

poichè, variando x su γ, cioè essendo $\text{mod}\,(x-a)=\varrho$, si ha

$$\text{mod}\,(\mu-\mu_0)=\frac{\varrho}{\text{mod}\,b}=\varrho_0 \tag{2}$$

cioè μ varia su di una circonferenza γ_0, del piano di GAUSS, di centro μ_0 e raggio ϱ_0.

Ciò posto, supponiamo che l'insieme $\mathfrak{J}$ di A, cioè dello spazio rappresentativo Σ_{2m}, in cui si è finora definita la nostra $f(x)$ continua e derivabile, oltre ad essere limitato e perfetto goda delle seguenti proprietà:

1°) per ogni suo punto a passa una superficie Ω appartenente ad $\mathfrak{J}$, soddisfacente alle condizioni che ci han permesso di dimostrare il teorema di CAUCHY;

2°) il punto a è interno ad una porzione Ω_1 di Ω, il cui contorno Γ_1, curva chiusa rettificabile di JORDAN, può deformarsi con continuità, rimanendo su Ω, fino a ridursi ad a e senza attraversare il contorno Γ di Ω;

3°) esiste, nel piano principale per a e col centro in a, una circonferenza γ che insieme a Γ_1 costituisce il contorno completo di una porzione di superficie appartenente ad $\mathfrak{J}$, e nelle condizioni di Ω, ma non passante per a;

4°) deformandosi con continuità il contorno Γ_1 su Ω sino a ridursi ad a, la circonferenza γ varia anch'essa con continuità sino a ridursi ad a insieme a Γ_1 ed alla porzione di superficie di cui in 3°).

Ad esempio, se $\mathfrak{J}$ contiene tutta una sfera di centro a, Γ_1 e γ potrebbero essere l'intersezione con essa della superficie Ω e del piano principale per a. La superficie di contorno $\Gamma_1+\gamma$ di cui in 3°) potrebb'essere situata su detta sfera ([33]). Le condizioni 2°) e 4°) si verificano facendo tendere a zero il raggio della sfera.

Con tali ipotesi, il teorema di CAUCHY ci permette di dedurre che

$$\int_{\Gamma_1}\frac{dx}{x-a}=\int_\gamma \frac{dx}{x-a}=2\pi i\cdot I. \tag{3}$$

([33]) Perchè questa porzione di superficie sia connessa basta che Γ_1 sia tutta da una stessa parte del piano principale condotto pel centro a della sfera.

27. - La funzione $\varphi(x)$ sia definita su $\mathfrak{J}$, escluso a, dalla relazione

$$\varphi(x)\cdot(x-a)=f(x)$$

e sia quindi continua e derivabile, con $f(x)$, sull'insieme $\mathfrak{J}$, inclusa la frontiera ma escluso a. L'integrale di $\varphi(x)$, salvo un'opportuna convenzione già fatta altre volte, esteso al contorno Γ della porzione Ω di superficie contenente a può scriversi

$$\int_{\Gamma}\frac{f(x)}{x-a}\,dx.$$

Per calcolarlo, circondiamo a col contorno Γ_1 di cui alla condizione 2°). Scegliendo opportunamente i versi in cui van descritti Γ e Γ_1 (e basta fissare uno solo di questi) si ha, pel teorema di CAUCHY esteso

$$\int_{\Gamma}\frac{f(x)}{x-a}\,dx=\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)}{x-a}\,dx. \tag{4}$$

La continuità di $f(x)$ ci permette di porre, per x su un conveniente Γ_1,

$$f(x)=f(a)+\eta(x) \tag{5}$$

con mod $\eta(x)<\varepsilon$, essendo $\varepsilon>0$ prefissato a priori.

Risulterà, per la precedente e per la ipotesi 3°):

$$\int_{\Gamma}\frac{f(x)}{x-a}\,dx=f(a)\int_{\Gamma_1}\frac{dx}{x-a}+\int_{\Gamma_1}\frac{\eta(x)}{x-a}\,dx=2\pi i\cdot f(a)+\int_{\Gamma_1}\frac{\eta(x)}{x-a}\,dx. \tag{6}$$

La (5) ci assicura anche che η è una funzione di x continua e derivabile su $\mathfrak{J}$, come $f(x)$. Perciò, considerando ancora la porzione di superficie di cui all'ipotesi 3°) ed applicando il teorema di CAUCHY, si ha

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\eta(x)}{x-a}\,dx=\int_{\gamma}\frac{\eta(x)}{x-a}\,dx. \tag{7}$$

Poichè γ è sul piano principale per a, variando x su esso si ha $x=\mu b$, $a=\mu_0 b$ con μ variabile complessa descrivente sul piano di GAUSS una circonferenza γ_0 di centro μ_0 e raggio $\frac{\varrho}{\operatorname{mod} b}$, ove ϱ è il raggio di γ. Quindi

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\eta(x)}{x-a}\,dx=\int_{\gamma_0}\frac{\eta(\mu b)}{\mu-\mu_0}\,d\mu,$$

e si ha, tenendo anche presente la (2):

$$\operatorname{mod}\int_{\gamma_0}\frac{\eta(\mu b)}{\mu-\mu_0}\,d\mu<2\pi a\varepsilon.$$

Ma ε è arbitrario, dunque l'integrale (7) è nullo e dalla (6) si ottiene

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(x)}{x-a}\,dx$$

che è la formola di CAUCHY.

28. - Dopo di ciò, è ovvio in che modo può dedursi la sviluppabilità di una funzione olomorfa $f(x)$ in serie di TAYLOR, convergente in un conveniente intorno di una matrice a. Bisognerà supporre che, al variare di x in detto intorno e di z sul contorno Γ di cui al numero precedente, la matrice

$$\frac{x-a}{z-a}=(x-a)\cdot(z-a)^{-1}$$

mantenga i moduli delle sue radici caratteristiche tutti inferiori all'unità. Dopo di che, in detto intorno di a, varrà la serie

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{(z-a)-(x-a)}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(x-a)^r}{(z-a)^{r+1}}$$

e si potrà porre

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots$$

ove

$$a_h=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{h+1}}\,dz \qquad (h=0,1,2,\dots).$$

Quindi

$$f^{(h)}(a)=\frac{h!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{h+1}}\,dz=h!\,a_h,$$

e si conclude con la derivabilità illimitata di $f(x)$ in quell'intorno e con l'olomorfismo delle derivate.

29. - Anche il teorema di MORERA si ottiene in modo ovvio. La funzione $f(x)$ sia continua sull'insieme $\mathfrak{J}$, soddisfacente alle condizioni precedenti. Supponiamo che l'integrale di $f(x)$ si annulli su ogni curva chiusa e rettificabile di JORDAN, appartenente ad $\mathfrak{J}$, riducibile ad un punto, per deformazione continua su $\mathfrak{J}$, senza attraversare il contorno.

Se $\mathfrak{J}$ è semplicemente connesso,

$$F(x)=\int_a^x f(z)\,dz$$

è funzione uniforme di x su $\mathfrak{J}$ ed ha ivi per derivata $f(x)$. Ma $F(x)$ è olomorfa (art. 24), dunque è tale la sua derivata $f(x)$.

Non ci dilunghiamo in altre applicazioni ovviamente possibili. Osserviamo solo che, se l'insieme $\mathfrak{J}$ non fosse semplicemente connesso, si potrebbe facilmente introdurre, al modo abituale, la nozione di periodicità dell'integrale.