Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Frédéric Riesz

Sur l’intégrale de Lebesgue comme l’opération inverse de la dérivation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 5, no 3-4 (1936), p. 191-212
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_3-4_191_0>

SUR L'INTÉGRALE DE LEBESGUE COMME L'OPÉRATION INVERSE DE LA DÉRIVATION

par FRÉDÉRIC RIESZ (Szeged).

Dans cette branche importante de l'Analyse moderne qu'a inaugurée M. LEBESGUE et dont l'objet est l'étude approfondie des problèmes concernant l'intégration et la dérivation, les recherches sur l'intégration précédaient celles sur la dérivation et cela dans l'ordre chronologique ainsi que dans l'ordre des paragraphes, les résultats les plus importants concernant la dérivée et les nombres dérivés se présentant comme des conséquences de la théorie de l'intégration. Ainsi par exemple, le théorème d'après lequel toute fonction monotone admet une dérivée presque partout, établi par M. LEBESGUE, sous l'hypothèse de la continuité, dans la première édition de son livre fondamental sur la théorie de l'intégration ([1]), n'y apparait qu'à la fin du dernier chapitre, comme dernière conséquence de la théorie entière, bien que ni l'idée de l'intégrale, ni celle de la mesure n'interviennent dans l'énoncé du théorème. En effet, l'idée d'ensemble de mesure nulle qui y figure, cachée dans le terme « presque partout », ne dépend pas essentiellement de la théorie générale de la mesure et les propriétés principales de ces ensembles s'établissent en quelques mots. Depuis on a réussi non seulement à faire valoir cette indépendance en démontrant le théorème de M. LEBESGUE par des méthodes de plus en plus élémentaires ([2]), mais en même temps on attaquait avec succès, par les mêmes méthodes, les problèmes voisins dont quelques-uns beaucoup plus intimidants, comme par exemple celui des rapports mutuels des quatre nombres dérivés d'une fonction entièrement arbitraire. C'est grâce à ces recherches que, en 1932, 30 années après le début de la théorie, au congrès de Zurich, j'ai pu présenter les plus importants des résultats concernant la dérivation comme de simples corollaires du théorème

---

([1]) H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

([2]) Pour la dernière de ces démonstrations ainsi que pour des indications bibliographiques cf. mes travaux: *A monoton függvények differenciálhatóságáról,* Matematikai és Fizikai Lapok, **38** (1931), pp. 125-131; *Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*, Acta scientiarum mathematicarum, Szeged, **5** (1932), pp. 208-221.

de M. LEBESGUE [3]. A la fin de ma conférence j'ai encore prétendu que, partant du même théorème, toute la théorie de l'intégration pourra être établie coup sur coup. C'est ce que je vais essayer d'accomplir dans le présent Mémoire. Bien entendu, l'idée de considérer l'intégrale comme l'opération inverse de la dérivation ne date pas d'aujourd'hui, elle s'est présentée déjà dans la théorie classique tandis que, dans l'Analyse moderne, on la retrouve dans les intégrales attachées aux noms de MM. DENJOY, PERRON et KHINTCHINE dont le but principal est précisément la recherche des fonctions primitives.

Dans le présent Mémoire, nous partirons d'une définition de l'intégrale formulée d'abord pour des fonctions non-négatives qui s'offre immédiatement. Une fonction sera dite intégrable s'il existe des fonctions non-décroissantes dont elle est la dérivée presque partout. L'intégrale définie de la fonction, dans un intervalle donné, sera égale, par définition, à la borne inférieure des accroissements de toutes ces fonctions non-décroissantes, formées pour l'intervalle considéré, c'est-à-dire à la borne inférieure des différences des valeurs prises aux deux extrémités de l'intervalle. Pour passer aux fonctions de signe variable, on n'aura qu'à considérer les différences formées de deux fonctions intégrables non-négatives; cependant il n'est pas sans intérêt d'énoncer une définition directe dont la légitimité ressort immédiatement de nos considérations. D'après cette définition, la fonction est intégrable lorsqu'il existe des fonctions à variation bornée dont elle est la dérivée presque partout. Parmi ces fonctions, il en existe une, déterminée à une constante additive près, dont la variation totale, dans l'intervalle considéré, est la plus petite possible; de plus, la fonction jouit de la même propriété dans tous les sousintervalles. C'est cette fonction extrémale qui donne l'intégrale indéfinie de la fonction envisagée, l'intégrale définie s'en calculant de la manière usuelle. Cette fonction aurait aussi pu être caractérisée par sa propriété d'être absolument continue, mais c'est de la propriété extrémale que nous préférons de partir dans les considérations qui suivent.

Il ne s'agira, dans le présent Mémoire, que des fonctions d'une seule variable et il pourrait paraître, à première vue, comme si notre méthode était façonnée entièrement sur ce cas particulier. Dans cet ordre d'idées, il convient d'observer que l'on aurait pu baser les considérations, au lieu de la dérivée au sens ordinaire, sur l'idée moins exigeante de dérivée par rapport à un réseau, comme s'en sert M. DE LA VALLÉE POUSSIN pour l'étude de la dérivation des fonctions d'ensemble [4]. Non seulement que la démonstration de l'existence presque partout

(3) F. RIESZ: *Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle*, Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongreßes, Zürich, 1932, **1**, pp. 258-269.

(4) C. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, Paris, Gauthier-Villars, 1916.

de cette sorte de dérivée d'une fonction monotone est presque immédiate, mais en outre on ne rencontre aucune nouvelle difficulté quand on veut passer au cas de plusieurs variables et les considérations concernant l'intégrale s'étendent à ce cas général avec des modifications évidentes. D'ailleurs, la méthode des réseaux permet aussi d'établir une correspondance «presque biunivoque» entre les points d'une droite et ceux de l'espace à n dimensions en se faisant correspondre, deux à deux, les éléments des deux réseaux, intervalles et cellules, et cela en tenant compte de ce que les mesures respectives des éléments associés aient la même valeur numérique. On sait bien comment on peut profiter d'une telle correspondance pour passer immédiatement de l'intégrale des fonctions d'une seule variable au cas de plusieurs variables, la plupart des résultats de la première théorie se transportant d'une manière évidente ([5]). De parmi les exceptions citons ceux des théorèmes concernant l'inversion de l'intégration, dans lesquels la dérivation se fait d'une autre façon que d'ordinaire, comme par exemple quand on envisage l'intégrale en fonction d'ensemble. Sans entrer dans les détails, qu'il nous suffise ici d'affirmer que ces difficultés peuvent être surmontées sans peine et cela par exemple en combinant la méthode indiquée avec celle des réseaux conjugués, inventée par M. DE LA VALLÉE POUSSIN ([6]) et avec une idée de M. LEBESGUE dont il s'est servi premièrement pour discuter le problème de la convergence des moyennes arithmétiques des séries de FOURIER ([7]).

Dans ce qui suit, nous supprimerons en général le terme «presque partout», en ne le conservant que dans les définitions et les théorèmes et encore quelquefois quand il s'agira de l'accentuer. Convenons une fois pour toutes de considérer nos fonctions à intégrer comme fixées presque partout dans leur intervalle de définition et d'envisager les équations et les inégalités concernant de telles fonctions comme valables presque partout. De même, une suite de fonctions sera dite convergente quand elle converge presque partout. Bien entendu, ces conventions ne sont faites que pour les fonctions à intégrer et elles ne sont valables ni pour les intégrales ni, plus généralement, pour les fonctions primitives.

Convenons encore de dire fonction positive au lieu de non-négative et fonction croissante au lieu de non-décroissante.

([5]) Cf. pour une exposition détaillée (rédigée pour le cas d'une infinité de variables) et pour des indications bibliographiques B. JESSEN: *The Theory of Integration in a Space of an Infinite Number of Dimensions*, Acta mathematica, **63** (1934), pp. 249-323, en particulier p. 251.

([6]) Voir la note ([4]).

([7]) H. LEBESGUE: *Recherches sur la convergence des séries de Fourier*, Mathematische Annalen, **61** (1905), pp. 251-280; cf. aussi la seconde édition de l'ouvrage cité ([1]), Paris, Gauthier-Villars, 1928, pp. 192-195.

Définition de l'intégrale.

Voici notre définition de l'intégrale, d'abord seulement pour des fonctions positives.

La fonction $f(x)$, définie pour $a \leqq x \leqq b$, sera dite intégrable lorsqu'il existe une fonction croissante $F(x)$ définie dans le même intervalle, dont $f(x)$ est la dérivée presque partout. Envisageons l'ensemble de toutes les fonctions $F(x)$ du type considéré et formons la borne inférieure de leurs variations $F(b) - F(a)$; c'est cette borne inférieure que nous convenons d'appeler l'intégrale ou l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle (a, b), en la désignant, comme d'ordinaire, par le symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Au lieu d'énumérer les conséquences les plus immédiates de notre définition, nous préférons de commencer par établir un théorème qui nous servira de lemme principal dans les considérations qui suivent.

THÉORÈME 1. - *Étant donnée, pour $a \leqq x \leqq b$, une fonction arbitraire $g(x)$, soit $\{G\}$ l'ensemble, s'il en existe, des fonctions $G(x)$ définies dans le même intervalle, croissantes et telles que*

$$G'(x) \geqq g(x)$$

presque partout. Alors l'ensemble $\{G\}$ admet un élément $G^*(x)$, déterminé à une constante additive près, de sorte que

$$G^*(d) - G^*(c) \leqq G(d) - G(c)$$

pour $a \leqq c < d \leqq b$ et pour tous les éléments $G(x)$ de l'ensemble $\{G\}$, ou autrement dit, de sorte que toutes les différences $G(x) - G^*(x)$ soient des fonctions croissantes.

Pour démontrer le théorème, observons d'abord qu'il nous est permis évidemment de nous borner, une fois pour toutes, à des fonctions $G(x)$ avec $G(a) = 0$. Cela étant, posons, pour chaque x dans l'intervalle (a, b), $G^*(x)$ égale à la borne inférieure des valeurs $G(x)$ des fonctions envisagées. Je dis que la fonction $G^*(x)$ ainsi définie jouit des propriétés exigées, c'est-à-dire que

$$G^{*\prime}(x) \geqq g(x) \tag{1}$$

presque partout et que les fonctions $G(x) - G^*(x)$ sont croissantes.

Prouvons d'abord la seconde assertion. Soit $G(x)$ un élément arbitraire de l'ensemble $\{G\}$ et soit $G_1(x)$ un élément du même ensemble, choisi de sorte que

$$G_1(c) < G^*(c) + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité positive arbitrairement petite. Envisageons la fonction $G_2(x)$ égale à $G_1(x)$ pour $a \leqq x \leqq c$ et à

$$G(x) + G_1(c) - G(c)$$

pour $c \leqq x \leqq b$. La fonction G_2 ainsi définie appartenant évidemment à l'ensemble $\{G\}$, on a

$$G^*(d) \leqq G_2(d) = G(d) + G_1(c) - G(c) < G(d) + G^*(c) + \varepsilon - G(c),$$

c'est-à-dire que

$$G(c) - G^*(c) < G(d) - G^*(d) + \varepsilon$$

et comme ε est arbitraire, il s'ensuit que

$$G(c) - G^*(c) \leqq G(d) - G^*(d).$$

Donc $G(x) - G^*(x)$ est une fonction croissante.

Pour démontrer l'assertion (1), envisageons une suite de fonctions $G_n(x)$, choisies de l'ensemble $\{G\}$ de sorte que la série

$$\sum_1^\infty (G_n(b) - G^*(b))$$

soit convergente et que, par conséquent, il en soit de même pour la série

$$\sum_1^\infty (G_n(x) - G^*(x)). \tag{2}$$

Les termes et alors la somme $S(x)$ de la série (2) étant des fonctions croissantes, $S(x)$ admet presque partout une dérivée $S'(x)$. De plus, en désignant par $S_n(x)$ les sommes partielles de la série (2), les fonctions

$$S(x) - S_n(x) = \sum_{n+1}^\infty (G_i(x) - G^*(x))$$

sont aussi des fonctions croissantes; donc

$$S_n'(x) \leqq S'(x),$$

c'est-à-dire que les sommes partielles de la série

$$\sum_1^\infty (G_n'(x) - G^{*\prime}(x)), \tag{3}$$

à termes positifs, ne dépassent pas la borne $S'(x)$ et de cette sorte la série (3) converge presque partout. A plus forte raison, les termes de la série (3) tendent vers 0, c'est-à-dire que

$$G_n'(x) \to G^{*\prime}(x) \tag{4}$$

presque partout. Comme $G_n'(x) \geqq g(x)$, la relation (4) donne que $G^{*\prime}(x) \geqq g(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour passer du théorème 1 que nous venons de démontrer et dans lequel la fonction $g(x)$ n'était pas supposée d'être intégrable, au cas de $g(x)$ intégrable, nous n'avons qu'à observer que dans ce cas particulier il y en a, d'après hypothèse, une fonction $G_0(x)$, appartenant évidemment à l'ensemble $\{G\}$, de sorte que l'on ait presque partout précisément

$$G_0'(x) = g(x).$$

Je dis qu'il en est de même pour la fonction $G^*(x)$. En effet, $G_0 - G^*$ étant une fonction croissante, on a

$$g(x) = G_0'(x) \geqq G^{*\prime}(x)$$

et en comparant cette inégalité avec l'inégalité (1), il vient que

$$G^{*\prime}(x) = g(x)$$

presque partout. En retournant à nos notations antérieures, cela nous assure que la fonction $f(x)$ étant supposée d'être intégrable dans l'intervalle (a, b), son intégrale est non seulement la borne inférieure des valeurs $F(b) - F(a)$ en question, mais que cette borne est atteinte c'est-à-dire que, parmi les fonctions croissantes $F(x)$ avec $F'(x) = f(x)$, il en existe une, soit $F^*(x)$, pour laquelle on a précisément

$$\int_a^b f(x)dx = F^*(b) - F^*(a)$$

et que de plus on a, d'une façon générale,

$$\int_c^d f(x)dx = F^*(d) - F^*(c) \qquad (a \leqq c < d \leqq b).$$

En effet, soit $F_1(x)$ une fonction croissante, considérée seulement dans l'intervalle (c, d) et de sorte que l'on ait $F_1' = f$ presque partout dans cet intervalle; telle est par exemple la fonction $F^*(x)$ elle-même. Donc, tout d'abord, la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (c, d). Formons, pour l'intervalle (a, b), la fonction $F_2(x)$ égale, dans l'intervalle (c, d), à la fonction $F_1(x)$ et dans les intervalles (a, c) et (d, b), à des constantes additives près, égale à la fonction $F^*(x)$. Alors on aura $F_2' = f$ presque partout dans l'intervalle (a, b) ; il s'ensuit, d'après la définition de F^*, que la fonction $F_2 - F^*$ est croissante, donc en particulier que

$$F_1(d) - F_1(c) \geqq F^*(d) - F^*(c),$$

ce qui dit que $F^*(d)-F^*(c)$ n'est que la borne inférieure des quantités $F(d)-F(c)$ correspondant à l'intervalle (c, d), c'est-à-dire que

$$\int_c^d f(x)dx = F^*(d) - F^*(c).$$

Donc nous avons démontré le

THÉORÈME 2. - *La fonction $f(x)$ étant positive et intégrable dans l'intervalle (a, b), elle donne lieu à une intégrale indéfinie (ou brièvement intégrale) $F^*(x)$, fonction croissante, déterminée à une constante additive près, et telle que l'intégrale définie de $f(x)$ sur les intervalles (c, d), où $a \leqq c < d \leqq b$, est fournie par l'expression $F^*(d)-F^*(c)$. De plus la fonction $F^*(x)$ admet presque partout une dérivée égale à $f(x)$ et parmi toutes les fonction croissantes $F(x)$ admettant presque partout une dérivée $\geqq f(x)$ et pour tous les intervalles (c, d), c'est elle qui rend minimum l'accroissement $F(d)-F(c)$.*

Une conséquence immédiate de cette propriété extrémale de l'intégrale $F^*(x)$, c'est que cette dernière est continue. D'ailleurs on voit facilement que nous aurions pu supposer continues dès le commencement toutes les fonctions croissantes que nous venons de considérer.

Une condition suffisante bien maniable de ce qu'une fonction croissante donnée soit l'intégrale de sa dérivée, est la suivante.

THÉORÈME 3. - *Lorsque les fonctions $F(x)$, $G(x)$ et $F(x)-G(x)$, définies pour $a \leqq x \leqq b$, sont croissantes et que $F(x)$ est une intégrale, il en est de même pour la fonction $G(x)$.*

En effet, en désignant par $G^*(x)$ l'intégrale indéfinie de la fonction $G'(x)$, la fonction $H=(F-G)+G^*$ est croissante et admet presque partout une dérivée égale à $F'(x)$; par conséquent, F étant l'intégrale de F', la fonction $G^*-G=H-F$ est croissante. Comme il en est de même, par définition, pour la fonction $G-G^*$, on a $G=G^*+\text{constante}$; donc G est une intégrale indéfinie.

Quelques théorèmes sur l'intégration.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants, énoncés, jusqu'à nouvel ordre, pour des fonctions positives définies dans l'intervalle (a, b).

THÉORÈME 4. - *Lorsque les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables, il en est de même de $f(x)+g(x)$ et de $cf(x)$, où $c \geqq 0$, et l'on a*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

L'assertion concernant cf ainsi que l'intégrabilité de $f+g$ sont des conséquences évidentes de la définition de l'intégrale. La première équation se vérifie en comparant les intégrales indéfinies F, G et H des fonctions f, g et $h=f+g$. Tout d'abord, $(F+G)-H$ est une fonction croissante, puisque la fonction $F+G$ admet une dérivée égale à $f+g=h$ et que de plus, H est d'accroissement minimum parmi les fonctions croissantes admettant h comme dérivée. D'autre part, la dérivée h de la fonction croissante H étant $\geqq g$ et comme G est d'accroissement minimum parmi toutes les fonctions croissantes jouissant de la même propriété, la fonction $H-G$ est croissante. Donc en remplaçant, dans le théorème 3, F et G respectivement par H et $H-G$, il vient que cette dernière est une intégrale indéfinie; comme de plus elle admet la même dérivée que l'intégrale indéfinie F, savoir $h-g=f$, on a $H(x)-G(x)=F(x)+$constante, ce qui fournit immédiatement la formule à démontrer.

THÉORÈME 5. - *Lorsque les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables et que $g(x)\leqq f(x)$, alors la fonction $f(x)-g(x)$ est aussi intégrable.*

En désignant par $F(x)$ et $G(x)$ les intégrales indéfinies des fonctions f et g et en observant que $F'=f\geqq g=G'$, il vient du théorème 2 que la fonction $F-G$ est croissante; il s'ensuit que sa dérivée $f-g$ est intégrable.

THÉORÈME 6. - *Lorsque les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$,...., en nombre fini ou d'une infinité dénombrable, sont intégrables, il en est de même de la fonction*

$$f(x)=\inf f_n(x),$$

c'est-à-dire de la fonction $f(x)$ égale, presque partout, à la plus petite des quantités $f_n(x)$ ou plus généralement à leur borne inférieure.

En effet, soit $\{F\}$ l'ensemble des fonctions croissantes $F(x)$ telles que l'on ait presque partout $F'\geqq f$ et soit F^* l'élément extrémale de l'ensemble $\{F\}$. Comme l'intégrale F_n de f_n appartient évidemment à l'ensemble $\{F\}$, alors les F_n-F^* sont des fonctions croissantes. Par conséquent, $F_n'\geqq F^{*\prime}$. D'autre part, F^* appartenant aussi à l'ensemble $\{F\}$, on a $F^{*\prime}\geqq f$. En résumé, on a presque partout

$$f_n=F_n'\geqq F^{*\prime}\geqq f=\inf f_n\,;$$

il s'ensuit que

$$F^{*\prime}(x)=f(x),$$

c'est-à-dire que f est intégrable.

A titre d'exemple, considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, positives et intégrables dans l'intervalle (a, b); soit de plus $0<\alpha<1$ et $\beta=1-\alpha$ et formons les fonctions

$$h(x\,;\,\lambda)=\alpha\lambda^{\beta}f(x)+\beta\lambda^{-\alpha}g(x),$$

λ désignant un paramètre variant de 0 à ∞. Alors la borne inférieure de ces fonctions est donnée, pour chaque x, par

$$h(x)=f^{\alpha}(x)g^{\beta}(x),$$

et cela ne change pas quand on restreint λ à ne parcourir qu'un ensemble dénombrable de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, partout dense entre 0 et ∞. Par conséquent, les fonctions $h(x; \lambda)$ étant intégrables d'après le théorème 4, il en sera de même, d'après le théorème 6, pour la fonction $h(x)$. De plus, $h(x)$ restant au delà des fonctions $h(x; \lambda)$, tel sera aussi le cas pour les intégrales respectives; en formule

$$\int_a^b f^\alpha(x) g^\beta(x)\, dx \leqq \alpha\lambda^\beta \int_a^b f(x)\, dx + \beta\lambda^{-\alpha} \int_a^b g(x)\, dx$$

et cela quel que soit λ entre 0 et ∞. On en conclut que la valeur de l'intégrale au premier membre ne peut dépasser la borne inférieure de l'expression qui figure au second membre, formée par rapport à λ variable entre 0 et ∞, c'est-à-dire que

$$\int_a^b f^\alpha(x) g^\beta(x)\, dx \leqq \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^\alpha \left(\int_a^b g(x)\, dx\right)^\beta,$$

généralisation bien connue de l'inégalité de SCHWARZ.

L'intégration des fonctions de signe variable.

Pour définir l'intégrale des fonctions de signe quelconque, supposons que la fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle (a, b), puisse être mise sous la forme $f = g - h$, g et h étant des fonctions positives et intégrables. Lorsqu'il en est ainsi, nous convenons de dire que f est intégrable et d'y attacher comme intégrale, définie ou indéfinie, la différence des intégrales respectives des fonctions g et h. Pour légitimer cette convention, il faut montrer que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la manière dont nous décomposons la fonction f, c'est-à-dire que chaque fois que $f = g - h = g_1 - h_1$ où g_1 et h_1 sont deux autres fonctions positives et intégrables, on a

$$\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b g_1(x)\, dx - \int_a^b h_1(x)\, dx.$$

Or cela vient immédiatement en appliquant le théorème 4 aux expressions

$$g + h_1 = g_1 + h.$$

Lorsque $f(x)$ est positive, on n'aura qu'à écrire $f = f - 0$ et d'observer que l'intégrale de la fonction $g(x) = 0$ s'annule, pour en conclure que la définition actuelle de l'intégrale est compatible avec celle donnée pour des fonctions positives.

La manière de décomposition la plus immédiate d'une fonction de signe variable est celle en ses parties positive et négative, savoir en

$$f^+(x) = \sup\,(f(x), 0), \qquad f^-(x) = \sup\,(-f(x), 0).$$

Montrons que lorsque f est intégrable, il en est de même de f^+ et f^-. En effet, en posant $f=g-h$ où g et h sont des fonctions positives et intégrables, on a

$$f^+(x)=g(x)-\inf\,(g(x),\, h(x))$$

et en observant que la fonction inf (g, h) est intégrable conformément au théorème 6 et que g l'est d'après hypothèse, le théorème 5 confirme l'intégrabilité de f^+. La fonction f^- n'étant que la partie positive de $-f=h-g$, est intégrable par les mêmes raisons.

La fonction $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$ est intégrable par le théorème 4.

Inversement, lorsque f^+ et f^- sont intégrables, il en est de même pour $f=f^+-f^-$, conformément à la définition que nous venons de poser. Mais l'intégrabilité de la fonction $|f|$ à elle seule n'entraîne pas nécessairement celle de f.

En résumé, on a le

THÉORÈME 7. - *Pour que la fonction $f(x)$ soit intégrable, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour ses parties positive et négative. L'intégrale de $f(x)$ est la différence des intégrales respectives de ces deux parties. Lorsque $f(x)$ est intégrable, son module $|f(x)|$ le sera aussi.*

L'extension des théorèmes 4 et 5 au cas où f, g et c sont de signe quelconque est évidente. Quant au théorème 6, il y correspond le théorème suivant, de forme plus générale.

THÉORÈME 8. - *Lorsque les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$,...., en nombre fini ou formant une suite dénombrable, sont intégrables et que l'on a, pour tous les n,*

$$f_n(x) \geqq g(x) \tag{5}$$

où $g(x)$ est une fonction intégrable, la fonction

$$\inf f_n(x)$$

est aussi intégrable. Il en sera de même pour

$$\sup f_n(x) = -\inf\,(-f_n(x))$$

en supposant que

$$f_n(x) \leqq h(x), \tag{6}$$

avec $h(x)$ intégrable.

Lorsqu'il ne s'agit que d'un nombre fini de fonctions $f_n(x)$, les hypothèses (5) *et* (6) *peuvent être supprimées.*

Pour démontrer le théorème, nous n'avons qu'à appliquer le théorème 6 respectivement aux fonctions f_n-g et $h-f_n$ et de passer aux fonctions f_n. En cas d'un nombre fini de fonctions f_n les hypothèses (5) et (6) sont réalisées d'elles-mêmes; on n'aura qu'à poser $h=\sum |f_n|$, $g=-h$.

Intégration des suites et des séries.

THÉORÈME 9. - *Lorsque les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$,...., intégrables pour $a \leqq x \leqq b$, forment une suite croissante et que la suite formée de leurs intégrales définies est bornée, alors la suite $f_n(x)$ converge presque partout vers une fonction intégrable $f(x)$ et elle peut être intégrée terme à terme, c'est-à-dire que*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour le voir, désignons par $F_n(x)$ l'intégrale de f_n et cela en supposant que $F_n(a)=0$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $f_n(x) \geqq 0$; en cas contraire nous n'aurions qu'à considérer la suite $f_n - f_1$. Cela posé, les F_n sont des fonctions croissantes et formant une suite croissante et bornée, elles tendent vers une fonction croissante $F(x)$, avec $F(a)=0$. Comme de plus la fonction $F_p - F_n$, intégrale de $f_p - f_n$, est croissante pour $p > n$, sa limite $F - F_n$ pour $p \to \infty$ est aussi croissante; il s'ensuit que

$$F'(x) \geqq F_n'(x) = f_n(x),$$

ce qui assure la convergence, presque partout, de la suite $f_n(x)$ vers une fonction

$$f(x) = \sup f_n(x) \leqq F'(x).$$

De plus, F' étant intégrable, f l'est aussi, grâce au théorème 8. Enfin, comme

$$F(b) \geqq \int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b f_n(x)dx = F_n(b) \to F(b),$$

il vient que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

ce qu'il fallait prouver.

Le théorème est dû à M. B. LEVI, bien entendu pour des intégrales formées d'après M. LEBESGUE.

Voici un corollaire du théorème 9, concernant l'intégration terme à terme des séries formées de fonctions intégrables; on y parvient en appliquant le théorème 9 aux sommes partielles des deux séries, formées respectivement des parties positives et négatives des termes de la série envisagée.

THÉORÈME 10. - *Lorsque les fonctions $f_n(x)$, intégrables pour $a \leqq x \leqq b$, sont telles que la série numérique*

$$\sum_1^\infty \int_a^b |f_n(x)|\,dx$$

est convergente, alors la série

$$\sum_1^{\infty} f_n(x)$$

converge elle-même presque partout; de plus, la somme de la série est une fonction intégrable et il est permis d'intégrer terme à terme.

Passons au

THÉORÈME 11. - *Lorsque les fonctions $f_n(x)$, supposées intégrables pour $a \leqq x \leqq b$, tendent presque partout vers la fonction $f(x)$ et que de plus, il existe une fonction intégrable $g(x)$ de sorte que $|f_n(x)| \leqq g(x)$ pour tous les n, alors la fonction $f(x)$ est intégrable et*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour le démontrer, envisageons les fonctions

$$g_n(x) = \sup\,(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots.)\,;$$

celles-ci sont intégrables, d'après le théorème 8; elles forment une suite décroissante tendant vers $f(x)$, et comme $|g_n| \leqq g$, les intégrales des fonctions $-g_n$ restent au dessous d'une borne finie. En appliquant le théorème 9 à la suite croissante des $-g_n$, il vient que f est intégrable et que

$$\int_a^b g_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Le même raisonnement, appliqué aux fonctions $-f_n$ au lieu des f_n, donne que

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

où l'on a posé

$$h_n(x) = \inf\,(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots.).$$

Comme $h_n \leqq f_n \leqq g_n$, on a aussi

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \leqq \int_a^b f_n(x)\,dx \leqq \int_a^b g_n(x)\,dx,$$

et la démonstration s'achève en comparant cette inégalité avec les formules (7) et (8).

Le théorème que nous venons de démontrer est dû en substance à M. LEBESGUE et il implique en particulier le théorème affirmant l'intégrabilité terme à terme des suites convergentes bornées, théorème généralisant de sa part les théorèmes bien connus que l'on désigne par les noms ARZELÀ et OSGOOD.

Voici un autre corollaire du théorème 11, mais qui n'affirme que l'intégrabilité de la fonction limite et ne dit rien sur l'intégration terme à terme.

THÉORÈME 12. - *Lorsque les fonctions $f_n(x)$, intégrables pour $a \leqq x \leqq b$, convergent presque partout vers une fonction $f(x)$ telle que*

$$|f(x)| \leqq g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction intégrable, alors la fonction $f(x)$ est aussi intégrable.

Pour le voir, on n'aura qu'à appliquer le théorème 11 à la suite

$$\inf [g(x), \sup (f_n(x), -g(x))] \to f(x).$$

Voici maintenant une application importante du théorème 12, affirmant l'intégrabilité des fonctions composées.

THÉORÈME 13. - *Soit $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une fonction continue dans l'espace $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ et soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ des fonctions intégrables pour $a \leqq x \leqq b$. Supposons de plus qu'il existe une fonction $g(x)$, intégrable pour $a \leqq x \leqq b$, de sorte que l'on ait*

$$|\varphi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))| \leqq g(x).$$

Sous ces hypothèses, la fonction

$$h(x) = \varphi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$$

est intégrable pour $a \leqq x \leqq b$.

Pour démontrer le théorème, décomposons l'intervalle (a, b) en 2^n parties égales et désignons par $f_{in}(x)$ la fonction du type escalier dont la valeur, constante dans chacun de ces intervalles partiels, y est égale à la moyenne arithmétique de la fonction f_i, formée pour le même intervalle ou ce qui revient au même, égale au rapport d'accroissement de l'intégrale $F_i(x)$, formé pour l'intervalle en question. Alors on a presque partout

$$f_{in}(x) \to f_i(x),$$

ce qui, grâce à la continuité de la fonction φ, implique que

$$\varphi(f_{1n}(x), f_{2n}(x), \ldots, f_{kn}(x)) \to h(x). \tag{9}$$

Or ces fonctions composées, étant du type escalier, sont intégrables ; comme de plus, d'après hypothèse,

$$|h(x)| \leqq g(x)$$

avec $g(x)$ intégrable, le théorème 12 s'applique à la suite (9) et il s'ensuit que la fonction h est intégrable, ce qu'il fallait démontrer.

Démontrons encore le théorème suivant de FATOU, important par ses applications et affirmant, de même que le théorème 12, l'intégrabilité de la limite d'une suite convergente de fonctions intégrables, mais sans affirmer l'intégrabilité terme à terme de la suite.

THÉORÈME 14. - *Lorsque les fonctions $f_n(x)$, intégrables pour $a \leqq x \leqq b$, tendent presque partout vers une fonction $f(x)$ et que de plus la suite des valeurs*

$$\int_b^a |f_n(x)|\, dx$$

est supposée bornée, alors la fonction $f(x)$ est intégrable et

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \leqq \liminf \int_a^b |f_n(x)|\, dx.$$

Sans resteindre la généralité, nous pouvons supposer positives les fonctions f et f_n. En effet, pour montrer l'intégrabilité de la fonction f, on n'aura qu'à prouver celle de $|f|$ et puis appliquer le théorème 12, en y remplaçant $g(x)$ par $|f(x)|$. Cela étant, envisageons les fonctions

$$g_n(x) = \inf\, (f_n(x),\, f_{n+1}(x), \ldots),$$

formant une suite croissante qui converge vers f. Comme $g_n \leqq f_{n+k}$, on a aussi

$$\int_a^b g_n(x)\, dx \leqq \int_a^b f_{n+k}(x)\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

et pour $k \to \infty$, il vient que

$$\int_a^b g_n(x)\, dx \leqq \liminf \int_a^b f_{n+k}(x)\, dx = \liminf \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Enfin, en posant $n \to \infty$ et en faisant appel au théorème 9, il s'ensuit l'intégrabilité de f et l'inégalité

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \int_a^b g_n(x)\, dx \leqq \liminf \int_a^b f_k(x)\, dx,$$

ce qu'il fallait prouver.

Intégration par parties.

THÉORÈME 15. - *Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ étant supposées intégrables pour $a \leqq x \leqq b$ et $F(x)$ et $G(x)$ désignant leurs intégrales indéfinies, alors les fonctions $F(x)g(x)$ et $G(x)f(x)$ sont intégrables et l'on a*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b G(x)f(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a). \tag{10}$$

Pour le démontrer, observons d'abord que l'on ne restreindra pas la généralité en supposant positives les fonctions f et g; en effet, la cas général se ramène d'une façon évidente à ce cas particulier et cela en décomposant f et g en leurs parties positives et négatives. On pourra encore supposer que $F(a) = G(a) = 0$; en réalité, remplacer par exemple $F(x)$ par $F(x) + C$ n'a pour effet que d'ajouter aux deux membres la même quantité $C(G(b) - G(a))$.

Cela étant, envisageons la fonction $F(x)G(x)$. Les fonctions F et G étant positives et croissantes, il en est de même de leur produit FG. Comparons FG à la fonction

$$H(x) = G(b)F(x) + F(b)G(x),$$

croissante et intégrale de la fonction positive

$$h(x) = G(b)f(x) + F(b)g(x).$$

Leur différence

$$D(x) = H(x) - F(x)G(x)$$

est aussi une fonction croissante, ce qui vient de la formule

$$D(x) = F(b)G(b) - [F(b) - F(x)][G(b) - G(x)].$$

Donc, H étant une intégrale, la fonction FG le sera aussi, grâce au théorème 3; c'est-à-dire qu'elle est l'intégrale indéfinie de sa dérivée

$$F(x)g(x) + G(x)f(x)$$

et il s'ensuit immédiatement l'équation qui figure au théorème, bien entendu en supposant intégrables les produits Fg et Gf. C'est ce qu'il faut encore prouver.

Les fonctions F et G étant croissantes, on peut former, d'une manière évidente, des suites de fonctions du type escalier, convergeant presque partout respectivement vers F et G. Les fonctions F et G étant bornées, le théorème 12 s'applique et donne l'intégrabilité de F et G. Alors les produits Fg et Gf, ne dépassant pas respectivement les fonctions intégrables $F(b)g(x)$ et $G(b)f(x)$, seront intégrables eux-mêmes par le théorème 13, ce qu'il fallait démontrer.

Intégration par substitution.

Soit $x(t)$ une fonction continue et croissante pour $\alpha \leqq t \leqq \beta$, intégrale indéfinie de sa dérivée $x'(t)$. Posons $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, soit $f(x)$ une fonction intégrable pour $a \leqq x \leqq b$ et soit $F(x)$ son intégrale indéfinie. Pour éviter des complications inutiles, nous supposons que $f(x)$ soit fixée univoquement pour tous les $a \leqq x \leqq b$. Provisoirement nous admettons encore que la fonction $f(x)$ soit positive et bornée:

$$0 \leqq f(x) \leqq A.$$

Envisageons la fonction

$$\Phi(t)=F(x(t)).$$

La fonction Φ est croissante; comme de plus, $F(\xi)-F(x) \leqq A(\xi-x)$ pour $x<\xi$, la fonction $Ax(t)-\Phi(t)$ sera aussi croissante et comme $Ax(t)$ est une intégrale, il en sera de même de $\Phi(t)$, grâce au théorème 3. Donc Φ est l'intégrale de sa dérivée, donnée par la formule

$$\Phi'(t)=F'(x(t))x'(t)=f(x(t))x'(t), \tag{10}$$

valable presque partout par rapport à t. En effet, quant aux points d'exception, nous pouvons d'abord mettre à part les deux ensembles, de mesure nulle, pour lesquels les fonctions $x(t)$ et $\Phi(t)$ n'admettent pas des dérivées finies et déterminées. Mais à part ces ensembles-ci, la formule (10) pourra encore être en défaut ou dépourvue de sens pour des valeurs de t telles que $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas égale à $f(x)$ au point correspondant $x=x(t)$. Or si $x'(t)=0$ pour une telle valeur de t, alors l'inégalité $|F(x+h)-F(x)| \leqq A|h|$ entraine que $\Phi'(t)=0$. Par conséquent, l'ensemble E des valeurs t qu'il nous reste encore à discuter, est tel que $x'(t)$ y existe, est finie, ne s'annule pas et que de plus, l'image $x(E)$ de E, c'est-à-dire, l'ensemble des valeurs $x=x(t)$, pour t en E, est de mesure nulle. Je dis que l'ensemble E est aussi de mesure nulle et que, de cette sorte, la formule (10) est valable presque partout par rapport à t. Soit en effet E_{nm} l'ensemble des valeurs t appartenant à E et telles que pour toutes les t_1, t_2 pour lesquelles $\alpha \leqq t_1 \leqq t \leqq t_2 \leqq \beta$ et $x(t_2)-x(t_1) \leqq 1/m$, on a aussi $x(t_2)-x(t_1) \geqq (t_2-t_1)/n$. L'image $x(E_{nm})$ de l'ensemble E_{nm} étant de mesure nulle, cette image pourra être enfermée, pour $\varepsilon>0$ d'ailleurs quelconque, en des intervalles (a_k, b_k) compris entre a et b, dont chacun inférieur à $1/m$ et dont la somme est inférieure à ε/n. On peut supposer évidemment que chaque intervalle (a_k, b_k) comprenne au moins un des points de l'ensemble $x(E_{nm})$. Cela posé, soient (α_k, β_k) des intervalles partiels de l'intervalle (α, β) ayant pour images respectives les intervalles (a_k, b_k); alors, l'ensemble de ces intervalles (α_k, β_k) renferme l'ensemble E_{nm} et comme, d'après hypothèse, $\beta_k-\alpha_k \leqq n(b_k-a_k)$, la somme des intervalles (α_k, β_k) est inférieure à ε. Il s'ensuit que l'ensemble E_{nm} est de mesure nulle et cela pour tous les m et n; par conséquent l'ensemble $E=\Sigma E_{nm}$ sera aussi de mesure nulle.

En résumé, l'équation (10) est valable presque partout et comme la fonction Φ est l'intégrale de sa dérivée, il s'ensuit que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{11}$$

Débarrassons nous encore de la restriction faite au commencement où la fonction f a été supposée d'être positive et bornée. Soit d'abord $f(x)$ une fonction intégrable positive non nécéssairement bornée; alors l'équation (11) est valable lorsqu'on y remplace f par les fonctions bornées $f_n(x) = \inf(f(x), n)$ et sa validité pour f elle-même s'ensuit grâce au théorème 9. Enfin, dans le cas général, on n'aura qu'à décomposer la fonction f en ses parties positive et négative. Ainsi nous avons le

THÉORÈME 16. - *La fonction $x(t)$, continue et croissante pour $\alpha \leqq t \leqq \beta$, étant supposée d'être l'intégrale indéfinie de sa dérivée $x'(t)$ et $f(x)$ désignant une fonction intégrable, définie partout pour $x(\alpha) = a \leqq x \leqq b = x(\beta)$, alors la fonction $f(x(t))x'(t)$ sera intégrable dans l'intervalle (α, β) et l'on aura*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t)dt.$$

L'intégrale de Lebesgue et l'équivalence des deux notions [8].

L'intégrale d'une fonction de signe variable étant égale, dans la théorie de M. LEBESGUE de même que dans celle que nous venons de développer, à la différence des intégrales des parties positive et négative de la fonction à intégrer, nous pourrons nous borner à considérer des fonctions positives.

La définition de l'intégrale donnée par M. LEBESGUE repose sur l'idée de la mesure. Étant donné un ensemble borné E de valeurs x, soit Σ un système dénombrable d'intervalles renfermant l'ensemble E et désignons par la même lettre Σ la somme des longueurs de ces intervalles. La borne inférieure des valeurs Σ qui correspondent à tous les systèmes d'intervalles du type considéré, donne ce qu'on appelle la mesure extérieure $m_e E$ de l'ensemble E. L'ensemble E est dit mesurable, lorsque la somme de sa mesure extérieure et de celle de son complément $CE = (a, b) - E$, par rapport à un intervalle (a, b) comprenant E, est égale à $b - a$. Dans ce cas, la quantité $m_e E$ est appelée aussi mesure de E et

---

(8) Il convient d'observer que cette équivalence des deux notions est sans importance pour les applications, la théorie que nous venons de développer étant applicable indépendemment au lieu de celle de M. LEBESGUE.

désignée par mE. On voit immédiatement que le choix particulier de l'intervalle (a, b) est sans importance.

Soit $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E, égale à 1 dans E et s'annulant ailleurs. Je dis que pour que l'ensemble E soit mesurable, il faut et il suffit que $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle (a, b) et que, dans ce cas,

$$mE = \int_a^b f(x)dx.$$

Pour le voir, faisons d'abord deux remarques préliminaires. La première de ces remarques concerne l'intégration de l'unité $f(x)=1$. Dérivée de la fonction x, cette fonction est intégrable, fait évident duquel nous avons déjà tiré parti à plusieurs reprises. Mais jusqu'ici nous n'avons pas encore eu besoin de la valeur exacte de cette intégrale, égale, comme on le prévoit, à la longueur de l'intervalle d'intégration. En effet, il est évident, par des raisons d'homogénéité, que l'intégrale indéfinie de $f(x)=1$ est de la forme $F(x)=Ax+B$ et comme il faut avoir presque partout $F'(x)=1$, il vient que $A=1$, ce qui confirme notre assertion. A vrai dire, ce raisonnement ne sera exact qu'après avoir observé qu'un ensemble de mesure nulle ne peut épuiser l'intervalle entier, fait que l'on déduit immédiatement du théorème de M. BOREL sur les systèmes d'intervalles et sans lequel, d'ailleurs, toute la théorie que nous venons de développer n'aurait été qu'un jeu des mots.

Voici notre seconde remarque. Lorsque la fonction $f(x)$, définie pour $a \leqq x \leqq b$, peut être intercalée, pour tous les ε positifs, entre deux fonctions intégrables $g(x)$ et $h(x)$ de sorte que

$$g(x) \leqq f(x) \leqq h(x); \qquad \int_a^b [h(x)-g(x)]\,dx \leqq \varepsilon,$$

alors la fonction $f(x)$ est aussi intégrable. Pour le voir, posons successivement $\varepsilon = 2^{-n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ et soient g_n et h_n les fonctions correspondantes. Alors, la série

$$\sum_1^\infty \int_a^b [h_n(x)-g_n(x)]\,dx \leqq \sum_1^\infty 2^{-n}$$

étant convergente, la série

$$\sum_1^\infty [h_n(x)-g_n(x)]$$

sera convergente presque partout par le théorème 10 et par conséquent, on aura $h_n - g_n \to 0$, c'est-à-dire que $g_n \to f$. Notre assertion en découle par le théorème 12, eu égard encore, par exemple, à l'inégalité $g_1 \leqq f \leqq h_1$.

Cela étant, soit E un ensemble compris dans l'intervalle (a, b) et après avoir fixé un $\varepsilon > 0$, enfermons E et son complément CE en des systèmes d'intervalles Σ_1 et Σ_2 de sorte que, avec les notations convenues, on ait

$$\Sigma_1 \leqq m_e E + \varepsilon/2, \qquad \Sigma_2 \leqq m_e CE + \varepsilon/2.$$

Nous pouvons supposer évidemment que les systèmes Σ_1 et Σ_2 soient compris dans l'intervalle (a, b). Alors les intervalles dont se composent ces deux systèmes, récouvrent l'intervalle (a, b) et il vient de notre première remarque que la somme des intégrales de leurs fonctions caractéristiques est égale à $\Sigma_1 + \Sigma_2$; tandis que la fonction caractéristique de l'intervalle (a, b) a pour intégrale la différence $b - a$. Donc le théorème 9 donne

$$b - a \leqq \Sigma_1 + \Sigma_2 \leqq m_e E + m_e CE + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que

$$b - a \leqq m_e E + m_e CE, \tag{12}$$

inégalité que l'on aurait pu aussi déduire du théorème de M. Borel.

Supposons maintenant que l'ensemble E soit mesurable et soit $f(x)$ sa fonction caractéristique; de plus soient $\sigma_1(x)$ et $\sigma_2(x)$ les sommes des fonctions caractéristiques des intervalles dont se forment respectivement les systèmes Σ_1 et Σ_2, l'existence presque partout de ces sommes étant assurée par le théorème 9. Alors en raisonnant comme tout à l'heure, il vient que les fonctions σ_1 et σ_2 sont intégrables et que leurs intégrales définies sont égales à Σ_1 et à Σ_2. Comme de plus

$$\sigma_1(x) \geqq f(x), \qquad \sigma_2(x) \geqq 1 - f(x)$$

et

$$\int_a^b [\sigma_1(x) - (1 - \sigma_2(x))]\, dx = \Sigma_1 + \Sigma_2 - (b - a) \leqq mE + mCE + \varepsilon - (b - a) = \varepsilon,$$

on n'aura qu'à poser $g(x) = 1 - \sigma_2(x)$ et $h(x) = \sigma_1(x)$ pour en conclure, par notre seconde remarque, l'intégrabilité de la fonction $f(x)$. De plus, l'intégrale de la fonction $f(x)$, formée pour l'intervalle (a, b), étant comprise entre celles de $g(x)$ et $h(x)$, c'est-à-dire entre

$$b - a - \Sigma_2 \geqq b - a - mCE - \varepsilon/2 = mE - \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \Sigma_1 \leqq mE + \varepsilon/2$$

et cela pour tout $\varepsilon > 0$, on aura précisément

$$\int_a^b f(x)\, dx = mE.$$

Inversement, supposons que $f(x)$, fonction caractéristique de l'ensemble E, soit intégrable; nous allons démontrer que, sous cette hypothèse, l'ensemble E est mesurable. Pour ce but, envisageons une suite de fonctions $f_n(x)$ du type escalier et convergeant vers $f(x)$. Nous pouvons aussi admettre que chacune des fonctions $f_n(x)$

soit la fonction caractéristique d'un ensemble Σ_n formé d'un nombre fini d'intervalles; en effet, dans le cas contraire, nous n'aurions qu'à remplacer les valeurs $f_n(x)$ par 1 partout où $f_n(x) > 1/2$ et par 0 ailleurs, la suite ainsi modifiée convergeant également vers $f(x)$. La fonction f sera aussi la limite de la suite décroissante formée des fonctions $g_n = \sup(f_n, f_{n+1}, \ldots)$, fonctions caractéristiques des ensembles $\Sigma^{(n)}$, obtenus en réunissant les ensembles Σ_n, $\Sigma_{n+1}, \ldots$ Or, ces ensembles $\Sigma^{(n)}$ se composent d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas, dont la longueur totale est égale à l'intégrale de la fonction respective g_n et de cette sorte, cette longueur totale tend, pour $n \to \infty$, vers l'intégrale de la fonction f. De plus, tous ces systèmes $\Sigma^{(n)}$ renferment l'ensemble E, sauf peut-être un ensemble partiel de mesure nulle. Il s'ensuit que

$$m_e E \leqq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Un raisonnement analogue donne que

$$m_e CE \leqq \int_a^b (1 - f(x))\,dx = b - a - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ces deux inégalités, comparées à l'inégalité (12), donnent précisément

$$m_e E + m_e CE = b - a,$$

c'est-à-dire la mesurabilité de l'ensemble E.

En résumé, *pour qu'un ensemble soit mesurable au sens de Lebesgue, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit intégrable (d'après notre définition) et la mesure des ensembles mesurables est égale à l'intégrale de leurs fonctions caractéristiques.* De cette relation entre intégrale et mesure il vient immédiatement, par les théorèmes 8 et 9, que la somme et le produit d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables, compris dans le même intervalle fini, sont mesurables et que de plus, lorsque ces ensembles sont disjoints, la mesure de leur somme est égale à la somme de leurs mesures.

La seconde étape dans la définition de l'intégrale de M. LEBESGUE est marquée par l'idée de fonction mesurable. La fonction $f(x)$ est dite mesurable lorsque pour $A < B$ d'ailleurs quelconques, l'ensemble des points x pour lesquels $A < f(x) < B$ est mesurable. De ce que nous venons de dire sur la somme et le produit des ensembles mesurables, on en déduit immédiatement que l'hypothèse énoncée est équivalente à la suivante. Pour chaque valeur de A, l'ensemble des points x pour lesquels $f(x) > A$ est mesurable. Il en est de même des hypothèses analogues, formées avec l'une ou l'autre des inégalités $f \geqq A$, $f < A$, $f \leqq A$.

Soit donc $f(x)$ une fonction positive et mesurable, définie pour $a \leqq x \leqq b$, et soit $l_0 = 0$, l_1, l_2,.... une suite croissante allant vers l'infini et telle que les différences $l_n - l_{n-1}$ restent au dessous d'une borne δ. Désignons par E_n l'ensemble des x, évidemment mesurable, pour lesquels $l_{n-1} < f(x) \leqq l_n$ et supposons que la série

$$\sum_1^\infty l_n m E_n \tag{13}$$

soit convergente. Lorsqu'il en est ainsi pour une suite l_n, il en sera de même pour toutes les suites analogues. En effet, soit $\bar{l}_0 = 0$, $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$,.... une seconde suite du même type, avec $\bar{l}_n - \bar{l}_{n-1} \leqq \bar{\delta}$, et soit $\bar{E}_n$ l'ensemble mesurable pour lequel $\bar{l}_{n-1} < f(x) \leqq \bar{l}_n$. Désignons par $e_n(x)$ et $\bar{e}_n(x)$ les fonctions caractéristiques des ensembles E_n et $\bar{E}_n$. Alors

$$\sum_1^\infty \bar{l}_{n-1} \bar{e}_n(x) \leqq f(x) \leqq \sum_1^\infty l_n e_n(x);$$

or cette dernière série, formée de fonctions intégrables, converge presque partout et elle représente une fonction intégrable, ce qui vient immédiatement, par le théorème 10, de la convergence supposée de la série (13). Il s'ensuit, par le théorème 11, l'intégrabilité terme à terme de la série figurant au premier membre et en particulier, la convergence de la série $\sum \bar{l}_{n-1} m \bar{E}_n$ et enfin, comme

$$\sum_1^\infty \bar{l}_n m \bar{E}_n = \sum_1^\infty \bar{l}_{n-1} m \bar{E}_n + \sum_1^\infty (\bar{l}_n - \bar{l}_{n-1}) m \bar{E}_n \leqq \sum_1^\infty \bar{l}_{n-1} m \bar{E}_n + \bar{\delta}(b-a), \tag{14}$$

il vient que la série $\sum \bar{l}_n m \bar{E}_n$ est convergente, ce qu'il fallait voir.

Il ressort encore de ce raisonnement que

$$\sum_1^\infty \bar{l}_{n-1} m \bar{E}_n \leqq \sum_1^\infty l_n m E_n,$$

c'est-à-dire que les « sommes inférieures » du type considéré ne dépassent aucune des « sommes supérieures ». Eu égard encore à l'inégalité (14), il s'ensuit que ces deux catégories de sommes sont séparées par une quantité univoquement déterminée et c'est cette quantité que M. LEBESGUE appelle l'intégrale définie de $f(x)$ sur l'intervalle (a, b). L'intégrale au sens de M. LEBESGUE existe donc sous la condition que f soit mesurable et que la série (13) converge pour l'une des échelles l_n du type considéré. Ainsi par exemple, l'intégrale existe pour toute fonction mesurable et bornée.

Il vient aussi immédiatement de ces raisonnements que toute fonction intégrable d'après M. LEBESGUE l'est aussi d'après notre définition et que les valeurs des deux intégrales coïncident. Ce qui reste à démontrer, c'est que l'intégrabilité, selon notre définition, entraine celle au sens de LEBESGUE.

Voyons d'abord que toute fonction $f(x)$ intégrable d'après notre définition est mesurable. Pour cet effet, nous n'avons qu'à considérer les ensembles E pour lesquels $f(x) > A$ et à prouver que ces ensembles sont mesurables. Envisageons le rapport

$$\frac{\inf(f(x), A+h) - \inf(f(x), A)}{h}$$

avec $h > 0$; il représente une fonction intégrable, égale à 1 lorsque h est suffisamment petit, pour les x tels que $f(x) > A$ et égale à 0 ailleurs. Par conséquent, sa limite, pour $h=0$, est égale à la fonction caractéristique de l'ensemble E qui correspond à la valeur respective de A. Cette limite étant intégrable d'après le théorème 12, nos ensembles E et alors la fonction $f(x)$ sont mesurables.

Cela étant, envisageons de nouveau la suite l_n, ainsi que les ensembles E_n et les fonctions $e_n(x)$ qui y correspondent. Comme

$$\sum_1^\infty l_n e_n(x) \leqq f(x) + \delta$$

et comme les fonctions f et e_n sont intégrables, le théorème 11 s'applique et la série au premier membre peut être intégrée terme à terme. Il s'ensuit en particulier la convergence de la série intégrée, c'est-à-dire, celle de la série $\sum l_n m E_n$. Par conséquent, la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de LEBESGUE, ce qu'il fallait prouver.