ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GEORGE D. BIRKHOFF

Sur le problème restreint des trois corps (second mémoire)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 5, nº 1 (1936), p. 9-50

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_1_9_0>

SUR LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS [1]

(SECOND MÉMOIRE)

par GEORGE D. BIRKHOFF (Cambridge, Mass.).

II.

Partie qualitative.

1. Quelques préliminaires.

Représentons la surface de section S_2 dans le plan ordinaire, par exemple en employant $\varrho +$ const., et θ comme coordonnées polaires de ce plan. Ainsi S_2 devient une region limitée par deux cercles concentriques $\varrho = \varrho'$ et $\varrho = \varrho''$. Les points $\theta = 0$ de cette région représente des états du mouvement où la courbe correspondante traverse l'axe des x à angle droit dans le sens direct ou rétrograde, mais à la droite de J (voir la fig. 1). Ces deux séries d'états qui coïncident à l'origine c'est-à-dire au point $\varrho = \theta = 0$ de S_2 constituent une seule série analytique. Nous désignerons la ligne correspondante par $\alpha\beta$, où α et β sont situés respectivement sur la courbe L_1 et sur la courbe L_2 (voir la fig. 4).

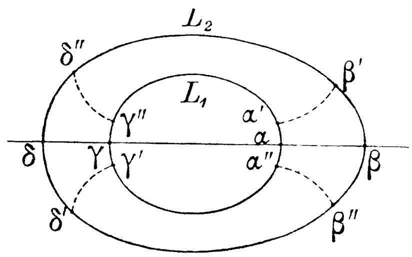

Fig. 4.

De la même manière la ligne $\gamma\delta$ pour laquelle $\theta = \pi$ correspondra à la seule série d'états du mouvement où la courbe traverse l'axe des x à angle droit mais à la gauche de J.

Il existe aussi une autre série analogue à $\alpha\beta$ correspondant à des points de S_3 qui ne sont pas situés sur S_2 quoiqu'ils soient, au moins en partie, situés sur sa continuation analytique. Cette série comprend l'état de vitesse nulle à la droite de J. Les deux séries constituent une courbe analytique fermée dans S_3, à savoir les points $q = p' = 0$ en les coordonnées régularisantes p, q, p', q'. Semblablement il existe aussi une autre série analogue à $\gamma\delta$ en dehors de S_2.

Soit $\alpha''\beta''$ la ligne de S_2 dans laquelle les trajectoires qui sortent de la série des points associés à $\alpha\beta$ traversent S_2 pour la première fois après le temps τ. La ligne symétriquement située $\alpha'\beta'$ sera alors la ligne dans laquelle les mêmes

---

[1] *Sur le problème restreint des trois corps.* Premier mémoire. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. IV, pp. 267-306.

trajectoires traversent S_2 pour la première fois à un temps τ antérieur. Il ne faut oublier ni la signification géométrique de S_2, ni la symétrie de S_2 et des courbes auxiliaires L_1^* et L_2^* de mouvement.

Mais on a évidemment les relations $T(\alpha'\beta')=\alpha''\beta''$ et $R(\alpha'\beta')=\alpha''\beta''$ [2], d'où il s'ensuit que $U(\alpha'\beta')=\alpha'\beta'$, c'est-à-dire que $\alpha'\beta'$ constitue la moitié de l'axe de la transformation involutive U, chaque point de $\alpha'\beta'$ étant un point fixe de U. L'autre moitié de cet axe est la ligne analogue $\gamma'\delta'$. Semblablement les lignes $\alpha''\beta''$ et $\gamma''\delta''$ constituent l'axe analogue de la transformation involutive $\bar{U}=RUR$ où $T=\bar{U}R$. Il est évident que toutes les six lignes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$, $\alpha''\beta''$, $\gamma''\delta''$ doivent être entièrement distinctes.

Si l'on faisait une déformation convenable du plan on pourrait regarder U comme une réflexion ordinaire par rapport à l'axe $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$. On voit donc pourquoi les deux courbes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ et les courbes $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$ jouent des rôles tout à fait analogues.

Nous savons aussi que pour $\mu=0$ on a

$$\varrho_1=\varrho, \qquad \theta_1=\theta-2\pi a^{\frac{3}{2}}(\varrho, \lambda),$$

où le dernier terme à droite est toujours plus petit que π en valeur absolue, et petit en même temps que λ. Donc la transformation $RT=U$ devient

$$\varrho_1=\varrho, \qquad \theta_1=-\theta+2\pi a^{\frac{3}{2}}(\varrho, \lambda).$$

Par conséquent les équations de $\alpha'\beta'$ et $\gamma'\delta'$ pour $\mu=0$ sont respectivement

$$\theta=\pi a^{\frac{3}{2}}(\varrho, \lambda) \quad \text{et} \quad \theta=\pi(1+a^{\frac{3}{2}}(\varrho, \lambda)).$$

Donc ces lignes se trouvent toujours respectivement au-dessus de l'axe $\theta=0$ et au-dessous de cet axe, avec $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ près de $\theta=0$ et $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$ près de $\theta=\pi$ pour λ petit (voir la fig. 4).

De plus, la quantité $2\pi a^{\frac{3}{2}}$, où a représente le demi-grand axe de l'ellipse du mouvement, croît quand un point parcourt $\alpha\beta$ de α à β. Donc les lignes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ seront tournées par T vers la droite de la direction radiale; évidemment la ligne transformée par T de toute ligne radiale sera aussi tournée vers la droite [3]. De la même manière on voit que les images de toute ligne radiale par la transformation inverse T^{-1} seront tournées vers la gauche de la direction radiale. Cette propriété qualitative de la transformation des directions restera valable même pour μ assez petit. En effet la transformation de (ϱ, θ) en (ϱ_1, θ_1) reste analytique même pour (ϱ, θ) un peu à l'extérieur de L_1 et de L_2. Donc les images des lignes radiales varieront analytiquement avec μ même en dehors de S_2.

---

[2] Nous avons vu que $T=RU$, où R est une réflexion ordinaire en $\theta=0$, et U est involutive.

[3] Voir III, sections 42-46.

Il est évident que les transformations composées T^k, pour $k=1, 2, 3, \ldots$, font tourner les directions radiales vers la droite et que les transformations inverses T^{-k} font tourner les directions radiales vers la gauche.

De plus, si P est un point de $\alpha'\beta'$ où de $\gamma'\delta'$, donc tel que $U(P)=P$, et si l'on écrit $T^k=RU^{(k)}$ où k est impair et positif, on aura

$$U^{(k)}T^{-\frac{k-1}{2}}(P)=RT^{\frac{k+1}{2}}(P)=(UR)^{\frac{k-1}{2}}U(P)=T^{-\frac{k-1}{2}}(P).$$

Par conséquent l'axe de la transformation involutive $U^{(k)}$ pour k impair et positif est la $(k-1)/2^{\text{ième}}$ image de $\alpha'\beta'$ et $\gamma'\delta'$ par T^{-1}.

De la même manière si P est un point de $\alpha\beta$ ou de $\gamma\delta$, donc tel que $R(P)=P$, on aura pour k pair et positif

$$U^{(k)}T^{-\frac{k}{2}}(P)=RT^{\frac{k}{2}}(P)=T^{-\frac{k}{2}}R(P)=T^{-\frac{k}{2}}(P).$$

Par conséquent l'axe de $U^{(k)}$ pour k pair est composé des $k/2^{\text{ièmes}}$ images de $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ par T^{-1}.

2. - Hypothèse de la transitivité ordinaire.

Il semble être presque certain que le problème restreint des trois corps est transitif pour μ positif et suffisament petit, quoiqu'on n'ait pas pu en faire la démonstration; à vrai dire le problème beaucoup plus simple de la stabilité permanente au voisinage d'un mouvement périodique elliptique (stable) n'a pas été résolu, malgré les plus grands efforts des géomètres.

Nous allons maintenant introduire l'*hypothèse de la transitivité ordinaire de T et de ses puissances*: Etant donnés, pour $\mu \neq 0$ et petit, deux points quelconques P et Q de la surface de section S_2, et deux voisinages arbitrairement petits de ces points, on peut trouver dans ces voisinages respectifs, des points P' et Q' tels que P' soit transformé en Q' par une puissance convenable de T^k $(k=1, 2, \ldots)$, où l'entier k est arbitraire et donné d'avance.

Une conséquence immédiate de cette hypothèse est que les points fixes de T, $T^2, \ldots$ sont toujours isolés. Autrement il y aurait une courbe analytique des points invariants par rapport à une certaine puissance T^k de T. Si cette courbe se trouvait complètement à l'intérieur de S_2, elle diviserait S_2 en des parties invariantes par T^k, et l'on voit que T^k ne pourrait pas être transitive. De la même manière si la courbe des points fixes sort de S_2, elle doit sortir un nombre pair de fois; mais, comme auparavant, cette courbe ne peut pas diviser S_2 en deux parties distinctes. Donc la seule possibilité est que la courbe s'étend de L_1 à L_2 sans avoir aucun point multiple. Mais selon la symétrie connue de T^k par rapport à $\theta=0$, l'image de cette courbe par rapport à $\theta=0$ est formée également de points fixes par rapport à T^k. Ainsi les deux courbes diviseraient S en des parties invariantes, à moins que ces deux courbes symétriques ne se réduisent à la ligne $\theta=0$ ou à $\theta=\pi$.

Mais en ce cas tous les points de $a\beta$ ou de $\gamma\delta$ seraient fixes pour T^k, ce qui est impossible puisque T^k tourne les directions radiales vers la droite.

3. - Classification des mouvements périodiques symétriques.

Toute courbe périodique symétrique doit couper l'axe des x dans le plan des x, y, deux fois et deux fois seulement à angle droit. En effet choisissons deux points symétriques de cette courbe. En faisant croître τ à l'un de ces points et décroitre à l'autre, on obtient deux arcs symétriques. À un certain moment ces arcs se réuniront en un point de croisement à angle droit. En faisant croître davantage τ on obtient nécessairement en une demi-période un autre point de la même espèce. D'autre part un arc terminé en deux points adjacents de cette espèce joint à son image symétrique par rapport à l'axe des x doit constituer une courbe complète de mouvement.

À ce point de vue il y a dix classes possibles de tels mouvements périodiques symétriques selon les types des deux croisements que nous divisons en quatre catégories de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
&(aa): \quad (a\beta, a\beta)\,;\ (\gamma\delta, \gamma\delta)\,;\ (a'\beta', a'\beta')\,;\ (\gamma'\delta', \gamma'\delta'),\\
&(ab): \quad (a\beta, \gamma\delta)\,;\ (a'\beta', \gamma'\delta'),\\
&(aa'): \quad (a\beta, a'\beta')\,;\ (\gamma\delta, \gamma'\delta'),\\
&(ab'): \quad (a\beta, \gamma'\delta')\,;\ (\gamma\delta, a'\beta').
\end{aligned}$$

Les classes d'une de ces quatres catégories (aa), (ab), (aa'), (ab') admettent évidemment la même espèce d'analyse mathématique. Par exemple, on trouve dans la première catégorie tous les mouvements périodiques symétriques dont les deux croisements à angle droit appartiennent à une seule série $a\beta$, $a'\beta'$, $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$.

Ces points de croisement doivent varier analytiquement avec μ le long des lignes de symétrie correspondantes. Ils ne peuvent pas disparaître sauf en passant par L_1 ou par L_2, ou en coïncidant avec un autre point du même type.

Pendant une telle variation de μ les deux entiers caractéristiques ne peuvent pas changer sauf momentanément aux instants de coïncidence quand le mouvement dégénère en un mouvement pris $\varkappa$ fois, et quand k et l sont remplacés par $k/\varkappa$ et $l/\varkappa$ respectivement. En effet, pendant cette variation toute relation analytique identique de la forme $T^k(\varrho, \theta) = (\varrho, \theta + 2l\pi)$ doit subsister indéfiniment.

L'indice (¹) d'un point fixe P de T^k ne peut pas changer sauf aux moments

(¹) En faisant circuler autour de P dans le sens positif un point Q dans le voisinage, le vecteur $Q \to T^k(Q)$ tourne d'un angle $2i\pi$, où i est l'indice susdit. Un examen détaillé, dans le cas d'une transformation qui conserve les aires, montre que l'indice sera 1, 0, ou un entier négatif; et que l'indice détermine en grande partie le caractère du mouvement (stable ou instable, etc.). L'étude des indices dans quelques cas simples a été faite par POINCARÉ. La discussion la plus générale du cas d'un point fixe isolé se trouve dans mes Mémoires III de coïncidence avec d'autres points fixes de T^k. Une condition nécessaire d'un tel changement est que la somme des indices reste la même avant et après le moment de coïncidence.

Par exemple considérons la possibilité la plus simple c'est-à-dire quand seulement deux points fixes simples P_1 et P_2 se confondent et disparaîssent. Puisqu'il n'y a pas de points fixes après la coïncidence, l'indice total avant cette coïncidence doit être nul. Donc les indices avant la coïncidence sont 1 et -1 respectivement ou bien ils sont nuls tous les deux. Mais la seconde possibilité peut se présenter seulement aux points fixes multiples. On pourrait s'imaginer que P_1 soit hyperbolique avec échange des branches asymptotiques en cycles de l ($l \neq 1$) puisque l'indice est alors 1. Mais dans ce cas les racines caractéristiques réciproques seraient identiquement des racines $l^{\text{ièmes}}$ de 1, même en coïncidence. Cela n'est pas possible, puisque l'indice de $P_1 = P_2$ est 0, tandis qu'à un point avec de telles racines caractéristiques l'indice est 1 toujours.

Donc le seul cas possible est celui des indices $+1$ et -1. Le point P_2 de l'indice -1 doit être hyperbolique et instable avec quatre branches invariantes aboutissant à ce point. Ces branches sont groupées analytiquement en des couples. L'autre point P_1 avec l'indice 1 doit être elliptique et stable. La figure à droite éclaircira ce cas. Les courbes en pointillés autour de P_1 représentent une famille de courbes presque invariantes qui l'entourent. Le cas limite de coïncidence se trouve à la droite de la figure; en effet pour $P_1 = P_2$ le point fixe a un indice nul et doit avoir deux branches asymptotiques aboutissant à ce point. Ces branches sont représentées par une même série formelle ([5]). Elles forment en général un point de rebroussement à l'origine. Il y a donc dans ce cas deux mouvements périodiques, l'un elliptique (stable), l'autre hyperbolique (instable) avec quatre branches asymptotiques aboutissantes, qui coïncident en un mouvement hyperbolique avec deux branches aboutissantes avant de disparaître.

Fig. 5.

Nous allons appeler dans ce qui suit « primaires » les mouvements périodiques dont les entiers caractéristiques k et l n'ont pas de facteur commun; « secondaires » si k et l admettent seulement le facteur 2 en commun; « tertiaires »

---

et IV. Le cas d'une dégénérescence extrême en des courbes analytiques des points fixes, qui n'entre pas ici à cause de la transitivité supposée, reste encore à être étudié.

([5]) Si cette série converge les deux branches ne forment qu'une seule branche analytique qui passe par le point; autrement les deux branches sont analytiques sauf au but où elles sont « hypercontinues ». Voir III, section 35.

s'ils admettent le facteur 3; et ainsi de suite, les mouvements de la $s^{\text{ième}}$ espèce étant ceux pour lesquels les entiers caractéristiques k et l admettent précisement le facteur commun s.

Remarquons que pour $\mu=0$ tous les mouvements périodiques sont primaires. En effet si $T^k(\varrho, \theta)=(\varrho, \theta+2l\pi)$ et si k et l admettent le facteur commun q avec $k=qk_1$, $l=ql_1$, on aura aussi $T^{k_1}(\varrho, \theta)=(\varrho, \theta+2l_1\pi)$. Il est évident que k_1 et l_1 seront les entiers caractéristiques de ce mouvement périodique pour $\mu=0$.

En général si l'on a $T^k(\varrho, \theta)=(\varrho, \theta+2l\pi)$ le rapport $2l\pi/k$ indique (quelque soit μ) l'avance angulaire moyenne du point périodique (ϱ, θ) par l'itération répétée de T. Donc les entiers caractéristiques k_1, l_1 ne peuvent être que des sous-multiples égaux de k, l, avec $l_1/k_1=l/k$.

4. - Une condition nécessaire pour l'existence des mouvements périodiques.

Une condition nécessaire pour que des mouvements périodiques, symétriques ou non, avec des entiers caractéristiques k, l puissent exister est que l'on ait

$$\sigma' > \frac{2l\pi}{k} > \sigma'',$$

où σ' et σ'' désignent les deux coefficients de rotation le long de L_2 et de L_1 respectivement.

Pour démontrer ce fait, remarquons que la ligne $T^m(\alpha\beta)$ par exemple $(m=1, 2, 3,....)$ aura un point $\alpha^{(m)}$ sur L_1 qui s'avance avec une vitesse angulaire moyenne σ'' quand la transformation T est indéfiniment répétée; d'autre part la vitesse moyenne de $\beta^{(m)}$ sera σ'. Remarquons aussi que puisque toute courbe $T^m(\alpha\beta)$ est tournée vers la droite de la direction radiale, les points $\beta^{(m)}$ et $\alpha^{(m)}$ doivent être respectivement le plus à la droite et le plus à la gauche en sens angulaire de tous les points de $T^m(\alpha\beta)$ (voir la fig. 6). Par conséquent on aura $\sigma' > \sigma''$ [6]. D'autre part la vitesse angulaire moyenne d'un point périodique P de $\alpha\beta$ est $2l\pi/k$. Donc on doit avoir les inégalités énoncées pour un tel point périodique P.

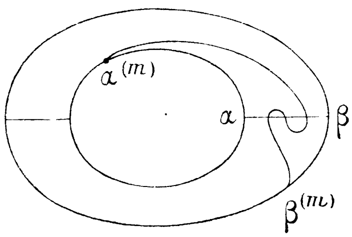

Fig. 6.

En partant de la ligne radiale qui le contient, on démontre analoguement les inégalités énoncées, pour tout autre point périodique.

Le cas où $2l\pi/k=\sigma'$ ou σ'' est celui où il existe un coefficient de rotation commensurable avec 2π le long de L_2 ou de L_1 respectivement. Pour une telle valeur de μ un mouvement périodique vient à coïncider avec L_2 ou L_1 respectivement.

---

(6) Voir III, section 46.

5. - Les mouvements périodiques symétriques primaires.

Étudions maintenant les mouvements périodiques symétriques primaires. Nous supposerons que la condition nécessaire se trouve satisfaite.

Il n'existe jamais de mouvements périodiques symétriques primaires de la première catégorie (aa).

Évidemment le raisonnement sera le même pour tous les quatre types de cette catégorie. Considérons le type $(a\beta, a\beta)$ par exemple.

S'il existe un tel mouvement primaire, soient k et l (sans facteur commun) les deux entiers caractéristiques pour un tel point $(\varrho, 0)$ de $a\beta$. Nous aurons donc

$$T^k(\varrho, 0) = (\varrho, 2l\pi)$$

par hypothèse. Mais il y a aussi un autre point $(\bar{\varrho}, 0)$ de $a\beta$ dans la série des points transformés par $T, \ldots, T^{k-1}$. Soit $(\bar{\varrho}, 0)$ ce point avec

$$T^{k'}(\varrho, 0) = (\bar{\varrho}, 2l'\pi) \qquad (0 < k' < k).$$

Il s'ensuit maintenant de la symétrie que l'on doit avoir aussi

$$T^{-k'}(\varrho, 0) = (\bar{\varrho}, -2l'\pi).$$

En combinant ces relations, on obtient

$$T^{2k'}(\varrho, 0) = (\varrho, 4l'\pi).$$

Par conséquent on conclut que $k = 2k'$, $l = 2l'$, ce qui est impossible puisque k et l n'ont aucun facteur en commun.

Démontrons maintenant les faits suivants concernant les mouvements périodiques des autres catégories (ab), (aa'), (ab').

Si la condition nécessaire est satisfaite il existera un nombre impair de mouvements périodiques symétriques primaires de chaque type des respectives catégories: (ab) *si* k *est pair et* l *est impair*; (aa') *si* k *est impair et* l *est pair*; (ab') *si* k *et* l *sont impairs.*

Ces mouvements primaires varieront analytiquement avec μ *et peuvent seulement paraître ou disparaître à la coïncidence de deux mouvements primaires de la même espèce ou, plus généralement, à la coïncidence d'un nombre pair de tels mouvements.*

Supposons en premier lieu que k soit pair et que l soit impair. Nous pouvons supposer ici qu'un des croisements à angle droit correspond à un point $(\varrho, 0)$ de $a\beta$. Par la définition de k et l nous aurons $T^k(\varrho, 0) = (\varrho, 2l\pi)$ d'où $T^{\frac{k}{2}}(\varrho, 0) = T^{-\frac{k}{2}}(\varrho, 2l\pi)$. Mais la symétrie des transformations $T^{\frac{k}{2}}$ et $T^{-\frac{k}{2}}$ nous montre que $T^{\frac{k}{2}}(\varrho, 0)$ et $T^{-\frac{k}{2}}(\varrho, 0)$ doivent être des points symétriques par rapport à $\theta = 0$. Il en résulte ainsi que ces points se trouvent sur $\theta=0$ ou $\theta=\pi$, et qu'ils coïncident géométriquement. Nous pouvons donc écrire $T^{\frac{k}{2}}(\varrho, 0)=(\bar{\varrho}, \lambda\pi)$ et $T^{-\frac{k}{2}}(\varrho, 0)=(\bar{\varrho}, -\lambda\pi)$. Ainsi, en comparant, nous obtenons $\lambda=l$. Puisque l est impair le point $(\bar{\varrho}, l\pi)$ se trouve sur la ligne $\theta=\pi$. Par conséquent, quand k est pair et l est impair, un mouvement correspondant primaire doit être de la catégorie (ab).

Supposons maintenant que k soit impair et que l soit pair. Supposons aussi, par exemple, qu'un des croisements à angle droit corresponde à un point $(\varrho, 0)$ de $\alpha\beta$. Nous aurons donc $T^k(\varrho, 0)=(\varrho, 2l\pi)$. Considérons maintenant les points symétriques $T^{\frac{k-1}{2}}(\varrho, 0)$ et $T^{-\frac{k-1}{2}}(\varrho, 0)$ que nous appellons Q et $\bar{Q}$. Evidemment nous avons $\bar{Q}=T(Q)$ en même temps que $Q=R(\bar{Q})$. Par conséquent nous avons $U(Q)=Q$. Donc le point Q se trouve sur la ligne $\alpha'\beta'$ ou sur la ligne $\gamma'\delta'$. Soit $(\bar{\varrho}, \bar{\theta}+2\lambda\pi)$ ce point où $0<\bar{\theta}<\pi$ si Q se trouve sur $\alpha'\beta'$ et où $-\pi<\bar{\theta}<0$ si le point Q se trouve sur $\gamma'\delta'$. Nous avons alors

$$T^{-\frac{k-1}{2}}(\varrho, 0)=(\bar{\varrho}, -\bar{\theta}-2\lambda\pi).$$

Mais si nous supposons que R est la réflexion en $\theta=0$, et si ensuite nous définissons $U=RT$, nous trouvons dans le premier cas $0<\bar{\theta}<\pi$

$$T^{\frac{k+1}{2}}(\varrho, 0)=T(\bar{\varrho}, \bar{\theta}+2\lambda\pi)=RU(\bar{\varrho}, \bar{\theta}+2\lambda\pi)=R(\bar{\varrho}, \bar{\theta}-2\lambda\pi)=(\bar{\varrho}, -\bar{\theta}+2\lambda\pi)$$

puisque U laisse les points de $\alpha'\beta'$ invariants. Par comparaison nous concluons que $\lambda=l/2$, ce qui est possible puisque l est pair selon notre hypothèse. Dans le second cas nous trouvons

$$T^{\frac{k+1}{2}}(\varrho, 0)=RU(\bar{\varrho}, \bar{\theta}+2\lambda\pi)=R(\bar{\varrho}, \bar{\theta}-2(\lambda-1)\pi)=(\bar{\varrho}, -\bar{\theta}+2(\lambda-1)\pi)$$

puisque, pour les points $(\bar{\varrho}, \bar{\theta})$ de $\gamma'\delta'$, on a $U(\bar{\varrho}, \bar{\theta})=(\bar{\varrho}, \bar{\theta}+2\pi)$. Par comparaison il résulte l'égalité $\lambda=(l+1)/2$, ce qui contredirait notre hypothèse. Donc le mouvement doit être dans ce cas de la catégorie (aa').

Évidemment si k et l sont impairs tout mouvement primaire doit être de la catégorie (ab') selon ce même raisonnement.

Il reste à démontrer que ces mouvements primaires sont en nombre impair et varient analytiquement avec μ de la manière énoncée. Pour le faire voir dans le premier cas nous raisonnerons de la manière suivante.

Puisque la courbe $T^{\frac{k}{2}}(\alpha\beta)$ est tournée vers la droite de la direction radiale, elle coupera $\gamma\delta$ $(\theta=l\pi)$ en un nombre impair de points ou elle ne la coupera en aucun point. Mais cette seconde possibilité n'a pas lieu. Autrement $T^{-\frac{k}{2}}(\alpha\beta)$ ne couperait pas $\theta=-l\pi$. Souvenons-nous maintenant de la symétrie de ces deux courbes par rapport à $\theta=0$ et du fait que la rotation angulaire relative aux points $\alpha^{\left(-\frac{k}{2}\right)}$ et $\alpha^{\left(\frac{k}{2}\right)}=T^k\left(\alpha^{-\frac{k}{2}}\right)$ est mesurée par $k\sigma'$, et aux points $\beta^{\left(-\frac{k}{2}\right)}$ et $\beta^{\left(\frac{k}{2}\right)}$ par $k\sigma''$. En faisant aller le point $P(\varrho, \theta)$ de $\alpha^{\left(\frac{k}{2}\right)}$ à $\beta^{\left(\frac{k}{2}\right)}$ le long de $T^{\frac{k}{2}}(\alpha\beta)$ et en même temps le point symétrique $(\varrho, -\theta)$ de $\alpha^{\left(-\frac{k}{2}\right)}$ à $\beta^{\left(-\frac{k}{2}\right)}$, on voit qu'on aura $\theta=l\pi$ un nombre impair de fois. Ce sont précisement les points primaires du type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$, dont il est question.

Evidemment ces points varieront avec μ analytiquement de la manière énoncée.

Les deux autres cas se traitent d'une façon analogue.

6. - Les mouvements périodiques symétriques secondaires.

Nous avons vu qu'il n'existe pas de mouvements périodiques symétriques primaires de la première catégorie. En revanche nous allons démontrer qu'*il n'existe jamais de mouvements périodiques symétriques secondaires sauf de la première catégorie.*

Pour commencer, supposons qu'il y ait un mouvement périodique symétrique de la deuxième catégorie, par exemple du type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$, qui est secondaire. Nous pouvons poser alors $k=2k_1$, $l=2l_1$ où k_1 et l_1 sont sans facteur commun. De plus nous devons avoir

$$T^{k'}(\varrho, 0)=(\bar{\varrho}, \lambda\pi), \qquad T^{k''}(\bar{\varrho}, \lambda\pi)=(\varrho, 4l_1\pi)$$

où $k'+k''=k=2k_1$ et où λ est impair. En effet il y a un état de croisement à angle droit au point $(\varrho, 0)$ de $\alpha\beta$; puis, après $k'-1$ intersections avec la surface de section S_2, il y a un autre point de croisement à angle droit au point $(\bar{\varrho}, \lambda\pi)$ de $\gamma\delta$; puis après $k''-1$ autres intersections, le point de la trajectoire revient à $(\varrho, 4l_1\pi)$.

De plus, on a $T^{-k'}(\varrho, 0)=(\bar{\varrho}, -\lambda\pi)$ à cause de la symétrie, donc

$$T^{2k'}(\varrho, 0)=(\varrho, 2\lambda\pi).$$

Puisque le mouvement est secondaire il s'ensuit que $k'=k''=k_1$, $\lambda=2l_1$. Mais λ était impair selon notre hypothèse.

Si nous avions commencé en supposant que le mouvement considéré était de la troisième catégorie $(\alpha\alpha')$, par exemple du type $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, nous raisonnerions d'une manière analogue. Ici nous devons avoir

$$T^{k'}(\varrho, 0)=(\bar{\varrho}, \bar{\theta}+2\lambda\pi), \qquad T^{k''}(\bar{\varrho}, \bar{\theta})=(\varrho, (4l_1-2\lambda)\pi)$$

où $(\bar{\varrho}, \bar{\theta})$ est un point de $\alpha'\beta'$ avec $0<\bar{\theta}<\pi$ et où $k'+k''=k=2k_1$. Mais selon la première équation on a $T^{-k'}(\varrho, 0)=(\bar{\varrho}, -\bar{\theta}-2\lambda\pi)=T(\bar{\varrho}, \bar{\theta}-2\lambda\pi)$ puisque $T(\bar{\varrho}, \bar{\theta})=RU(\bar{\varrho}, \bar{\theta})=(\bar{\varrho}, -\bar{\theta})$. Donc on obtient $T^{2k'+1}(\varrho, 0)=(\varrho, 4\lambda\pi)$. On en conclurait que $2k'+1=2k_1$, $\lambda=2l_1$, ce qui est absurde.

De la même manière la possibilité que le mouvement secondaire soit de la catégorie (ab') doit être exclue.

Il reste à considérer la possibilité des mouvements périodiques symétriques secondaires de la première catégorie, par exemple du type $(\alpha\beta,\, \alpha\beta)$. Dans ce cas nous aurons

$$T^{k'}(\varrho, 0) = (\bar{\varrho}, 2\lambda\pi), \qquad T^{k''}(\bar{\varrho}, 0) = (\varrho, (4l_1 - 2\lambda)\pi).$$

avec $k' + k'' = k = 2k_1$. En employant la symétrie, comme auparavant, nous obtenons $T^{-k'}(\varrho, 0) = (\bar{\varrho}, -2\lambda\pi)$, donc $T^{2k'}(\varrho, 0) = (\varrho, 4\lambda\pi)$, et ainsi $k' = k'' = k_1$, $\lambda = l_1$. Ces équations deviennent alors

$$T^{k_1}(\varrho, 0) = (\bar{\varrho}, 2l_1\pi), \qquad T^{k_1}(\bar{\varrho}, 0) = (\varrho, 2l_1\pi),$$

où $\bar{\varrho} \neq \varrho$ puisque le mouvement est secondaire.

Mais la deuxième équation résulte de la première et de la symétrie de T. En effet nous obtenons $T^{-k_1}(\varrho, 0) = (\bar{\varrho}, -2l_1\pi)$, ce qui équivaut à la deuxième équation. Donc la seule équation $T^{k_1}(\varrho, 0) = (\bar{\varrho}, 2l_1\pi)$ avec $\bar{\varrho} \neq \varrho$ donne ces mouvements secondaires.

Ainsi on voit que les intersections de $T^{k_1}(\alpha\beta)$ avec $\alpha\beta$ $(\theta = 2l_1\pi)$ donnent les points secondaires rattachés à $2k_1$, $2l_1$, ou bien les points primaires rattachés à k_1, l_1 suivant que $\varrho \neq \varrho$ ou $\bar{\varrho} = \varrho$. Tous les points pour lequels on a $\varrho = \bar{\varrho}$ seront nécessairement primaires avec des entiers caractéristiques k_1 et l_1. Ces points existeront toujours en nombre impair si la condition nécessaire se trouve satisfaite, comme nous avons vu. Les autres points sont groupés en des couples $(\varrho, 0)$, $(\bar{\varrho}, 0)$, chaque couple correspondant à un mouvement secondaire.

Supposons que μ croît à partir de $\mu = 0$. Pour μ très petit il n'existera aucun point périodique symétrique secondaire du type $(\alpha\beta,\, \alpha\beta)$ avec les entiers caractéristiques $(2k_1, 2l_1)$. En effet $T^{2k_1}(\alpha\beta)$ et $\alpha\beta$ se croisent, pour $\mu = 0$ et même pour μ assez petit, une seule fois au plus en un point primaire.

Comment peuvent s'introduire les autres points de croisement de $T^{k_1}(\alpha\beta)$ avec $\alpha\beta$ qui correspondent à des points secondaires du type $(\alpha\beta,\, \alpha\beta)$ appartenant aux entiers caractéristiques $(2k_1, 2l_1)$? Nous allons voir que cela peut arriver de deux manières assez différentes.

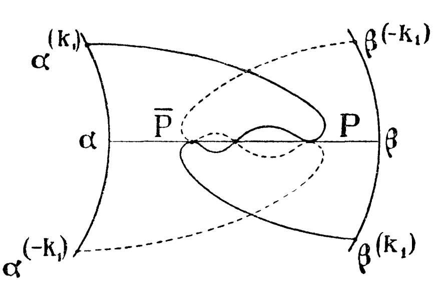

Fig. 7.

Au moment $\mu = \mu_0$ quand de nouveaux points de cette espèce s'introduisent ou de tels points disparaissent, la courbe $T^{k_1}(\alpha\beta)$ devient tangente à $\alpha\beta$ aux points de coïncidence correspondants. Considérons le voisinage d'un tel point.

Supposons en premier lieu que ce point P n'est pas un point primaire (voir la fig. 7), donc il est secondaire

L'image $T^{-k_1}(\alpha\beta)$ de $\alpha\beta$ par T^{-k_1} occupera une position symétrique par rapport à $\alpha\beta$ (voir le trait pointillé de la fig. 7).

Il y a ici deux cas selon que $T^{k_1}(\alpha\beta)$ coupe $\alpha\beta$ ou ne la coupe pas au point P. Si $T^{k_1}(\alpha\beta)$ ne la coupe pas, il y a un contact double dans le cas « général » ([7]). Evidemment à ce moment il ne peut se produire que l'apparition ou la disparition de deux points simples de cette espèce. Mais alors il y a un autre point $\overline{P}$ de $\alpha\beta$ qui appartient au même groupe de points où $\overline{P}=T^{k_1}(P)$ (voir la fig. 7). La transformation T^{-k_1} change $T^{k_1}(\alpha\beta)$ en $\alpha\beta$, et $\alpha\beta$ en $T^{-k_1}(\alpha\beta)$ qui est l'image symétrique de $T^{k_1}(\alpha\beta)$. Donc il y a aussi en $\overline{P}$ un point double de la même espèce que celui en P.

Examinons les indices dans ce cas. Si u et v sont des coordonnées symétriques dans S_2 qui s'évanouissent au point fixe P de T^{2k_1}, la transformation correspondante peut être écrite dans la forme

$$\overline{u}=au+bv+fu^2+\ldots., \qquad \overline{v}=cu+dv+gu^2+\ldots.$$

où $ad-bc=1$ (voir l'équation (33), partie I). Mais l'axe des $u(\alpha\beta)$ peut être transformé en une courbe tangente avec contact double, seulement dans le cas où $c=0$ et où le coefficient g de u^2 dans la série de $\overline{v}$ n'est pas nul. Il s'ensuit que la transformation T^{2k_1} doit avoir la forme plus spéciale

$$\overline{u}=au+bv+fu^2+\ldots., \qquad \overline{v}=+\frac{1}{a}v+gu^2+\ldots.$$

D'autre part à cause de la symétrie de T^{2k_1} et de T^{-2k_1}, la transformation de (u, v) en $(\overline{u}, \overline{v})$ doit être identique à la transformation de $(\overline{u}, -\overline{v})$ en $(u, -v)$ c'est-à-dire

$$u=a\overline{u}-b\overline{v}+f\overline{u}^2+\ldots., \qquad -v=-\frac{1}{a}\overline{v}+g\overline{u}^2+\ldots.$$

Par conséquent on doit avoir $a=\pm1$. Dans le cas $a=-1$ on doit avoir $g=0$, ce cas est donc inadmissible et l'on a $a=1$. Il résulte aussi qu'on doit avoir $2f=bg$. Donc la transformation T^{2k_1} en de telles coordonnées sera de la forme

$$\overline{u}=u+b\left(v+\frac{1}{2}gu^2\right)+\ldots., \qquad \overline{v}=v+gu^2+\ldots.$$

Mais on aura alors

$$\frac{\overline{v}-v}{\overline{u}-u}=\frac{gu^2+\ldots.}{b\left(v+\frac{1}{2}gu^2\right)+\ldots.}$$

Le vecteur correspondant $(u, v)\rightarrow(\overline{u}, \overline{v})$ aura presque la même direction que celui défini par

$$\frac{\overline{v}-v}{\overline{u}-u}=\frac{gu^2}{bv} \quad \text{ou par} \quad \frac{dv}{du}=\frac{gu^2}{bv}.$$

([7]) C'est le seul cas que nous considérons ici, afin d'éviter des complications inutiles. Tous les instruments analytiques nécessaires dans le cas vraiment général sont développés dans mon Mémoire III.

Les courbes intégrales de cette équation différentielle sont

$$\frac{1}{3}gu^3 - \frac{1}{2}bv^2 = C.$$

Donc l'indice correspondant doit être 0.

Par conséquent dans ce cas l'un des nouveaux points secondaires aura l'indice 1. Les racines réciproques de l'équation caractéristique sont alors imaginaires. près de 1, et de module 1, puisque les termes linéaires dans les séries varient d'une façon continue avec μ. L'autre de ces points aura l'indice -1, avec des

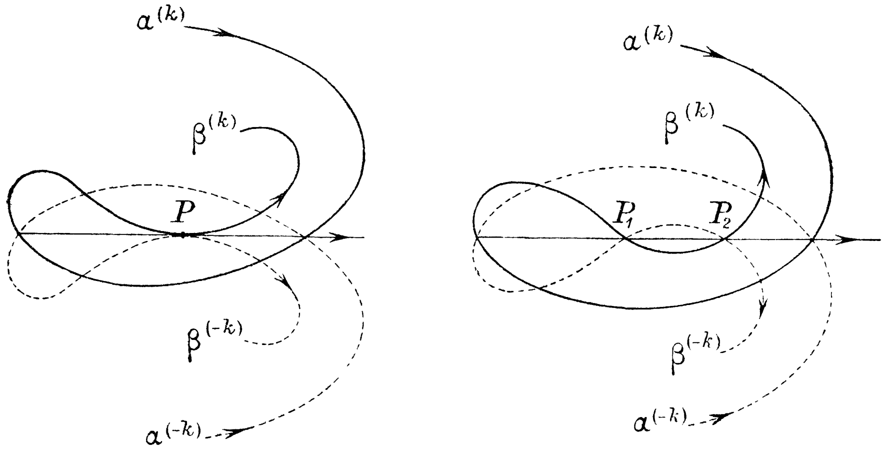

Fig. 8.

racines caractéristiques réelles réciproques près de 1. Le premier point est elliptique et en général du type stable. L'autre point est hyperbolique et instable avec quatre branches asymptotiques aboutissant à ce point.

Il reste à considérer le cas où la courbe $T^{k_1}(\alpha\beta)$ devient tangente à $\alpha\beta$ en un point P de $\alpha\beta$ qui est primaire et du type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ ou d'un des types $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, $(\alpha\beta, \gamma'\delta')$ selon que k_1 est pair ou impair. Nous allons traiter le cas de k_1 pair. Le cas de k_1 impair est tout à fait analogue.

Remarquons en premier lieu que dans ce cas l'ordre de contact au point P doit être au moins *trois*. En effet supposons que l'ordre de contact soit deux. Selon le raisonnement de plus haut la forme de la transformation T^{k_1} sera la même que celle de T^{2k_1}; et les deux directions des tangentes menées en P coïncideront avec celle de l'axe positif (voir la fig. 8). Donc si deux points P_1, P_2 apparaissent (voir la fig. 8), ils ne peuvent pas être échangés entre eux par la transformation T^{k_1}. Ici on aurait tout simplement deux nouveaux points primaires; nous n'avons aucun besoin de poursuivre l'étude de ce cas.

Nous avons donc à considérer maintenant le cas de contact du *troisième* ordre, où les deux courbes se croisent. Mais, selon la même analyse des séries pour T^{k_1}, le cas $a=1$ ne peut pas se presenter ici. Autrement les nouveaux points seraient encore primaires. Ainsi nous obtenons nécessairement pour T^{k_1}, en P, la forme

$$\bar{u}=-u+fu^2+\ldots, \qquad \bar{v}=-v+\ * \ +huv+kv^2+lu^3+\ldots \qquad (l \neq 0),$$

et la fig. 9 est celle correspondante. On voit ici que P_1 et P_2 sont échangés entre eux par T^{k_1} tandis que le point P entre P_1 et P_2 doit être transformé en lui-même.

Donc nous aurons le point primaire simple P du type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ qui varie analytiquement et deux points secondaires du type $(\alpha\beta, \alpha\beta)$ dans le voisinage. L'in-

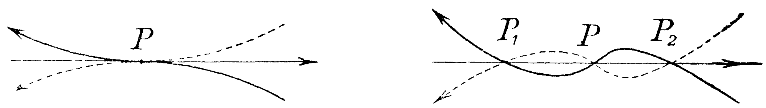

Fig. 9.

dice des deux points de ce nouveau groupe est $+1$ et les points peuvent être stables ou directement instables.

Je dis qu'en même temps il y a un contact de troisième ordre de $T^{k_1}(\gamma\delta)$ avec $\gamma\delta$ au point $\bar{P}$ de $\gamma\delta$ associé à P. À vrai dire, la forme de la transformation T^{k_1} est la même au point associé $\bar{P}$ qu'au point P, au moins par rapport aux axes convenables à $\bar{P}$. En particulier les racines caractéristiques sont toutes deux égales à -1. En prenant en $\bar{P}$ des coordonnées symétriques analogues et en nous souvenant du fait que T^{k_1} renverse toutes les directions au point $\bar{P}$ aussi bien qu'au point P, il nous devient évident que T^{k_1} doit avoir la forme

$$\bar{u}=-u+\ldots, \qquad \bar{v}=-v+\ldots$$

Par conséquent la $k_1^{\text{ième}}$ image de $\gamma\delta$ aura un contact du deuxième ordre au moins avec $\gamma\delta$. Mais si l'ordre de contact était seulement deux, les courbes $T^{k_1}(\gamma\delta)$ et $T^{-k_1}(\gamma\delta)$ (qui est l'image symétrique de $T^{k_1}(\gamma\delta)$) auraient aussi un contact direct de cet ordre et il y aurait deux points primaires du type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ dans le voisinage, ce qui est impossible dans le cas que nous considérons.

Donc selon notre hypothèse il y a un contact de troisième ordre au point $\bar{P}$ aussi bien qu'au point P. Par conséquent au même moment il apparaîtra deux mouvements périodiques symétriques secondaires appartenant à $2k_1$, $2l_1$, dans le voisinage du mouvement primaire du type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$. Ces mouvements secondaires sont des deux types $(\alpha\beta, \alpha\beta)$ et $(\gamma\delta, \gamma\delta)$ de la première catégorie.

Si k_1 est impair, $\alpha'\beta'$ ou $\gamma'\delta'$ doit remplacer $\gamma\delta$ dans ce raisonnement, suivant que l_1 est pair ou impair.

Pour étendre ce raisonnement au cas le plus général nous aurions besoin de la théorie des points fixes les plus compliqués. Le fait essentiel dont dépend le raisonnement est qu'il y a une symétrie complète par rapport à $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ et à $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$ en des coordonnées convenables.

Les mouvements périodiques symétriques secondaires de la première catégorie peuvent apparaître ou disparaître en des couples du même type ou même de deux types différents. Cette dernière possibilité aura lieu en général quand ils paraissent ou disparaissent dans le voisinage immédiat d'un mouvement primaire ayant le même rapport caractéristique, autour duquel ils circulent deux fois pendant une période.

7. - Les mouvements périodiques symétriques tertiaires, etc.

Les mêmes raisonnements nous conduisent aux résultats analogues concernant les espèces plus élévées :

Soient $k=sk_1$ *et* $l=sl_1$ $(s>1)$ *des entiers caractéristiques donnés où* k_1 *et* l_1 *sont sans facteur commun. Quand* s *est impair, tout mouvement périodique symétrique de la* $s^{ième}$ *espèce avec ces entiers caractéristiques sera des catégories respectives* (ab), (aa') *ou* (ab') *suivant qu'on a* k_1 *pair et* l_1 *impair,* k_1 *impair et* l_1 *pair ou* k_1 *et* l_1 *impairs. Quand* s *est pair tout mouvement périodique symétrique correspondant doit être de la première catégorie* (aa).

De tels mouvements de la $s^{ième}$ *espèce peuvent apparaître ou disparaître en des couples du même type pour* s *impair. Pour* s *pair ils peuvent apparaître ou disparaître de cette manière, ou même les deux mouvements qui coïncident peuvent être de deux types différents de la première catégorie.*

8. - Remarque sur les interrelations des mouvements symétriques.

Si l'on voulait aller plus loin encore avec l'analyse des mouvements symétriques on pourrait regarder l'entrelacement des images de $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$ avec $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$ comme une espèce de symbole complet pour l'arrangement relatif des mouvements périodiques. Par exemple le symbole partiel à gauche, où k_1, l_1 n'ont pas de facteur commun, et sont tous les deux impairs, indique l'existence d'un seul mouvement périodique symétrique primaire du type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ avec des entiers caractéristiques $2k_1$, l_1. Ceci correspondrait au point P. Il existerait aussi un seul mouvement secondaire du type $(\alpha\beta, \alpha\beta)$ avec des entiers caractéristiques $4k_1$, $2l_1$, avec lequel doit

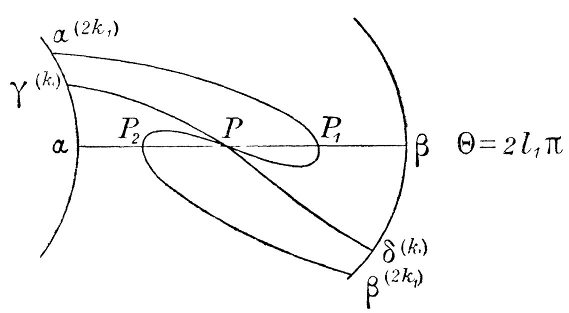

Fig. 10.

être associé un autre mouvement secondaire du type $(\gamma\delta, \gamma\delta)$. Ce mouvement du type $(\alpha\beta, \alpha\beta)$ correspond aux points P_1, P_2 du symbole partiel.

Nous n'allons pas pousser plus loin l'étude de cette espèce de symbolisme, qui jouit de nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, à cause du fait que les images de $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ par T, T^2,...., sont toujours « tournées vers la droite », le symbole partiel indiqué est essentiellement le seul qui soit possible dans le cas de trois croisements de $\alpha\beta$ par $T^{2k_1}(\alpha\beta)$. Ainsi il s'ensuit que le mouvement symétrique secondaire du type $(\alpha\beta, \alpha\beta)$ donne lieu à deux croisements à angle droit avec l'axe des x, l'un à droite (ϱ plus grand) et l'autre à gauche (ϱ plus petit) du croisement du mouvement périodique symétrique primaire (voir la fig. 11).

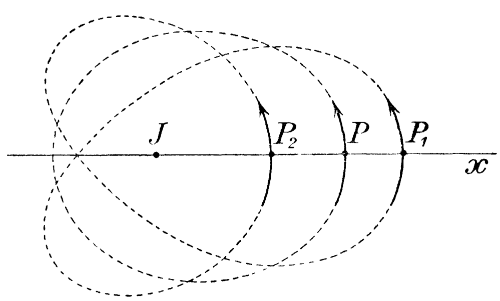

Fig. 11.

9. - Coïncidence des mouvements symétriques avec L_1 ou L_2.

Jusqu'ici nous n'avons pas considéré le cas $l_1/k_1=\sigma'$ ou σ'', où tous les mouvements périodiques symétriques avec $k/l=k_1/l_1$ viennent à coincider avec L_1 ou L_2, et puis disparaître. Il ne faut pas oublier que la transformation T se trouve définie même un peu en dehors de L_1 et L_2.

Il est à remarquer ici que pour $l_1/k_1=\sigma'$, par exemple, α, γ, α' et γ' seront transformés en α, γ, α' et γ' respectivement par T^{k_1}. En effet supposons par exemple que k_1 soit pair et l_1 impair. Il existera jusqu'au moment de coïncidence deux mouvements symétriques primaires, l'un de type $(\alpha\beta, \gamma\delta)$, l'autre de type $(\alpha'\beta', \gamma'\delta')$, rattachés aux entiers caractéristiques k_1, l_1. Donc α, γ, α', γ' seront des points fixes de T^{k_1} dans ce cas. Les autres cas peuvent être traités d'une manière analogue en employant nos résultats précédents sur l'existence de mouvements périodiques primaires.

Maintenant, remarquons que toutes les trajectoires périodiques qui se trouvent dans le voisinage de L_1 traversent S_2 et l'extension de S_2 un peu en dehors de L_1 alternativement. Par conséquent quand σ' passe par $2\pi l_1/k_1$ tous les mouvements périodiques primaires correspondant (symétriques ou non symétriques) disparaissent à la fois en une coïncidence multiple avec L_1; les autres mouvements périodiques correspondants d'espèce supérieure auront déjà disparu puisque les images successives d'un rayon quelconque sont situées en sens angulaire entre leurs deux points extrêmes.

On voit donc que dans le cas σ' (ou σ'')$=2\pi l_1/k_1$ tous les mouvements périodiques primaires, symétriques ou non symétriques, avec le rapport *caractéristique l_1/k_1 viennent à coïncider avec L_1 (ou avec L_2), et puis disparaissent, tandis que les mouvements périodiques d'espèce supérieure auront déjà disparu.*

Au moment de coïncidence les points de L_1 (ou L_2) qui se trouvent sur une axe de symétrie $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$, et toutes leures images par T, T^2,...., T^{k_1-1} sont des points fixes de la transformation T^{k_1}.

10. - Sur l'existence des mouvements périodiques d'espèces arbitrairement élévées.

On peut se demander si les mouvements périodiques symétriques de la $s^{\text{ième}}$ espèce existent pour s quelconque.

Si la condition nécessaire, $\sigma' > 2\pi l_1/k_1 > \sigma''$, se trouve satisfaite, il existera toujours pour $\mu \neq 0$ des mouvements périodiques symétriques avec des entiers caractéristiques sk_1, sl_1 où s est arbitrairement grand.

En effet supposons que le cas contraire ait lieu. Il existera alors en particulier un nombre fini de croisements de la suite $T(\alpha\beta)$, $T^2(\alpha\beta)$,...., avec $\alpha\beta$, dont les entiers caractéristiques correspondants seront de la forme sk_1, sl_1. Donc on peut trouver des équimultiples k et l des entiers k_1 et l_1 tels que T^k laisse invariants tous ces points. Toutes les images successives de $\alpha\beta$ par T^k et ses puissances couperaient $\alpha\beta$ ($\theta = 2l\pi$) en ces points et en ces points seulement. Considérons maintenant le point de croisement P de $\alpha\beta$ qui est le plus près de α. Il devrait être transformé en le point de $T^k(\alpha\beta)$ le plus près de $\alpha^{(k)}$. Mais le premier point de rencontre sur $T^k(\alpha\beta)$ doit être transformé en le dernier point sur $\alpha\beta$, puisque $T^k(\alpha\beta)$ est tournée vers la droite de la direction radiale. Donc il faut qu'il y ait un seul point de croisement, P. Évidemment le point P doit être primaire, et toutes les images de $\alpha\beta$ par T^k, T^{2k},...., ne se couperont qu'en P

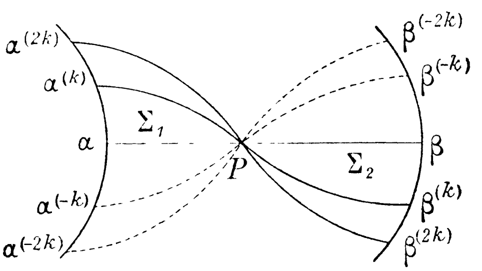

Fig. 12.

(voir la fig. 12). Nous voyons donc que la région Σ_1 formé par $\alpha P\alpha^{(k)}$ et par toutes ses images, soit par T^k, soit par T^{-k} est une région ouverte, symétrique par rapport à $\alpha\beta$, qui est tout à fait distincte de la région analogue Σ_2 formée par $\beta P\beta^{(k)}$ et par ses images. Nous regardons ici la surface annulaire S_2 comme une surface de RIEMANN d'un nombre infini de feuillets.

S'il n'existait même pas des points *congruents* à l'intérieur de Σ_1 et de Σ_2 respectivement, on obtiendrait une conclusion impossible. En effet Σ_1 et Σ_2 formeraient alors deux régions distinctes de S_2 qui seraient invariantes par T^k. Cela contredirait l'hypothèse de transitivité.

Mais pour démontrer que de tels points congruents ne peuvent pas exister, il suffit de démontrer que, dans le voisinage de n'importe quel point intérieur de Σ_1, il doit exister des points dont la coordonnée θ croisse jusqu'à une valeur arbitrairement grande et positive avec l'itération répétée de T^k; et qu'en même temps la propriété analogue subsiste pour tous les points de Σ_2, c'est-à-dire qu'il existe des points voisins dont la coordonnée θ décroisse jusqu'à une valeur arbitrairement grande et négative.

En effet soit P un tel point (ϱ, θ) de Σ_1 dont le point congruent $(\varrho, \theta+2\lambda\pi)$ appartient à Σ_2. Si la propriété susdite a lieu, on pourrait trouver dans le voisinage immédiat de (ϱ, θ) une petite région de Σ_1 qui après j itérations de T^k se trouve au-dessus de l'axe des θ, en même temps que la petite région congruente de Σ_2 se trouve au-dessous de cette axe après l itérations de T^k. Mais une région de Σ_1 au-dessus de l'axe des θ et une région de Σ_2 au-dessous de cette axe y restent après la répétition indefinie de T^k, comme le montre la figure. Donc cette conclusion est absurde.

Il ne reste donc qu'à démontrer la propriété susdite pour voir que le résultat énoncé doit être vrai. Si cette propriété n'a pas lieu nous pourrions trouver un petit voisinage σ dans Σ_1 dont toutes les images par T^k restent bornées en θ supérieurement. Mais un tel voisinage se trouve finalement transformé au-dessus de la ligne $\theta=0$. Donc toutes les images de σ sauf un nombre fini se trouvent dans une région $0 \leqq \theta \leqq 2m\pi$. De plus elles n'ont pas de point commun. Mais les intégrales invariantes de toutes ces régions sont égales, et en même temps l'intégrale totale est finie, ce qui est impossible. Par conséquent les images ne peuvent pas être bornées supérieurement en θ.

11. - Sur l'existence d'autres mouvements périodiques.

À tout mouvement périodique non symétrique correspond toujours un mouvement périodique de position symétrique par rapport à l'axe des θ. Ces deux mouvements sont parcourus en ordre inverse du temps τ. Cela signifie que si P est un point périodique de S_2 qui ne se trouve ni sur $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$, ni sur une de leurs images par T, le point $R(P)$ aura la même propriété aussi. En effet si $T^k(P)=P$ on aura $RT^k(P)=R(P)$ donc $T^{-k}(RP)=RP$. Ces deux mouvements associés sont les mêmes à tous les égards, en tenant compte de l'inversion de l'ordre du temps. Par exemple leurs indices et leurs entiers caractéristiques sont les mêmes.

Si, quand μ varie, deux mouvements périodiques (non symétriques) coïncident en un mouvement non symétrique multiple il y a en même temps deux mouvements associés (non symétriques) qui coïncident avec le mouvement associé multiple. Il pourrait arriver aussi que deux mouvements [8] non symétriques coïncideraient l'un avec l'autre en un mouvement symétrique.

---

[8] Nous considérons comme auparavant le cas type le plus simple.

Dans la première partie nous avons déjà vu qu'il existe probablement, pour C assez grand et μ petit, des mouvements périodiques non symétriques qui pour $\mu=0$ se réduisent à des mouvements périodiques non symétriques. Nous voulons montrer maintenant pourquoi des mouvements périodiques non symétriques d'une toute autre nature doivent exister, et cela d'une façon très variée quelque soit $\mu \neq 0$.

Nous allons raisonner en nous appuyant sur la propriété suivante des branches asymptotiques des points périodiques, que j'ai démontrée dans mon Mémoire Pontifical: dans le cas transitif toute branche asymptotique α ou ω (9) non double d'un point hyperbolique doit être partout dense dans S_2 et coupera toutes les autres branches non doubles ω ou α respectivement un nombre infini de fois (10).

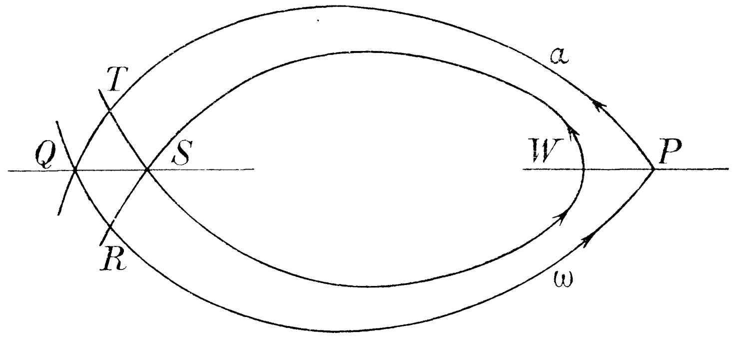

Fig. 13.

Èvidemment deux branches α ou deux branches ω ne peuvent avoir aucun point commun.

Selon ce qui précède il y a des points périodiques symétriques de T^k pour k et l convenablement choisis qui possèdent des indices zéro ou négatifs puisque l'indice total pour chaque k et l est toujours nul. Ces points seront du type hyperbolique avec des branches asymptotiques qui sont analytiques ou hypercontinues (11). Soit P un tel point périodique symétrique. À cause de la symétrie ses branches seront symétriquement disposées par rapport à l'axe des θ, si P se trouve sur $\alpha\beta$ par exemple.

Supposons en premier lieu qu'au moins un des deux couples de branches symétriques adjacentes à l'axe de symétrie ne soit pas double; ils ne peuvent pas se réduire à une seule branche dans le cas transitif. Ces deux branches doivent

---

(9) C'est-à-dire qui tend vers le point quand le temps décroit ou croît respectivement.

(10) Pour le démontrer j'ai employé non seulement l'hypothèse de la transitivité mais aussi l'hypothèse qu'il existe au moins un point périodique stable non dégénère. Pour $\sigma'/2\pi$ et $\sigma''/2\pi$ irrationel L_1 et L_2 sont de tels mouvements stables dans le problème restreint des trois corps.

(11) Voir III, sections 27-42.

se couper de la façon susdite. En suivant les deux branches adjacentes à l'axe des θ symétriquement on obtiendra un premier point d'intersection Q et un laçet correspondant $Pa Q\omega P$ (voir la fig. 13). Le point Q sera un point « homocline » qui tend vers P quand le temps croît ou décroît. Ces branches doivent se couper en Q avec un contact d'ordre au moins un et impair.

On voit ainsi qu'il existe des mouvements symétriques homoclines à tout mouvement périodique symétrique du type hyperbolique qui n'admet pas de branche double.

Remarquons en passant que dans le cas d'un mouvement périodique symétrique du type stable non dégénère il doit aussi exister des mouvements symétriques voisins qui sont homoclines à ce mouvement. En effet il existera dans ce cas des ensembles a et ω connexes au point fixe, dont les points vont approcher au point fixe en tournant en des sens opposés autour du point fixe un nombre infini de fois (voir la fig. 14). Ces deux ensembles seront symétriquement disposés et doivent se couper dans le voisinage du point P sur l'axe de symétrie en un nombre infini de points.

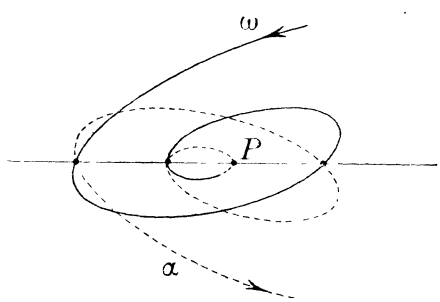

Fig. 14.

Donc il existe aussi un nombre infini de mouvements homoclines symétriques dans le voisinage immédiat de tout mouvement périodique du type symétrique elliptique non-dégénère.

Les deux cas exclus, à savoir le mouvement hyperbolique avec des branches doubles et le mouvement elliptique dégénère, ne peuvent pas se présenter dans des problèmes tels que le problème restreint des trois corps, à moins qu'un nombre infini de conditions analytiques ne soient satisfaites.

Selon mon Mémoire on peut construire (voir la fig. 13) une bande, remplie par des courbes invariantes régulières (mais non analytiques en général) dans le voisinage, dont $Pa Q\omega P$ forme une partie du bord et une des courbes invariantes SWS en forme l'autre partie. Une telle courbe invariante se coupe le long d'une diagonale curviligne QS du quadrilatère curviligne $QRST$.

Une première propriété est qu'il y a le long de cette diagonale QS un nombre infini de points périodiques dont le $k^{\text{ième}}$ ($k=\varkappa, \varkappa+1, \ldots.$) circule autour de la bande après k itérations de T avant de revenir au point de QS. Selon la méthode employée dans mon Mémoire on peut construire une bande symétrique par rapport à $\theta=0$ à cause de la symétrie de T, donc telle que la ligne diagonale devient un segment de l'axe $\theta=\pi$ par exemple. Donc:

Dans le voisinage immédiat d'un tel couple des a et ω branches qui s'étendent jusqu'à un mouvement homocline symétrique, il existe un nombre *infini d'autres mouvements périodiques symétriques qui circulent k fois ($k \geqq \varkappa$ arbitraire) dans le voisinage en coupant S_2 k fois avant de rentrer.*

Une propriété plus générale est qu'étant donnée une suite arbitraire d'entiers k, l, m,.... il existe un point périodique de $QRST$ qui circule successivement autour de la bande dans le même voisinage tout en rentrant dans $QRST$ après k itérations, après l itérations,.... Pour tout mouvement symétrique de cette espèce la suite correspondante devrait être symétrique, par exemple de la forme

$$klm.... q \cdot q.... mlk.$$

Donc, *en choisissant une suite d'entiers qui ne soit pas de ce type symétrique* on obtient nécessairement des mouvements périodiques qui ne sont pas symétriques par rapport à $\theta=0(\alpha\beta)$ ou à $\theta=\pi(\gamma\delta)$.

Je dis de plus que si la bande est suffisament étroite ce mouvement ne peut être non plus symétrique par rapport à $\alpha'\beta'$ ou $\gamma'\delta'$. En effet $\alpha'\beta'$ et $\gamma'\delta'$ traverseront les bords PaQ, $Q\omega P$ de la bande un nombre fini de fois en des points qui sont différents de Q et des images de Q. Autrement une image de Q se trouverait sur $\alpha'\beta'$ ou $\gamma'\delta'$ et cette image posséderait deux points symétriques parmi ses images et serait donc elle-même périodique symétrique; mais Q est un point homocline. Ainsi les images des points voisins de $\alpha'\beta'$ ou $\gamma'\delta'$ ne sont pas toutes à l'intérieur d'un tel ruban.

Il est visible donc qu'à toute suite k, l, m,...., r ($\geqq \varkappa$) il correspondra au moins un mouvement périodique dans le même voisinage étendu du mouvement périodique symétrique hyperbolique considéré, et qu'en prenant $\varkappa$ assez grand, un tel mouvement voisin ne sera pas symétrique si la suite des entiers choisie ne jouit pas d'une symétrie d'un des types suivants:

$$klm.... qq.... mlk \quad \text{ou} \quad klm.... 2q.... mlk.$$

Le mouvement périodique rattaché à la suite $klm.... r$ correspond à une trajectoire qui circule dans ce voisinage étendu en revenant à $QRST$ après k intersections de la surface de section S_2, puis après l intersections, et ainsi de suite.

L'application d'une modification du dernier théorème de géométrie de POINCARÉ nous permet aussi d'établir des faits analogues dans le voisinage d'un mouvement périodique elliptique non dégénère ([12]):

Il existe un nombre infini de mouvements périodiques symétriques dans le voisinage ordinaire de tout mouvement périodique symétrique du type elliptique non dégénère.

Revenons maintenant à la question de l'existence des mouvements périodiques

([12]) Voir mon article: *A New Criterion of Stability*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, t. VI, Bologna (1928).

non symétriques. Il reste une seule possibilité qu'il n'existe pas de tels mouvements périodiques, à savoir celle où le point hyperbolique symétrique considéré a seulement des branches doubles adjacentes à l'axe symétrie. Mais dans ce cas ces branches doubles se termineront en d'autres points qui sont également des points fixes de T^k. Si ces points ne sont pas du type symétrique, nous aurions trouvé deux mouvements non symétriques. Nous pouvons donc admettre que ces nouveaux points fixes de T^k sont symétriques, et ensuite déduire analoguement que chacun de ces points doit admettre au moins une autre branche double. En continuant ainsi il faut terminer ce procédé en revenant au point périodique donné puisque le nombre des points fixes de T^k est fini. Mais cela est impossible, puisque en un tel cas l'ensemble des branches doubles diviserait S en des parties invariantes; je suppose comme toujours qu'il y a la transitivité ordinaire.

Par conséquent le nombre des mouvements périodiques non symétriques est certainement infini, l'entier k étant arbitrairement grand.

12. - Les mouvements récurrents symétriques et non symétriques.

Prenons maintenant un point quelconque de S_2. Selon toute probabilité (dans le sens de la mesure de LEBESGUE) les ensembles fermés de ses points limites α et ω remplissent en général toute la surface S_2. Pour les autres points « spéciaux » tels que les points périodiques, au moins un des deux ensembles limites constitue seulement une partie de S_2. Si le point choisi se trouve sur un axe de symétrie tel que $\alpha\beta$, les points limites α et les points limites ω jouissent de la symétrie par rapport à cet axe.

Chaque ensemble limite α ou ω (symétrique ou non) doit contenir des ensembles limites récurrents, jouissant des propriétés suivantes: tout point d'un tel ensemble parcourt *tout* l'ensemble récurrent jusqu'à une distance ε pendant un nombre N_ε d'itérations de T ou de T^{-1}, où l'entier N_ε ne dépend pas du point choisi ([13]).

Si un mouvement symétrique est récurrent, il est évident que ses deux ensembles limites, étant identiques, sont aussi symétriques. Mais il ne s'ensuit pas que tout ensemble récurrent symétrique doive contenir un point d'un axe de symétrie.

Nous allons voir combien est compliquée et variée la hiérarchie des mouvements récurrents symétriques et non symétriques. L'importance des mouvements récurrents consiste en ce qu'il y a des ensembles récurrents parmi les ensembles limites α et ω d'un mouvement non récurrent quelconque, et ce mouvement, quand le temps croît ou décroît, peut être regardé comme formé d'une série d'approchements de plus en plus étroits à tous ces ensembles récurrents limites ω ou α, joints à des éloignements correspondants.

([13]) Voir V, Chapitre VII.

Considérons donc le même voisinage étendu d'un point P qui correspond a un mouvement périodique hyperbolique avec des branches non doubles PaQ, $P\omega Q$ (voir la section précédente). À toute suite doublement infinie d'entiers ($\geqq \varkappa$) ....$jklm$.... il correspondra un ensemble fermé de points de $QRST$ (voir la fig. 13 au-dessus) contenant au moins un point, qui circulent successivement autour de la bande après k, l, m,.... itérations de T^{-1} et après j, i,.... itérations de T.

Appelons une telle suite d'entiers, «récurrente» si toute suite partielle finie de s entiers qui s'y trouve, s'y trouve au moins une fois dans toute suite partielle finie de longueur N_s.

Voici une manière assez générale de construire de telles suites d'entiers récurrentes ([14]). Choisissons une fonction continue et périodique $f(u_1,...., u_p)$ en les variables $u_1,...., u_p$, qui est réelle avec des périodes 2π en ces variables et telle que $1 \leqq f \leqq m+1$. Considérons la suite infinie d'entiers φ_n qui est définie par

$$\varphi_n = [f(\lambda_1 n, \lambda_2 n, ..., \lambda_p n)]$$

où le symbole $[r]$ indique le plus grand entier qui n'est pas supérieur à r, et où $\lambda_1,...., \lambda_p$ sont des constantes incommensurables avec 2π et sans relation linéaire de commensurabilité.

Quand on remplace x dans la fonction $f(\lambda_1 x,...., \lambda_p x)$ par $x+$un entier, on obtient une fonction analogue. Evidemment les fonctions ainsi obtenues sont en nombre infini, et auront pour fonctions limites toutes les fonctions

$$f(\lambda_1(x+c_1), \lambda_2(x+c_2),...., \lambda_p(x+c_p))$$

où $c_1,...., c_p$ sont arbitraires. Nous allons supposer de plus que $f(u_1,...., u_p)$ n'admette aucun entier comme maximum ou minimum relatif. Dans ce cas on voit que toute suite d'entiers qui se trouve dans la suite

$$[f(\lambda_1(n+c_1),...., \lambda_p(n+c_p))]$$

doit reparaître uniformément, tandis que si cette condition n'est pas satisfaite, cela ne doit pas être vrai, par exemple la suite définie par la fonction

$$f(u_1) = 2 - \sin^2 u_1$$

avec $\lambda_1 = 1$ est ....1, 1, 2, 1, 1,.... et contiendra 2 une seule fois.

Plus généralement, si l'on choisit une fonction $f(n)$ uniformément continue et presque périodique d'une seule variable qui ne contient aucune période rationelle

---

([14]) Voir mon Livre V, Chapitre VII. MORSE a construit un intéressant ensemble récurrent spécial d'entiers en employant une méthode entièrement différente de la nôtre. Voir son Mémoire: *Recurrent Geodesics on a Surface of Negative Curvature*, Transactions of the American Mathematical Society, t. 22 (1921).

et dont aucune fonction limite n'admette un entier comme maximum ou minimum relatif dans un sens analogue, la suite $[f(n)]$ sera récurrente.

De telles suites récurrentes ne peuvent être purement périodiques que dans le cas banal où l'on a

$$e < f(n) < e + 1$$

(*e étant un entier*).

En effet supposons que la borne supérieure de f soit $\bar{f}$, et posons $e = [\bar{f}]$, où $e \neq \bar{f}$ par suite de la condition imposée. Mais si la suite $[f(n)]$ est périodique de période p on aura $[f(p+n)] = [f(n)]$ pour n quelconque. En laissant tendre n_i convenablement vers l'infini nous obtenons

$$\lim f(n_i + x) = f^*(x)$$

où $f^*(x)$ est une fonction limite telle que $f^*(0) = \bar{f}$. En prenant $n = n_1, n_2, \ldots$ dans l'équation fonctionelle de périodicité satisfaite par $[f(n)]$, nous concluons que $[f^*(p)] = e$ et ainsi $e \leqq f^*(p) \leqq \bar{f}$. Mais si p est une période de $f(n)$, λp en est une aussi. Il faut donc que pour tout entier λ on ait $e \leqq f^*(\lambda p) \leqq \bar{f}$, donc $e \leqq f(x) \leqq \bar{f}$.

D'autre part en considérant la borne inférieure $\bar{f}'$ de f, et en posant $e' = [\bar{f}']$ où $e' \neq \bar{f}'$, nous obtenons analoguement $\bar{f}' \leqq f(x) \leqq e' + 1$.

En comparant ces deux résultats il est clair qu'on doit avoir $e' = e$, et ainsi

$$e < \bar{f}' \leqq f(x) \leqq \bar{f} < e + 1,$$

où e est un entier. Cela complète nôtre démonstration.

Comme exemple très simple d'une suite récurrente mentionnons la suite définie par

$$\left[\frac{5}{4} + \sin^2 n\right] \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

où la fonction f employée satisfait à la condition susdite. Cette suite récurrente avec des valeurs 1 et 2 n'est pas périodique.

Ce qui nous intéresse dans une telle suite est l'ensemble des suites limites qu'on peut en former. Tous les membres de cet ensemble récurrent servent également pour le définir. Par conséquent si toute suite partielle qui s'y trouve, s'y trouve aussi en ordre inverse, la suite inverse définit le même ensemble récurrent que la suite donnée. Dans ce cas il est bien naturel de dire que la suite donnée est « réversible », et dans le cas contraire « irréversible ».

Il peut arriver aussi que la suite donnée contient des suites arbitrairement longues qui soient symétriques. Dans ce cas il existera au moins une suite limite qui est actuellement symétrique mais qui sert aussi bien que la suite donnée pour définir l'ensemble récurrent. Dans ce cas nous dirons que l'ensemble récurrent des suites est « symétrique ». S'il existe k suites limites symétriques nous disons que l'ensemble est k fois symétrique. Nous allons voir prochainement comment on peut obtenir des ensembles récurrents de suites qui sont symétriques deux ou même plusieurs fois. Il est bien probable qu'un ensemble récurrent pourrait être symétrique un nombre infini de fois.

Notre manière de construire les suites récurrentes moyennant des fonctions périodiques ou presque périodiques ne nous donne que des suites « presque périodiques » en un nombre fini ou même un nombre infini de périodes. L'exemple de MORSE est d'un tout autre caractère ([15]). Il serait extrêmement intéressant d'obtenir d'autres suites récurrentes essentiellement non périodiques.

Après ces remarques sur les suites récurrentes, étudions de plus près les mouvements récurrents dans le voisinage étendu d'un tel mouvement périodique symétrique.

En premier lieu si l'ensemble récurrent de la suite que nous choisissons n'est pas réversible, il est évident que l'ensemble de mouvements ne peut pas coincider avec l'ensemble symétrique. D'autre part si un ensemble récurrent contient même un seul mouvement symétrique, l'ensemble doit être symétrique. En effet les ensembles α et ω d'un mouvement récurrent doivent coïncider avec l'ensemble lui-même.

Mais nous ne pouvons pas dire qu'un ensemble récurrent rattaché à un ensemble de suites réversibles doit coïncider avec son image symétrique. Ce qui est certain est que si l'ensemble en position symétrique ne coïncide pas avec l'ensemble donné, il correspondra au même ensemble de suites. De la même manière si l'ensemble de suites est symétrique et ainsi réversible, nous ne pouvons non plus le dire. Il est vrai qu'on sait ici qu'il existe des points de l'ensemble qui correspondent précisément aux différentes suites symétriques, mais rien ne semble nécessiter qu'ils correspondent à un point de l'axe de symétrie. Quand un des points de l'axe de symétrie correspond à une telle suite, l'ensemble récurrent donné sera évidemment symétrique.

Il peut bien arriver que la suite récurrente choisie admette deux ou même plusieurs symétries. Considérons ainsi la suite $[\varphi(n)]$ où $\varphi(n)$ est définie par l'équation suivante,

$$\varphi(n) = \frac{3}{2} + \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right) + \sin^2 \sqrt{2}\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

([15]) Voir ([14]). En effet sa méthode de définir la suite récurrente $f(n)$ peut être remplacée par les équations explicites suivantes,

$$f(n) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{g(n)} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$g(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right] \ldots,$$

avec $f(-n) = f(n-1)$. Donc $f(n)$ se réduit à 1 ou 2 selon que l'expression de n en une somme binaire contient un nombre pair ou impair de puissances de 2.

par exemple, où $[\varphi(n)]$ ne prend que les valeurs 1, 2, 3. Cette suite sera symétrique par rapport à $n=0$, 1. Mais les fonctions limites de $\varphi(n)$ sont les fonctions

$$\frac{3}{2}+\sin^2\left(n+c_1-\frac{1}{2}\right)+\sin^2\left(\sqrt{2}\, n+c_2-\frac{1}{2}\right).$$

Par conséquent il y a quatre types différents de symétrie, à savoir pour $c_1=0, \frac{\pi}{2}$ et $c_2=0, \frac{\pi}{2}$. En partant des fonctions analogues plus générales on peut obtenir des suites récurrentes qui admettent un nombre arbitraire de symétries de cette espèce.

Pour arriver à un résultat suffisament général je vais introduire ici l'idée d'un ensemble Σ récurrent de mouvements (voir IV, chapitre 5). Ces ensembles sont d'une importance théorique capitale. Nous définissons un tel ensemble pour le cas non périodique de la manière suivante. Etant donné un ensemble récurrent quelconque de points R, l'ensemble Σ récurrent correspondant contiendra R aussi bien que tout autre point connexe à l'ensemble R par des ensembles fermés connexes qui ne contiennent aucun point α ou ω asymptotique à un point hyperbolique particulier. On peut démontrer que l'ensemble Σ récurrent ainsi obtenu est fermé, et que ses éléments fermés connexes sont transformés entre eux par T et fonctionnent comme une espèce de points à presque tous les égards. Pour cette raison, nous les appelons Σ points. Quoiqu'un ensemble Σ récurrent puisse contenir plusieurs ensembles récurrents, tous les points d'un seul Σ point ne sont guère à distinguer topologiquement entre eux.

Nous pouvons maintenant faire la démonstration des résultats suivants:

À toute suite récurrente irréversible d'entiers ($\geqq \varkappa$) *correspondra toujours au moins un mouvement récurrent dans le voisinage étendu choisi du point hyperbolique. Aucun mouvement de l'ensemble récurrent irréversible correspondant ne peut être symétrique dans ce cas.*

À toute suite récurrente réversible correspondra ou un mouvement récurrent d'un ensemble récurrent symétrique de mouvements ou deux mouvements récurrents en position relative symétrique.

À toute suite récurrente symétrique correspondra un mouvement symétrique qui est soit un mouvement d'un ensemble Σ récurrent symétrique soit homocline à un tel ensemble soit hétérocline à deux ensembles Σ récurrents en position relative symétrique. De plus, le même ensemble Σ récurrent symétrique ou le même couple de tels ensembles en position relative symétrique donnent des mouvements symétriques homoclines ou hétéroclines appartenant à toutes les suites symétriques possibles.

En effet j'ai montré dans mon Mémoire pourquoi il doit exister toujours des points de $QRST$ (voir la figure 13 au-dessus) qui correspondent à une suite arbitraire d'entiers. Les ensembles limites α ou ω sont rattachés au mêmes ensembles des suites limites. Parmi les points limites il existera au moins un point récurrent et parmi les points limites de ce point il existera un point récurrent avec la suite récurrente donnée. Après ce que nous avons déjà dit, on voit que les deux premiers résultats énoncés sont évidents.

Pour démontrer le troisième résultat il faut reprendre les raisonnements de mon Mémoire. Choisissons une demi-suite k, l, m,.... quelconque de l'ensemble récurrent donné; à cette suite il correspondra nécessairement un ensemble connexe fermé, D, qui s'étend de QR à ST et qui reste dans le voisinage étendu donné pendant la répétition indéfinie de T^{-l}, tel que tout point de cet ensemble rentre dans le quadrilatère $QRST$ après k itérations de T^{-l}, puis après l itérations, et ainsi de suite (voir la fig. 15). Il existe aussi des ensembles analogues C qui s'étendent de QT à RS (voir les traits pointillés de la fig. 15) et qui correspondent à une demi-suite ....i, j quelconque de l'ensemble donné.

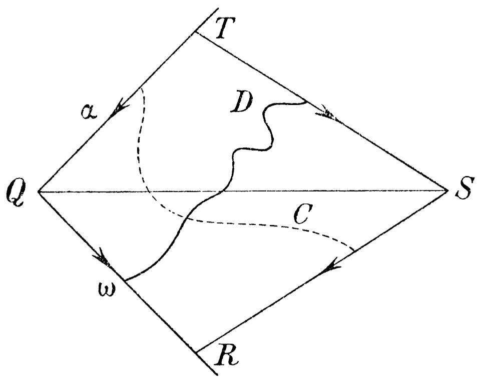

Fig. 15.

Supposons maintenant qu'en partant d'un tel ensemble C connexe qui s'étend de QT à RS et qui est rattaché à la demi-suite ....i, j nous faisons la transformation par T^{-k} où ....j, k est la demi-suite obtenue en ajoutant l'entier k à droite. Par le même procédé que j'ai employé, on voit que l'ensemble $T^{-k}(C)$ contiendra au moins une partie fermée connexe qui s'étend de QT à RS et qui correspond à cette demi-suite étendue. Cet ensemble se trouve donc parmi les ensembles qui correspondent à cette demi-suite. Mais il aura la propriété que son image par T^k se trouve à l'intérieur d'un ensemble rattaché à ....i, j.

En ajoutant des entiers successifs admissibles à la demi-suite et en passant à la limite, on obtient au moins un ensemble fermé connexe analogue dont la suite rattachée appartient à l'ensemble récurrent donné, qui est tel que toutes ses images en $QRST$ se trouvent sur ces ensembles fermés connexes qui s'étendent de QT à RS. Il est à remarquer que l'ensemble limite d'une série d'ensembles fermés connexes associés à de telles demi-suites, qui tendent vers une demi-suite limite, doit contenir au moins un ensemble limite qui correspond à la demi-suite limite.

Si l'on fait les transformations T^j, T^i,.... d'un de ces ensembles fermés connexes correspondant à la demi-suite ....i, j, les ensembles successifs se trouveront toujours à l'intérieur d'un de ces ensembles fermés connexes de la même espèce. En passant à la limite on voit donc qu'il y a au moins un point récurrent L qui se trouve dans un tel ensemble.

Considérons l'ensemble fermé connexe correspondant λ aussi bien que tous les autres ensembles fermés connexes de la même espèce qui contiennent un point du même ensemble Σ récurrent. Ainsi se trouve défini des ensembles avec des propriétés intéressantes. En particulier ils sont transformés entre eux de la manière suivante. Un ensemble avec la demi-suite ....i, j associée est toujours transformé par T^j en une partie d'un tel ensemble analogue associé à ....h, i; le même ensemble sera transformé par T^{-k} (k étant admissible), en un ensemble ou même en plusieurs ensembles complets correspondant à la demi-suite ....i, j, k. De plus il existera évidemment au moins un tel ensemble fermé connexe correspondant à une demi-suite donnée, par exemple à une telle suite quelconque qui constitue la moitié d'une suite récurrente symétrique donnée. Soit λ un tel ensemble.

Mais il y a évidemment une symétrie géometrique complète des deux espèces de ces ensembles fermés connexes. À cause de ceci il existera un ensemble analogue λ' en position symétrique.

Il est évident que ces deux ensembles λ et λ' ont au moins un point M de l'axe de symétrie en commun et que ce point correspondra à une suite symétrique ....l, k, k, l,.... où k, l,.... est la demi-suite d'une suite récurrente symétrique quelconque.

Supposons en premier lieu que les ensembles Σ récurrents définis par λ et λ' coïncident. Cet ensemble est symétrique. De plus le point symétrique M appartient à cet ensemble ou bien il en constitue un point homocline. En effet faisons les transformations successives T^k, T^l,.... de λ. Les ensembles transformés successifs se trouvent complètement à l'intérieur d'un ensemble fermé connexe de la même espèce. Si l'on pouvait démontrer que ces images tendent uniformément vers l'ensemble Σ récurrent, la démonstration serait complète puisque les images successives de M se trouvent dans les ensembles transformés. Mais dans le cas contraire en passant à la limite on trouverait des ensembles fermés connexes qui contiendraient un point de l'ensemble Σ récurrent *et d'autres points*. Mais tous les points d'un tel ensemble correspondent à une seule suite limite ....i, j, k,.... et l'ensemble reste dans $QRST$ quand il est transformé successivement par T^{-k}, T^{-l},.... ou par T^j, T^i,.... Un tel ensemble ne peut contenir aucun point α ou ω asymptotique à un point périodique, parce que la suite correspondante ne contient aucune suite limite périodique. *Par définition même des ensembles Σ récurrents* il résulte que de tels points ne peuvent pas exister, ce qui complète notre démonstration dans ce cas. Les modifications nécessaires pour traiter l'autre cas sont évidentes.

Remarquons ici qu'une analyse analogue peut nous donner des renseignements précieux concernant les branches α et ω asymptotiques de tels ensembles Σ récurrents dans le même voisinage étendu d'un mouvement hyperbolique symétrique.

Remarquons aussi qu'au lieu de commencer avec un seul mouvement périodique hyperbolique symétrique et un mouvement homocline corres-

pondant qu'y est rattaché, on aurait pu employer deux mouvements hyperboliques non symétriques mais en position relative symétrique et formant un cycle de deux éléments; on aurait pu même employer des cycles symétriques plus compliqués.

13. - Sur la totalité des mouvements symétriques.

Avant de passer à la considération des mouvements plus généraux, il est intéressant de considérer la distribution des points périodiques d'une ligne de symétrie telle que $\alpha\beta$.

L'ensemble E des points périodiques d'une ligne de symétrie de S_2 *qui ne sont ni hyperboliques avec branches doubles ni elliptiques dégénères est dense en lui-même de tous les deux côtés. Donc l'ensemble complémentaire de son ensemble dérivé* E' *est formé par des intervalles ouverts (s'il y en a) dont les bouts ne sont pas périodiques sauf peut-être des types spéciaux mentionnés..*

En effet considérons un point périodique hyperbolique P de $\alpha\beta$ et un lacet homocline symétrique correspondant. Si l'on considère les images successives d'un point W de $\alpha\beta$ près de P, par T et par T^{-1}, deux de ces images, disons les $k^{\text{ièmes}}$, entrent les premières dans $QRST$. En faisant tendre W vers P il résulte que k croîtra indéfiniment. Donc il y a des instants où les deux $k^{\text{ièmes}}$ images traversent la ligne diagonale QS et coïncident. À un tel instant le point W correspondant est près de P pour k grand, et périodique symétrique.

Pour un point elliptique non-dégénère il y a toujours des points périodiques symétriques voisins comme nous l'avons remarqué.

Il est évident que les points homoclines à un tel mouvement périodique hyperbolique symétrique ou hétéroclines à deux tels mouvements périodiques en position symétrique sont partout denses dans E mais ne peuvent pas appartenir aux intervalles ouverts ou même former une de leurs extrémités.

Démontrons aussi le fait suivant:

Soient k_1, l_1 *des entiers sans facteur commun tels que* $\sigma' > 2\pi l_1/k_1 > \sigma''$. *L'ensemble des points périodiques de la ligne de symétrie considérée pour lesquels le rapport caractéristique a la valeur donnée* $l/k = l_1/k_1$ *est aussi dense partout dans E.*

En effet il y a dans le voisinage d'un point de E, deux points A, B qui sont homoclines à un mouvement hyperbolique choisi. Considérons la région limitée par l'arc ω asymptotique (par exemple) et par le segment AB de la ligne de symétrie (voir la fig. 16). Avec l'itération de T cet arc tend vers le point périodique hyperbolique P tandis que l'aire de la région reste invariante.

Le segment AB de la ligne de symétrie doit être coupé en des points Q', Q'',.... par toute autre branche ω asymptotique (non double); autrement une telle branche n'entrerait pas ou dans la région ou dans son extérieur. Il ne faut pas oublier que deux branches ω asymptotiques n'ont pas de point en commun.

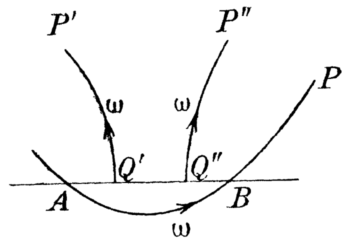

Fig. 16.

Soient maintenant l'/k' et l''/k'' deux rapports caractéristiques pour lesquels $l'/k' < l_1/k_1 < l''/k''$, rattachés aux points périodiques hyperboliques; nous avons déjà démontré qu'il existe toujours de tels entiers caractéristiques. Soient $P'\omega Q'$ et $P''\omega Q''$ deux branches ω asymptotiques correspondantes (voir la fig. 16). Avec l'itération de T, Q' tend vers P' tandis que la coordonnée θ croît avec la vitesse moyenne limite $2\pi l'/k'$. La vitesse correspondante de Q'' est $2\pi l''/k''$. Donc pour p assez grand, la $p^{\text{ième}}$ image doit couper la ligne de symétrie avec $\theta = 2pl\pi/k$.

Un tel point d'intersection est évidemment périodique symétrique avec rapport caractéristique l_1/k_1.

14. - **Sur les ensembles Σ_Q.**

Choisissons un point Q quelconque et définissons Σ_Q comme l'ensemble des points qu'on puisse joindre à Q par des ensembles fermés connexes qui ne sont pas traversés par la branche α asymptotique ou par la branche ω asymptotique choisie ([16]). J'ai démontré (loc. cit.) qu'un tel ensemble Σ_Q, qui contient Q, est toujours fermé et connexe, et ne dépend ni du point Q choisi de Σ_Q ni du point périodique hyperbolique avec lequel on commence. Il y a quatre espèces principales d'ensembles Σ_Q ou « Σ points » que nous classifions selon les branches asymptotiques choisies:

1) les ensembles Σ_Q sans point des branches asymptotiques choisies;

2) les ensembles Σ_Q qui se réduisent à un segment fermé ou à un point d'une de ses branches, mais qui ne contient aucun point de l'autre branche.

3) les points homoclines Q qui appartiennent aux deux branches à la fois;

4) le point périodique hyperbolique P lui-même.

Voici quelques-uns des types simples d'ensembles Σ_Q: les points périodiques hyperboliques sans branche double; les points périodiques elliptiques non dégénères; les points homoclines ou hétéroclines à de tels points; les parties fermés connexes des branches asymptotiques ou des ensembles asymptotiques correspondants qui ne contiennent aucun point homocline ou hétérocline; les ensembles connexes des branches doubles.

Il semble être très difficile de déterminer l'ensemble Σ_Q rattaché à un point périodique elliptique dégénère.

([16]) Voir la définition des ensembles Σ récurrents, section 12.

Un ensemble Σ_Q (Σ point) quelconque est composé des points qu'on ne peut guère séparer les uns des autres par leurs propriétés topologiques. Ces ensembles sont transformés entre eux par la transformation T et jouissent de la continuité supérieure, c'est-à-dire que si P tend vers Q, Σ_P tend vers Σ_Q ou vers une partie de Σ_Q. Il est très probable que dans le problème restreint par exemple on a toujours $\Sigma_Q = Q$ pour $\mu \neq 0, 1$.

Remarquons aussi à cet égard que les points périodiques sont distribués, d'une manière dense, par rapport aux ensembles Σ_Q. Ce fait résulte immédiatement de la définition des Σ_Q.

Si l'on opère aussi avec les ensembles Σ_Q comme nous l'avons fait avec les points, on peut définir les ensembles Σ périodiques, les ensembles Σ récurrents comme auparavant, et ainsi de suite. On obtient ainsi des résultats uniformes dont nous mentionnons par exemple les suivants (voir IV):

a). Pour n'importe quel ensemble Σ récurrent il existe toujours des ensembles asymptotiques α et ω qui se croisent un nombre infini de fois.

b). Les ensembles Σ_Q relatifs aux Σ points sont ces éléments eux-mêmes ($\Sigma_{\Sigma_Q} = \Sigma_Q$), et pour les définir on peut employer un ensemble Σ récurrent quelconque et ses branches asymptotiques.

c). Tout ensemble α ou ω asymptotique rattaché à un ensemble Σ récurrent coupe infiniment souvent tout autre ensemble ω ou α asymptotique rattaché à un tel ensemble.

d). Tout ensemble fermé et Σ connexe qui ne se réduit pas à un seul Σ point contient un nombre infini de Σ points de tout ensemble asymptotique d'un ensemble Σ récurrent quelconque. Les images successives d'un tel ensemble Σ connexe, ou par T ou par T^{-1} sont partout Σ denses.

Remarquons aussi le fait évident dans notre cas particulier:

L'ensemble des points périodiques symétriques est nécessairement Σ dense partout.

Ceci résulte du fait qu'on peut employer deux branches α et ω d'un tel point hyperbolique pour définir les Σ_Q et du fait qu'il existe d'autres mouvements, périodiques symétriques dans le voisinage immédiat de tout point homocline.

Nous concluons aussi que le résultat suivant a lieu:

Les intervalles fermés lacunaires d'une ligne de symétrie (s'il y en a) doivent chacun appartenir à un seul ensemble symétrique Σ_Q; et ces Σ_Q sont tous distincts. Par conséquent un tel intervalle n'admet pas de points homoclines ou hétéroclines même par rapport à des ensembles Σ récurrents.

À cet égard remarquons seulement que si deux intervalles correspondaient au même Σ_Q, cet ensemble symétrique diviserait S_2 en deux ou plusieurs parties invariantes, ce qui contredirait l'hypothèse de transitivité.

15. - Sur la signature.

En partant d'un point P fixe périodique hyperbolique de T^k avec au moins deux branches adjacentes non doubles nous avons obtenu un laçet $PaQ\omega P$ où Q est un point homocline (voir la fig. 13). J'ai appelé la figure formée par l'entrelacement complet de ces deux branches, ou plutôt par une figure topologique équivalente à celle-ci, la « signature » S du système dynamique (voir IV, chapitre V). Pour déterminer cette figure il suffit de connaître l'entrelacement d'une seule branche complète telle que $Pa\infty$ avec l'autre branche partielle $Q\omega P$.

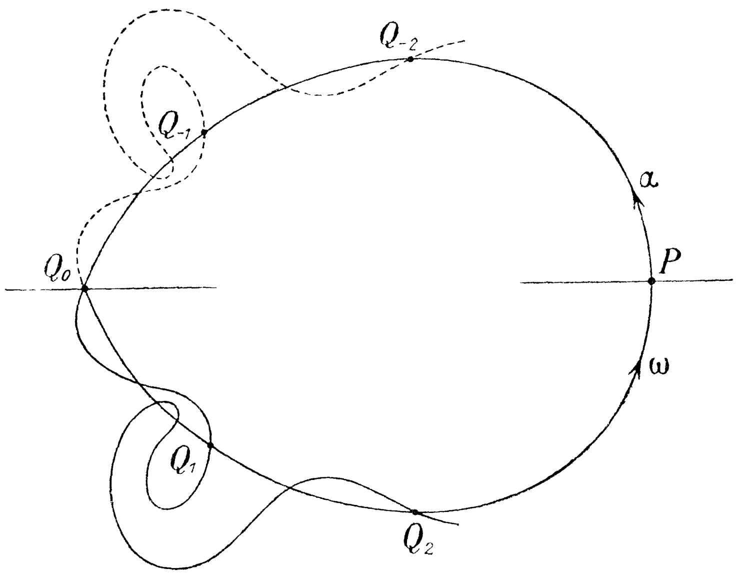

Fig. 17.

En effet, une figure topologique même beaucoup plus simple suffit à caractériser l'entrelacement.

Cet entrelacement détermine complètement les relations topologiques des Σ points entre eux. Puisqu'il est bien probable que dans le cas général les Σ points se réduisent à des points ordinaires, on peut concevoir l'importance fondamentale théorique d'un tel symbole S.

À vrai dire, la signature ainsi obtenue caractérise la transformation T^k $(k>1)$ plutôt que T, puisque T n'admet pas des points fixes hyperboliques dans le cas du problème restreint ([17]). Donc en considérant une telle signature, on ne considère pas précisément le problème restreint. Pour le problème modifié, on remplace

---

([17]) Les deux bords de S_2 fonctionnent comme des Σ points fixes elliptiques de la transformation T.

l'espace S_3 des états de mouvements par un espace $S_3^{(k)}$ obtenu en remplaçant S_3 par une surface de RIEMANN à trois dimensions dans S_3 avec k feuillets dans laquelle L_1 et L_2 sont les deux lignes multiples. On voit qu'une telle signature de T^k ne donne pas de complets renseignements topologiques pour le problème donné.

À cause de la symétrie de T^k on peut choisir un entrelacement qui est symétrique (voir la fig. 17). Examinons un peu ce que cela signifie du point de vue topologique.

Une première manière de donner le symbole est la suivante ([18]). Nous associons les points de l'arc $Q_0 \omega Q_1$ où $Q_1 = T^k(Q)$ aux nombres réels λ entre 0 et 1 d'une manière biunivoque et continue; et nous associons à $Q_{-1} \alpha Q_0$ les nombres μ analoques entre -1 et 0 de façon que pour les points symétriques on ait $\lambda + \mu = 0$.

Puis nous numérotons un point de $Q_1 \omega Q_2$ entre Q_1 et Q_2 qui est le point transformé $T^k(Q_\lambda)$ d'un point Q_λ de $Q_0 \omega Q_1$ en l'associant au nombre $\lambda + 1$; puis nous associons les points $T^{2k}(Q_\lambda)$ de $Q_2 \omega Q_3$ à $\lambda + 2$, et ainsi de suite. Nous pouvons numéroter $Q_{-1} \omega Q_0$, $Q_{-2} \omega Q_{-1}$,.... de la même manière en prenant λ negatif. De cette façon nous associons à la branche asymptotique $P\omega\infty$ les nombres λ entre $-\infty$ et $+\infty$; et nous associons analoguement à $P\alpha\infty$ les nombres μ entre $-\infty$ et $+\infty$ d'une manière symétrique, telle qu'en des points symétriques de $P\alpha\infty$ et $P\omega\infty$ on a toujours $\lambda + \mu = 0$. Donc il y a un couple particulièr (λ, μ) correspondant à tout point homocline.

C'est cet ensemble des couples (λ, μ) qui correspond aux mouvements homoclines, où l'ordre relatif des λ et des μ est seul important, qui détermine la signature $S^{(k)}$ et l'entrelacement des branches asymptotiques ([19]).

Il est évident que si (λ, μ) est un tel couple, $(\lambda + 1, \mu + 1)$ l'est aussi, et il y a d'autres lois analogues.

Remarquons maintenant que dans le cas symétrique les deux systèmes de couples (λ, μ) et $(-\mu, -\lambda)$ sont essentiellement identiques, indépendamment de la méthode de numérotage.

La signature $S^{(k)}$ de T^k dans le cas du problème restreint possède la propriété spéciale de rester essentiellement la même quand on renverse l'ordre des deux paramètres λ et μ avec changement de signe.

Inversement si une telle propriété a lieu pour un système dynamique il jouira certainement d'une symétrie topologique par rapport au Σ points, sinon d'une symétrie analytique.

Comment peut-on utiliser la signature $S^{(k)}$? À vrai dire, la signature nous donne un instrument théorique qui nous permet de répondre à toute question spéciale.

([18]) Voir IV.
([19]) Voir IV.

Par exemple, on peut se demander, s'il existe un point fixe de T^k à l'intérieur du lacet donné $PaQ\omega P$ (voir la fig. 17). En faisant parcourir un point L autour du lacet (même un peu à l'intérieur près de P), son image parcourra l'image $PaQ_1\omega P$, et l'on voit que dans la situation indiquée l'angle du vecteur L est augmenté de 2π. Ce résultat dépend seulement du caractère topologique particulier de $S^{(k)}$. Donc il existera au moins un tel point fixe.

Donnons un autre exemple bien différent. On peut se démander s'il est possible de regarder T^k come le produit de $\varkappa$ facteurs $\overline{T}$ dont chacun a un point fixe au point P. Pour cela il faut évidemment qu'il existe précisément $\varkappa l-1$ couples (λ_i, μ_i) avec $0<\lambda_i, \mu_i<1$. Il faut plus généralement qu'on puisse choisir

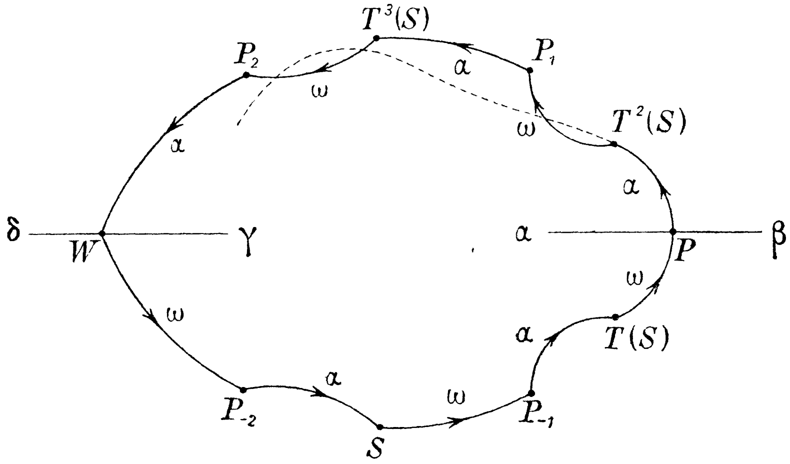

Fig. 18.

les paramètres λ et μ de façon qui si (λ_i, μ_i) est un des couples, le couple $(\lambda_i+1/\varkappa, \mu_i+1/\varkappa)$ en est un autre.

Il faut bien remarquer que nous n'avons considéré que les invariants topologiques du problème restreint dans cette deuxième partie de ce Mémoire. Ceux-ci sont extrèmement nombreux et variés. Mais c'est seulement la signature qui semble nous permettre de dégager tous les invariants topologiques indépendants.

En conclusion nous voudrions indiquer comment on pourrait définir une signature S correspondant à la transformation T au lieu de T^k $(k>1)$.

Pour cela, partons encore avec le point fixe hyperbolique symétrique de T^k, et marquons les points P, $P_1=T(P)$,...., P_{k-1} qui sont symétriquement disposés par rapport à l'axe de symétrie. Dans ce qui suit nous prenons $k=5$.

En commençant avec deux points symétriques Q et $\overline{Q}$ des arcs symétriques $Pa\infty$ et $P\omega\infty$ qui sont près de P, prolongeons ces deux arcs symétriquement. Soit $Q\overline{Q}$ la courbe brisée formée par ces deux arcs symétriques.

Considérons en même temps les arcs transformés $Q_1\overline{Q}_1$, $Q_2\overline{Q}_2$, $Q_{-1}\overline{Q}_{-1}$ et $Q_{-2}\overline{Q}_{-2}$. Si Q vient à coïncider avec $\overline{Q}_1$ tous les quatre couples $(Q_{-2}, \overline{Q}_{-1})$, $(Q_{-1}, \overline{Q})$, $(Q, \overline{Q}_1)$, $(Q_1, \overline{Q}_2)$ viennent à coïncider en S, $T(S)$, $T^2(S)$, $T^3(S)$ respectivement (voir la fig. 18). Maintenant nous prolongeons $P_2\alpha\infty$ jusqu'à sa première rencontre avec $P_{-2}\omega\infty$ en un point W, tous les deux arcs étant prolongés symétriquement. Ainsi le point W se trouve sur l'axe de symétrie.

De cette manière nous obtenons un cycle symétrique rattaché aux cinq points périodiques P, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2}. Pour spécifier un tel cycle topologiquement il faut en premier lieu déterminer les autres points d'intersection des arcs indiqués; pour μ assez petit le cycle doit avoir la forme spéciale de la figure, puisque pour $\mu=0$ le cycle se réduit à un cercle $\varrho=$const. L'entrelacement total sera déterminé seulement par l'entrelacement de la branche complète $P\alpha\infty$ avec les ω branches du cycle; et même cet entrelacement partiel obéit aux lois presque évidentes que je ne donnerai pas ici.

L'entrelacement de la branche complète $P\alpha\infty$ avec un cycle de cette espèce déterminera ainsi la signature S associée à la transformation T du véritable probléme restreint des trois corps.

Je n'essaierai pas à en étudier les propriétés ici. Évidémment la spécification topologique d'une telle signature S devrait être beaucoup plus compliquée que celle de la signature partielle $S^{(k)}$ que nous avons employé plus haut.

III.

Quelques réflexions générales.

1. - Signification mathématique du problème restreint des trois corps.

En général un système dynamique irréversible de deux dégrés de liberté n'admet pas de transformations en lui-même autre que l'automorphisme intérieur obtenu en remplaçant t par $t+c$. Mais il peut aussi admettre un groupe fini d'automorphismes extérieurs. C'est ce qui arrive dans le cas du problème restreint des trois corps, où l'on peut remplacer x, y, t par x, $-y$, $-t$ respectivement sans modifier les équations différentielles ou même la constante C qui apparaît dans l'intégrale de JACOBI.

Nous avons considéré seulement le voisinage du cas intégrable $\mu=0$. Mais cette limitation nous a été utile principalement pour faire la réduction effective du problème restreint à celui d'une transformation conservative T d'une surface de section S_2 en elle-même. Je doute très peu que cette espèce de réduction reste valable dans un domaine étendu de valeurs C et de μ. Malheureusement je n'ai pu trouver d'autre méthode de construire une telle surface S_2 sauf celle de la continuation analytique en commençant par le cas intégrable $\mu=0$. Quand une telle réduction cesse d'être possible, le problème restreint devient beaucoup plus compliqué du point de vue mathématique.

2. - La méthode du minimum de M. Tonelli.

Sans aucun doute le Calcul des Variations nous fournit les formes analytiques des problèmes dynamiques les plus suggestives. En les variables x, y, t une forme paramètrique du problème restreint est la suivante:

$$\delta \int ((xy'-yx')+\sqrt{2\Omega(x,y)-C}\sqrt{x'^2+y'^2})dt=0.$$

Ici le premier terme sous le signe d'intégration répresente le double de l'aire algébrique A d'un secteur dont les bords sont les deux rayons qui sont issus de l'origine et qui passent par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de la courbe qui joint ces deux points; cette aire est mesurée positivement dans le sens qui amène l'axe positif des x sur l'axe positif des y. L'autre terme répresente une espèce de longueur modifiée de la courbe considérée que nous désignerons par L. Donc le problème se pose de la manière intuitive suivante, $\delta(2A+L)=0$.

La fonction sous le signe d'intégration est tout à fait régulière dans le sens de M. HILBERT et de M. TONELLI ([20]), sauf à l'origine et le long de la courbe de vitesse nulle, où elle cesse d'être analytique. Donc l'intégrale jouit de la semi-continuité inférieure sans autre exception, et les raisonnements classiques de M. TONELLI nous permettent de voir presque géométriquement pourquoi les extrémales ordinaires nous donnent un minimum relatif quand les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre.

En employant les variables régularisantes p, q, τ où $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $dt=4(p^2+q^2)d\tau$, on obtient une forme analogue

$$\delta \int ((p^2+q^2)(pq'-qp')+\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{2\Omega(p^2-q^2, 2pq)-C}\sqrt{p'^2+q'^2})d\tau=0,$$

qui jouit de l'avantage que l'intégrale nouvelle est régulière à l'origine et donc partout à l'intérieur de l'ovale de vitesse nulle considéré.

Malheureusement la méthode de minimum ne s'applique à aucune des trajectoires fermées du problème restreint parce que l'intégrale n'a jamais un minimum relatif le long d'une telle trajectoire; c'est pourquoi l'analogue du critérium de WHITTAKER ([21]) que j'ai donné pour le cas irréversible et dont

---

([20]) Voir le livre de M. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, t. 1 et 2, Bologna (1922-1924).

([21]) Voir son article: *On Periodic Orbits*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, t. 62 (1902). Le critérium était rigoureusement établi par M. TONELLI et M. SIGNORINI en 1912. Voir l'article de M. TONELLI: *Sulle orbite periodiche*, Rendiconti della R. Accademia

M. TONELLI a donné une très simple démonstration ([22]) ne s'applique pas non plus.

Faut-il donc renoncer à l'espoir d'obtenir par la méthode du minimum toutes les trajectoires fermées ? Je crois que c'est seulement en formulant des problèmes isopérimètriques convenables qu'on puisse employer la méthode du minimum jusqu'à un certain point. Par exemple considérons les courbes rectifiables fermées sans points doubles d'une surface analytique convexe à deux dimensions dont *chacune divise la surface en deux parties de courbure totale égale à* 2π. La plus courte de ces courbes doit être une géodésique fermée. C'est à POINCARÉ qu'on doit cette méthode isopérimètrique ([23]).

Peut-on employer une méthode isopérimètrique analogue dans le problème restreint ? Pour répondre à cette question je vais employer une analyse (voir II, section 16) basée sur l'usage des arcs brisés d'extrémales. En choisissant une suite cyclique de points convenables $P_1, \ldots, P_n$ situés respectivement sur n courbes transversales, dont aucun couple adjacent ($P_i P_{i+1}$ ou $P_n P_1$) n'est séparé par deux points conjugués de l'extrémale correspondante, on obtient

$$I = \sum a_{ij} x_i x_j + \ldots$$

où l'intégrale I est prise le long d'une courbe brisée d'arcs d'extrémales $P_1 P_2, \ldots, P_n P_1$ dans le voisinage et où $x_1, \ldots, x_n$ répresentent les distances des sommets $P_1, \ldots, P_n$ de l'extrémale fermée donnée.

Dans le cas d'un minimum relatif la forme quadratique serait positive définie ou semi-définie. Un examen de l'intégrale I dans le cas intégrable $\mu = 0$ montre immédiatement que le cas d'un minimum ne peut pas se présenter ici, puisqu'il y a toujours au moins trois points conjugués le long d'une telle courbe fermée.

Si l'on impose une telle condition isopérimètrique naturelle, cela introduit une relation de plus,

$$F \equiv \sum \beta_i x_i + \ldots = 0.$$

En faisant ainsi, on diminue l'indice de la forme quadratique d'*un* au plus. Donc en n'introduisant qu'une seule condition isopérimètrique convenable, on ne pourra traiter que le cas d'indice 1. Mais j'ai montré que ce cas a lieu précisément s'il y a deux points conjugués au plus le long de la courbe complète ([24]), ce qui n'a pas lieu même pour μ petit.

---

dei Lincei, t. 21 (1912) et aussi l'article de SIGNORINI: *Existenza di un' estremale chiusa dentro un contorno de Whittaker*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 33 (1912).

([22]) Voir son article: *Sulle orbite periodiche irreversibili*, Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, sér. 8, t. 1 (1923-1924).

([23]) *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 6 (1905).

([24]) Voir II, section 19.

Il faudrait donc imposer au moins deux conditions isopérimètriques pour arriver au but dans quelques cas spéciaux. On pourrait peut-être n'imposer qu'une seule condition en demandant de plus que les courbes admissibles soient symétriques par rapport à l'axe des x (ce qui revient à diviser l'indice par *deux* à peu près).

Mais, pour C grand, l'indice, qui est toujours donné par le nombre de points conjugués correspondant à une période complète, devient grand aussi. Donc il semble être nécessaire d'employer des conditions isopérimètriques de plus en plus nombreuses même pour obtenir la trajectoire fermée rétrograde fondamentale L_1 dont j'ai démontré l'existence en général (voir I, section 18).

La méthode entièrement différente que j'ai développée pour démontrer l'existence d'une telle trajectoire L_1 est basée sur quelques propriétés spéciales de la fonction $\Omega(x, y)$. J'ai montré de plus que si toutes les autres trajectoires circulent indéfiniment dans le même sens autour de L_1 dans l'espace S_3 il doit exister une autre trajectoire fermée L_2 et une surface de section ayant comme seul bord la trajectoire L_1; j'ai même formulé une condition analytique pour cette espèce de circulation.

Tout cela suggère que probablement il est presque nécessaire d'employer des méthodes plus particulières que celle du minimum pour bien réussir dans la détermination des trajectoires fermées du problème restreint.

Faisons ici une remarque qui puisse éclaircir la situation. Le groupe de transformations ponctuelles à deux dimensions qui changent x, y en $\bar{x}, \bar{y}$ est celui qui se rattache au problème du Calcul des Variations que nous considérons dans le problème restreint. Mais le groupe fondamental pour le problème restreint est plutôt celui des transformations ponctuelles à trois dimensions puisqu'on peut changer librement les trois variables dans les trois équations différentielles du premier ordre. Par conséquent la plupart des invariants du groupe spécial du Calcul des Variations n'ont aucune signification pour ce groupe plus fondamental.

Néanmoins le Calcul des Variations restera toujours sans aucun doute un des instruments les plus puissants et les plus beaux dans le domaine des équations différentielles de la Dynamique. En particulier il nous permet de résoudre le problème du minimum relatif pour des arcs courts et ainsi de réduire les questions « in the large » à des questions de points critiques d'une fonction ordinaire.

3. - La méthode des points critiques.

En introduisant une certaine fonction de ϱ^*, θ^*, μ, C qu'on peut calculer, nous avons vu comment on peut remplacer la considération des trajectoires fermées qui font le tour de L_1 et L_2 k fois avec une avance angulaire de $2l\pi$, en considérant les points critiques d'une fonction de $2k$ variables indépendantes ϱ^*, θ^*, $\varrho_1{}^*$, $\theta_1{}^*, \ldots$, $\varrho^*{}_{k-1}$, $\theta^*{}_{k-1}$, quelque soit k. POINCARÉ a fait il y a longtemps une telle réduction *locale* du problème restreint en n'employant que deux variables comme nous avons remarqué au-dessus.

Il serait très intéressant d'appliquer les inégalités fondamentales de MORSE à l'étude des points critiques de ces fonctions pour $k=1, 2,\dots$ Néanmoins il me semble presque certain qu'on n'obtiendrait ainsi que des résultats assez évidents. D'ailleurs, après notre étude directe de la transformation T, il serait probablement très difficile d'obtenir de cette manière nos résultats concernant la distribution asymptotiques des trajectoires fermées qui dépendent essentiellement de l'étude asymptotique des points fixes de la transformation T ([25]).

Mais c'est dans les problèmes dynamiques, ou à deux degrés de liberté sans surface de section, ou à plusieurs degrés de liberté, qu'on peut sans doute employer avec grand avantage la méthode de MORSE pour découvrir toutes les trajectoires fermées qui sont topologiquement nécessaires. Par exemple MORSE a déjà démontré l'existence de $n(n-1)/2$ géodésiques fermées, des mêmes types respectivement que les géodésiques fermées principales d'un ellipsoïde, sur toute surface homéomorphe à la surface d'une sphère à n dimensions ([26]).

En effet la méthode du Calcul des Variations « in the large » de MORSE ([27]), basée sur l'étude des points critiques généraux, et la méthode d'une étude asymptotique que j'ai employée sont en quelque sorte des méthodes complémentaires dans ce domaine.

4. - Sur le théorème ergodique ([28]).

Du point de vue purement topologique, ce très remarquable théorème n'exprime autre chose que le théorème de récurrence de POINCARÉ. Mais si l'on ne considère que le groupe des transformations continues qui conservent les volumes (comme on le fait par habitude dans la mécanique statistique par exemple), ce théorème est d'une importance de tout premier ordre. D'après ce théorème, dans le problème restreint toutes les trajectoires, sauf peut-être celles d'un ensemble de mesure nulle, traverseront successivement, toutes les régions de la surface de section S_2, et même tout ensemble mesurable de S_2, avec une probabilité limite qui est la même dans le passé (t décroissant) que dans l'avenir (t croissant).

([25]) Pour les problèmes dynamiques avec n degrés de liberté voir à cet égard un article de D. C. LEWIS et moi-même: *On the Periodic Motions Near a Given Periodic Motion of a Dynamical System*, Annali di Matematica, sér. 4, t. 12 (1933-1934), et aussi un article de LEWIS: *On Certain Periodic Motions of Dynamical Systems with More Than Two Degrees of Freedom*, American Journal of Mathematics, vol. 5, 6(1934).

([26]) Voir sa note: *Closed Extremals*, Proceedings of the National Academy of Sciences, t. 15 (1929). J'avais démontré antérieurement avec ma méthode de « minimax » qu'il en existe toujours au moins une (voir V, chap. 7); la méthode de minimax est celle des points critiques d'indice un seulement, tandis que MORSE considère le cas des indices arbitraires.

([27]) Voir son Livre: *The Calculus of Variations in the Large*, New York (1934).

([28]) Ma démonstration du théorème ergodique se trouve dans le Proceedings of the National Academy of Sciences t. 17 (1931). Une note historique par KOOPMAN et moi-même: *Recent Contributions to the Ergodic Theory*, y a paru en t. 18 (1932).

Remarquons seulement ici que nos recherches de plus haut montrent clairement que la propriété ergodique n'est pas valable, même dans une seule direction du temps, pour des mouvements extrêmement nombreux. En effet pour les mouvements hétéroclines rattachés aux mouvements périodiques cette propriété est valable dans les deux directions du temps séparément. Mais si l'on écrit une suite doublement infinie d'entiers bornés ....*ijklm*.... dans laquelle deux suites finies particulières se trouvent de plus en plus répétées, il est évident que le mouvement correspondant (voir section 10, partie II) n'entre pas en général avec une probabilité determinée dans un voisinage choisi des deux mouvements (périodiques) obtenus par une répétition indéfinie des deux suites. Pour un tel mouvement la propriété ne peut pas être valable même dans une direction du temps. D'autre part, si l'on écrit une telle suite par hasard (si l'on peut en admettre la possibilité) les mouvements correspondants satisfont au théorème ergodique.

5. - Sur les familles de mouvements périodiques.

G. DARWIN, F. R. MOULTON, E. STRÖMGREN [29] et d'autres ont fait des calculs numériques très étendus afin de suivre les familles analytiques de mouvements périodiques symétriques les plus simples en laissant varier C et μ. WINTNER [30] a essayé récemment de classifier et d'organiser les résultats ainsi obtenus moyennant des principes généraux en particulier le principe de la « termination naturelle » des familles périodiques, énoncé par STRÖMGREN et démontré par WINTNER. Voilà une tâche d'une complexité formidable si l'on voulait suivre ces mouvements pour toutes les valeurs de C et μ.

À cet égard je voudrais faire les remarques suivantes. Par famille périodique nous entendons tous les mouvements périodiques pour des valeurs réelles différentes de C et pour μ donné $(0<\mu<1)$ qu'on peut obtenir par une extension analytique, en regardant C comme une fonction uniforme analytique d'un paramètre réel quelconque r. Avec cette définition deux mouvements périodiques qui coïncident et puis disparaissent, appartiennent à la même famille fermée dans le voisinage. Un mouvement périodique est considéré ici comme parcouru un certain nombre de fois.

Maintenant supposons qu'une telle branche se termine pour $C=C_0$. Supposons de plus qu'en un paramètre quelconque r, on ait $\lim C=C_0$ pour $\lim r=r_0$, et

---

([29]) Voir par exemple son article: *Forms of Periodic Motion in the Restricted Problem and in the General Problem of Three Bodies*. Publikationer og mindre Meddelelser fra Köbenhavns Observatorium, N.° 39 (1922). On y trouvera d'autres articles plus récents par STRÖMGREN et ses élèves.

([30]) Voir le plus récent de ses articles où l'on trouve des références bibliographiques: *Grundlagen einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörpers Problem*, Mathematische Zeitschrift, I et II, t. 34 (1931).

qu'en même temps, les dimensions maximum D de la courbe de mouvement ou bien la période Θ ne restent pas bornées, ou bien encore la distance maximum d de la courbe de mouvement de S ou de J ou d'un des cinq points de libration pour lesquels $\Omega_x = \Omega_y = 0$ devienne arbitrairement petite.

Dans ce cas il est presque évident qu'on doive avoir

$$\lim_{r=r_0} D + \Theta + \frac{1}{d} = +\infty.$$

Autrement ou aurait pour r près de r_0

$$|D|, \quad |\Theta| < K; \qquad |d| > \frac{1}{K}.$$

Les théorèmes élémentaires d'existence des solutions nous montrent que cela est impossible.

En effet supposons en premier lieu que C_0 ne soit pas une des cinq valeurs de C pour lesquelles l'équation $2\Omega = C_0$ est valable à un point de libration. Il s'ensuit que les dimensions du mouvement ne sont ni grandes ni petites et que la période est bornée. Donc il existera au moins un mouvement périodique limite ayant les mêmes propriétés. Mais en employant une surface de section locale, on voit tout de suite que les conditions de périodicité s'écrivent

$$\varphi(\xi, \eta, C) = 0, \qquad \psi(\xi, \eta, C) = 0$$

où ξ, η sont des coordonnées de la surface de section et où l'on a pour $r = r_0$

$$\varphi(0, 0, C_0) = 0, \qquad \psi(0, 0, C_0) = 0.$$

Pour de telles équations, les solutions, $\xi(C(r))$, $\eta(C(r))$ que nous considérons dans le voisinage se groupent en des familles analytiques réelles qui ne se terminent jamais pour $C = C_0$ selon les théorèmes bien connus des fonctions implicites.

D'autre part si C a une des cinq valeurs exclues et le point (x, y) vient dans le voisinage d'un point de libration correspondant, ce point se trouve près d'un point d'équilibre dans l'espace S_4 des x, y, x', y'. Dans ce cas le point y restera pendant longtemps mais sans y rester toujours, puisque d n'est pas petit. Donc la période devrait être très grande, ce qui contredit notre hypothèse.

Précisément le même raisonnement nous montre aussi que si D et Θ sont bornés et d n'est pas petit, pour r voisin de r_0, la branche considérée ne se termine pas non plus pour $C = C_0$.

Par conséquent si une branche périodique réelle se termine elle se termine naturellement de façon que

$$D + \Theta + 1/d \rightarrow +\infty.$$

C'est dans ce sens presque intuitif que j'interprète le « principe de termination naturelle » de STRÖMGREN et WINTNER.

Observons que la possibilité des mouvements périodiques isolés ou des familles périodiques pour $C = C_0$, n'est pas exclue par ce raisonnement.

Il est tout à fait évident que les méthodes que nous avons employées suffisent à donner une très bonne idée de ce qui est vraiment essentiel dans tous les résultats de calcul numérique, au moins s'il existe une surface de section S_2. Par exemple supposons qu'un mouvement périodique symétrique passe par deux points de rebroussement en position symétrique sur la courbe de vitesse nulle, et ainsi acquière ou perde deux points doubles en position symétrique. Cela ne signifie que le fait suivant: La courbe de vitesse nulle est représentée par une courbe fermée de S_3. Suivons dans les deux sens du temps, les trajectoires passant par un point quelconque de cette courbe particulière de S_3, jusqu'à la première rencontre avec S_2. On obtient ainsi deux courbes correspondantes C' et C'' en position symétrique, qui se croisent deux fois sur l'axe. En effet les deux courbes se croiseront aux deux points de l'axe des θ qui correspondent aux deux états de mouvements $x = x_1$, $y = 0$, $x' = y' = 0$ et $x = x_2$, $y = 0$, $x' = y' = 0$ où $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ sont les deux points de l'axe des x sur la courbe de vitesse nulle. Donc il n'y a rien de spécial à l'instant considéré sauf le fait suivant; deux images symétriques P' et P'' du point périodique se trouvent à cet instant, l'une sur C', l'autre sur C'', en passant d'un côté à l'autre.

D'une manière semblable le « choc » du point P de masse nulle avec S ou J indique seulement qu'un des points périodiques se trouve sur la courbe $\varrho = 0$ de S_2.

Des telles recherches numériques ont un intérêt mathématique considérable. En effet les résultats obtenus suggérent des théorèmes possibles. Par exemple j'ai montré (voir IV, chapitre I) qu'il faut pour l'existence d'une surface de section quelconque, que la condition suivante ait lieu: si l'on prend deux surfaces non tangentes à aucune trajectoire et qui soient traversées par une certaine trajectoire à P et Q, et si l'on varie avec continuité cette trajectoire sans que P ou Q dépasse les bords, l'intervalle de temps entre les deux points de croisement ne peut pas devenir infini. En conséquence la période d'un mouvement périodique symétrique ne peut pas devenir infinie pendant qu'il existe une surface de section. Donc si les calculs nous montrent que la période d'un mouvement symétrique périodique devient infinie pour une certaine valeur de μ et C, il faut conclure qu'il n'existe à ce moment aucune surface de section. Dans ce cas particulier les deux surfaces (qui peuvent être identiques) sont définies par l'équation $x' = 0$.

Il serait aussi très intéressant de calculer des séries explicites pour les fonctions ϱ_1 et θ_1 qui définissent T. Ainsi l'on déterminerait à peu près quelques-unes des images des axes de symétrie, et l'entrelacement de quelques branches asymptotiques. On obtiendrait donc des faits nouveaux concernant la distribution des mouvements symétriques et concernant la signature S.

Moyennant de tels calculs, peut-on trouver une réponse à d'autres questions intéressantes comme celle de la stabilité? Je crois que non, à moins qu'on ne fasse des calculs vraiment prodigeux. En effet dans le voisinage d'un mouvement périodique formellement stable tel que L_1 ou L_2, les séries asymptotiques, quoique divergentes en général, nous donnent le seul moyen effectif de calculer les mouvements voisins pendant des intervalles de temps très longs. Mais c'est le caractère de ces mouvements voisins pendant de tels intervalles qui détermine la stabilité ou l'instabilité du mouvement périodique. La difficulté d'un calcul direct pour de courts intervalles successifs serait presque inconcevable. Néanmoins l'emploi de ces séries doit être défendu, puisqu'il suppose d'avance que la stabilité ait lieu.