Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Karl Menger

Sull'indirizzo di idee e sulle tendenze principali del colloquio matematico di Vienna

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 4 (1935), p. 327-339
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_4_327_0>

SULL'INDIRIZZO DI IDEE E SULLE TENDENZE PRINCIPALI DEL COLLOQUIO MATEMATICO DI VIENNA

di KARL MENGER (Vienna) (*).

1. - Geometria senza coordinate e geometria degli insiemi.

Questo articolo non vuole essere tanto una ricapitolazione di tutti i risultati raggiunti dal colloquio matematico di Vienna ([1]) nei suoi sei anni di vita — una tal ricapitolazione richiederebbe infatti uno spazio ben maggiore — ma si propone piuttosto di esporre l'indirizzo di idee che vien seguito in questo colloquio. Inoltre noi ci limiteremo a mettere in luce le tendenze del colloquio per quanto riguarda la *Geometria*, sebbene esso non si occupi affatto esclusivamente di studi geometrici. Ed invero, a prescindere dal fatto che le stesse ricerche geometriche coltivate in tale colloquio costringono spesso a indagini in altri campi della matematica, si compiono pure in esso, prima di tutto, studi di *Logica* ([2]), e poi anche studi riguardanti nuove applicazioni delle scienze esatte a problemi di carattere *sociologico* ([3]).

Nè questo accostamento della geometrica alla logica è soltanto casuale, poichè anche nello studio dei problemi geometrici una delle nostre tendenze più carat-

---

(*) Ringrazio il dr. L. GEYMONAT per avermi aiutato nella stesura in lingua italiana del presente articolo.

([1]) Vedi: *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.* Unter Mitwirkung von K. GÖDEL und G. NÖBELING herausgegeben von K. MENGER, quaderno 1-6 (Deuticke, Vienna). Nel seguito indicheremo questi quaderni semplicemente con « Ergebnisse ».

([2]) Accanto a una breve relazione di K. GÖDEL (Ergebnisse 3, pag. 12) sopra i suoi risultati fondamentali intorno alla completezza e la non contraddittorietà dei sistemi di assiomi [e cioè: in ogni teoria che contenga l'aritmetica di PEANO, si trovano proposizioni che non possono venir dimostrate mediante la teoria stessa, e in particolare non può venir dimostrata la non contraddittorietà di questa teoria senza uscire dal sistema degli assiomi sui quali è fondata], si hanno ricerche sulla logica matematica classica, sulla logica di più valori (GÖDEL, TARSKI, PARRY) e sulla logica intuizionistica, fra le quali una dimostrazione del fatto sorprendente che la cosidetta aritmetica intuizionistica è solo in apparenza più ristretta dell'aritmetica classica, mentre in una opportuna interpretazione la contiene in sè (GÖDEL, Ergebnisse 4, pag. 34).

([3]) Per esempio sull'esistenza e l'unicità di soluzioni delle equazioni di produzione dell'economia matematica (vedi SCHLESINGER-WALD, Ergebnisse 6, pag. 10).

teristiche consiste proprio nel passare dalla trattazione esclusivamente basata sul calcolo (rechnende Geometrie) alla trattazione logico-deduttiva (schliessende Geometrie). Ma per chiarire quest'idea, bisogna prender le mosse un po' più di lontano.

Uno dei più grandi progressi, che la geometria ha compiuto dai primi tempi della sua esistenza, fu la scoperta, avvenuta all'inizio dell'evo moderno, dei metodi analitici: la rappresentazione dei punti del piano con coppie di coordinate e dei punti dello spazio con terne di coordinate, la definizione delle varietà lineari con equazioni lineari, delle coniche con equazioni quadratiche, ecc. e la conseguente possibilità di applicare tutta l'algebra alla geometria.

Con questa scoperta non fu soltanto resa possibile una nuova trattazione, mediante il calcolo, delle figure già prima note della geometria, ma fu straordinariamente amplificato il dominio stesso di tal scienza.

Si cominciarono infatti a studiare sistematicamente anche le figure geometriche, definite da equazioni di grado superiore al secondo, mentre prima della scoperta della geometria analitica erano note soltanto alcune poche fra esse, e queste poche erano state studiate con metodi affatto non sistematici (sostanzialmente solo come mezzi per la soluzione dei tre classici problemi). Con la scoperta dei metodi analitici, si aveva, invece, nel grado delle equazioni definienti le varie figure spaziali un principio sistematico per la classificazione di tali figure. Contro la tendenza, prevalsa nel primo tempo della geometria analitica, di limitare le ricerche geometriche alle figure definibili mediante relazioni algebriche, si passò poi ben presto allo studio delle figure definite per mezzo di funzioni trascendenti. La scoperta del concetto di coordinate rivelò così alla geometria un nuovo campo di enti, le cui proprietà, i cui reciproci rapporti, le cui trasformazioni ecc. potevano venir trattati coi metodi della geometria analitica. In particolare si dimostrarono per via di puro calcolo tutti i teoremi, che la precedente geometria assiomatica aveva dimostrato limitatamente a quelle semplici figure geometriche, che costituivano tutto il suo dominio, cosicchè sembrò che la geometria sintetica potesse appena, nel migliore dei casi, tener dietro alla geometria analitica. Inoltre, anche le proprietà locali delle figure definite da equazioni, le loro proprietà di curvatura, i loro rapporti di contatto, ecc., si mostrarono adatti ad una pura trattazione analitica per mezzo del calcolo infinitesimale, ed anzi questa così detta geometria differenziale divenne proprio uno degli stimoli più potenti per la costituzione del calcolo differenziale e integrale. Così la scoperta dei metodi analitici fornì, per secoli, alla geometria — mediante le applicazioni dell'algebra e del calcolo alle figure geometriche rappresentate con coordinate — una serie di problemi, che fino ai nostri giorni non sono ancora completamente esauriti.

Accanto a questo enorme progresso, l'abitudine — durata alcuni secoli — ai metodi puramenti analitici ebbe — è vero — anche i suoi svantaggi. Prima di tutto il concetto di coordinate — ch'è certo uno dei mezzi più fecondi introdotti nella geometria, ma però soltanto un *mezzo* per la trattazione dei problemi geometrici — fu sollevato a tale importanza, che molti ricercatori giunsero a vedere nella geometria sol più un'aritmetica delle n-ple di numeri e una teoria delle equazioni fra queste n-ple di numeri. Al contrario, una delle tendenze più caratteristiche del colloquio matematico di Vienna è proprio quella di sviluppare una geometria *senza l'ausilio delle coordinate.* — In secondo luogo una gran quantità di geometri — a causa dell'abitudine ai metodi analitici — limitarono la geometria allo studio di quelle sole figure che sono definibili mediante equazioni fra le coordinate dei loro punti. Il campo delle equazioni considerate è stato certo molto esteso nel corso del tempo. Originariamente si volevano riconoscere, come già fu poco sopra ricordato, quali enti della geometria soltanto le figure definibili con equazioni *algebriche*; più tardi furono aggiunte quelle definibili mediante funzioni *analitiche* ed anzi mediante relazioni *continue*, ma anche dopo queste estensioni rimase qui una limitazione essenziale del dominio delle ricerche geometriche, limitazione che fu necessaria solo per l'applicazione di determinati metodi, e cioè dei metodi analitici. Orbene una seconda delle tendenze fondamentali del colloquio di Vienna consiste nel voler prendere in considerazione tutti gli insiemi parziali degli spazi euclidei e di spazi ancor più generali, e non soltanto quegli insiemi che son dati mediante equazioni fra le coordinate dei loro punti. In altre parole, noi studiamo la «*geometria degli insiemi*» (mengentheoretische Geometrie) ([4]).

2. - Teoria delle dimensioni.

Un primo esempio, che, meglio di altre considerazioni generali, può mettere in evidenza le nostre due tendenze fondamentali or ora ricordate, è il concetto di dimensione. Nella geometria analitica il piano vien detto «a due dimensioni» perchè i suoi punti si possono rappresentare con due coordinate; il nostro spazio ordinario vien detto «a tre dimensioni» perchè i suoi punti si possono rappresentare con tre coordinate; i cerchi «ad una dimensione» perchè le coordinate dei loro punti si lasciano esprimere come funzioni continue di un solo parametro; le superfici sferiche come «a due dimensioni» perchè le coordinate dei loro punti si lasciano esprimere come funzioni continue di due parametri, ecc. In ultima analisi è dunque, nella geometria analitica, il numero delle coordinate necessarie per la rappresentazione continua di una figura, ciò che costituisce il criterio per la sua dimensione. Ma questa concezione urta contro alcune fondamentali difficoltà: se si denotano come unidimensionali tutte le figure, tali che le coordinate dei loro punti sono funzioni continue di un unico parametro, allora anche le superfici quadrate e i corpi cubici cadono, come dimostrò G. PEANO, nella classe delle figure ad una dimensione. Per trasformazioni continue si perde dunque qualche volta ciò che comunemente si intende per dimensione di una figura. Bisogna limitarsi

(4) Vedi MENGER: *Neuere Methoden und Probleme der Geometrie*, Verhandl. d. Intern. Math. Kongr., Zürich 1932, vol I, pag. 310.

alle trasformazioni *topologiche*, cioè biunivoche e bicontinue; e si giunge in tal modo al seguente concetto di varietà ad n dimensioni: una figura, ciascun punto della quale possiede un intorno i cui punti possono venir posti in corrispondenza biunivoca e bicontinua con i punti di una sfera ad n dimensioni. Ma questo concetto è straordinariamente ristretto, ossia esiste un gran numero di figure dello spazio, per le quali non viene, mediante questa definizione, fissata alcuna dimensione.

È oggi abbastanza noto come la teoria delle dimensioni ([5]) risolva questo problema. Essa stabilisce che un insieme parziale M_0, non vuoto, di uno spazio euclideo abbia *dimensione zero*, se ogni punto di M_0 è contenuto in insiemi aperti, arbitrariamente piccoli, le cui frontiere non hanno alcun punto in comune con M_0. Tal quale come nella teoria delle funzioni vien qui chiamato *aperto* un insieme parziale U di uno spazio euclideo, se ogni punto di U è centro di una sfera dello spazio euclideo in questione completamente contenuta in U; e per *frontiera* di U si intende l'insieme di tutti i punti di condensazione di U che non giacciono in U. L'insieme M_1 si dice ad *una dimensione*, se esso non è di dimensione zero, e se ogni punto di M_1 è contenuto in insiemi aperti, arbitrariamente piccoli, le cui frontiere hanno a comune con M_1 un insieme di punti vuoti o di dimensione zero. Ed in generale un insieme M_n dicesi *ad n dimensioni* se esso non ha dimensione minore di n, e se ogni punto di M_n è contenuto in insiemi aperti arbitrariamente piccoli le cui frontiere hanno a comune con M_n degli insiemi di dimensione minore di n. In questo modo vien attribuito ad ogni insieme parziale di uno spazio euclideo, per complicato che sia, un numero finito come sua dimensione, e precisamente, come si può dimostrare, ad ogni varietà k-dimensionale, nel senso prima chiarito, proprio il numero k.

L'importanza di questa definizione giace nel fatto che essa permette di dedurre una estesa teoria, la quale descrive proprietà e rapporti essenziali delle figure geometriche. Per citare solo qualche esempio: si può ad ogni insieme M in ogni suo punto far corrispondere una dimensione, di modo che l'insieme M si dirà k-dimensionale nel punto P, se k è il minimo numero il quale gode della proprietà, che P è contenuto in insiemi aperti arbitrariamente piccoli le cui frontiere hanno, in comune con M, insiemi di dimensione minore di k. L'insieme M è ad n dimensioni allora e solo allora che in ogni punto esso abbia dimensione $\leqslant n$, e che esista almeno un punto in cui esso abbia proprio la dimensione n. Se si raccolgono tutti i punti di un insieme ad n dimensioni M, nei quali esso ha proprio dimensione n, allora si può dimostrare che il nuovo insieme così costituito è certo o ad $(n-1)$ o ad n dimensioni. Se M è un insieme ad n dimensioni chiuso (cioè

([5]) Vedi MENGER: *Dimensionstheorie*, Teubner, Lipsia 1928, dove si trova una completa letteratura fino all'anno 1928, comprendente particolarmente le opere dell'URYSOHN. Vedi anche NÖBELING: *Die neuesten Ergebnisse der Dimensionstheorie*, Jahresbericht d. deutsch. Math. Ver., 41, 1931, S· 1.

se contiene tutti i suoi punti di condensazione), allora l'insieme di tutti i punti, nei quali M ha dimensione n, è esso stesso un insieme ad n dimensioni in ciascuno dei suoi punti. Un altro teorema asserisce che ogni insieme ad n dimensioni — sia esso chiuso o no — è somma di $n+1$, ma non meno che $n+1$ insiemi a dimensione zero. Inoltre è possibile dimostrare che ogni insieme chiuso ad n dimensioni può venir trasformato con una deformazione continua, che sposti i singoli punti tanto poco quanto si voglia, in un complesso n-dimensionale (cioè in un insieme che è somma di un numero finito di simplex fra i quali uno almeno è ad n dimensioni), e che quindi ogni insieme chiuso ad n dimensioni può venir, per così dire, approssimato da complessi n-dimensionali. Di special interesse è il caso particolare delle *curve*, cioè dei continui ad una dimensione, per le quali venne ricavata una propria ed estesa teoria [6].

È ormai chiaro: la teoria delle dimensioni e la teoria delle curve appartengono alla geometria senza coordinate ed anche alla geometria degli insiemi, poichè trattano insiemi di punti di spazi euclidei senza riferirsi alla rappresentazione di questi punti mediante coordinate, e considerano insiemi affatto arbitrari, compresi quelli che non sono dati mediante equazioni fra le coordinate dei loro punti.

Ad ogni modo potrebbe rimaner l'impressione che, attraverso la trattazione di insiemi parziali di spazi euclidei, si faccia implicito uso della rappresentazione dei loro punti mediante coordinate. Però non è assolutamente così. Ed invero parallelamente alla trattazione di insiemi parziali arbitrari di uno spazio euclideo, si ha pure una generalizzazione del concetto di spazio stesso. Come la generalizzazione Riemanniana del concetto di spazio è (secondo un'osservazione di WEYL) adeguata alla trattazione delle figure studiate nella geometria differenziale, (poichè lo spazio di RIEMANN è tanto generale quanto le figure spaziali studiate nella geometria differenziale), così alla geometria degli insiemi generali dello spazio euclideo corrisponde la generalizzazione ancora più ampia del concetto di spazio dovuta a FRÉCHET, che riesce ad astrarre in modo completo anche dalla rappresentazione dei punti dello spazio mediante coordinate. Ora la geometria degli insiemi, in particolare la teoria delle dimensioni e delle curve, può venir trattata proprio per insiemi parziali arbitrari di tali spazi generalizzati.

FRÉCHET chiama *spazio metrico* un insieme di elementi qualsiasi, se ad ogni coppia di elementi p, q corrisponde un numero reale $pq=qp$ che è $=0$ se $p=q$, e >0 se $p\neq q$, e che inoltre, per tre elementi p, q, r, sodisfa alla disuguaglianza dei triangoli $pq+qr\geqq pr$. Gli elementi di tali insiemi (allo scopo d'usare un'espressione molto suggestiva) vengono chiamati *punti*, il numero pq vien detto *distanza* dal punto p al punto q; però questi elementi non debbono affatto venir dati quali n-ple di coordinate, come accade nel caso speciale degli spazi euclidei ad n dimensioni.

---

[6] Vedi MENGER: *Kurventheorie*, Teubner, Lipsia 1932.

È chiaro che in uno spazio metrico possono venir definite le sfere. Sfera di di centro p e raggio ϱ è l'insieme di tutti i punti dello spazio che hanno da p distanza $<\varrho$. Perciò in uno spazio metrico possono venir definiti insiemi aperti e loro frontiere tanto bene quanto negli spazi euclidei, e quindi la ricordata definizione di dimensione è applicabile a insiemi parziali arbitrari di spazi metrici: l'insieme parziale M di uno spazio metrico si dice n-dimensionale, se n è il minimo numero tale, che ogni punto di M è contenuto in insiemi aperti arbitrariamente piccoli, le cui frontiere hanno a comune con M un insieme di dimensione minore di n; dove come punto iniziale di questa definizione per ricorrenza può venir scelto l'insieme vuoto se noi l'indichiamo come insieme di dimensione -1.

Tutti i teoremi sopra ricordati per gli insiemi parziali ad n dimensioni di spazi euclidei continuano a valere per insiemi parziali di spazi metrici arbitrari, purchè questi spazi metrici godano della proprietà della separabilità, e cioè posseggano qualche insieme numerabile e denso. Oltre a ciò si ottiene ancora il seguente risultato fondamentale: ogni insieme parziale ad n dimensioni di uno spazio metrico separabile può venir portato, mediante una trasformazione topologica, cioè biunivoca e bicontinua, su un insieme parziale di uno spazio euclideo a $(2n+1)$ dimensioni ([7]). Noi vediamo dunque che dal punto di vista delle rappresentazioni topologiche gli spazi metrici separabili a un numero finito di dimensioni non sono affatto più generali degli insiemi parziali di spazi euclidei, ma identici a questi. E, come osservazione laterale, notiamo infine che il termine $2n+1$ si mostra irriducibile, in quanto ogni insieme ad n dimensioni è topologicamente rappresentabile sopra un insieme parziale dello spazio euclideo a $(2n+1)$ dimensioni, ma per ogni n vi sono insiemi ad n dimensioni, che non si lasciano rappresentare topologicamente su insiemi parziali dello spazio euclideo a $2n$ dimensioni ([8]).

3. - Convessità.

Il perfezionamento della teoria delle dimensioni e delle curve non è affatto l'unico problema, che i geometri del colloquio matematico di Vienna si siano posti. Uno dei loro scopi più importanti è la trattazione sistematica di quelle proprietà e di quei rapporti degli insiemi parziali degli spazi metrici, che nella geometria classica vengono studiati per gli insiemi parziali degli spazi euclidei definiti mediante equazioni. Uno dei primi capitoli di questa « *geometria metrica* » fu lo sviluppo di una teoria generale della convessità ([9]). Noi diciamo che il punto q di uno spazio metrico giace *fra* due punti p ed r, se $p\neq q\neq r$ e $pq+qr=pr$. Orbene uno spazio metrico si dirà *convesso*, se per ogni coppia di punti p ed r di esso vi è almeno un punto q, che giace fra p ed r. In questa teoria ci limitiamo

---

([7]) Per la letteratura vedi NÖBELING, loc. cit., ([5]).

([8]) Per due brevi dimostrazioni vedi FLORES, Ergebnisse 5, pag. 17 e quaderno 6, pag. 4.

([9]) Vedi MENGER, Mathem. Annalen, 100, pag. 76 e per un estratto Ergebnisse 1, pag. 20.

a priori a considerare gli spazi metrici che sono *completi*, e cioè quali spazi metrici nei quali ogni successione di CAUCHY possiede un punto limite; dove una successione di punti p_1, p_2,...., p_n,...., dicesi successione di CAUCHY, se per ogni ε esiste un N tale che per $n > N$ ed $m > N$ la distanza $p_n p_m$ è $< \varepsilon$. Si può dimostrare [10] che uno spazio convesso completo contiene per ogni coppia di punti p e q, almeno un *segmento* che li congiunge, cioè un insieme parziale, che si lascia rappresentare, biunivocamente e senza variare le distanze fra i diversi punti, su di un segmento (e proprio su di un segmento di lunghezza pq). Se oltre a ciò lo spazio è anche *esternamente convesso*, e cioè per ogni coppia di punti p ed r esiste almeno un punto s, tale che r giaccia fra p ed s, allora due punti qualsiasi di esso sono contenuti in almeno una retta, cioè in almeno un insieme che può venir portato su di una retta mediante una trasformazione biunivoca e conservante le distanze.

Le relazioni fra queste ricerche e l'assiomatica della geometria elementare, specialmente gli assiomi dell'ordinamento, sono evidenti. Oltre a ciò il ricordato concetto del « giacere fra » permette la definizione di moltissime proprietà di struttura degli spazi metrici, lo sviluppo di una teoria delle linee geodetiche negli spazi metrici, ecc. Degno di osservazione è il fatto che tali proprietà metriche possono perdersi attraverso a trasformazioni topologiche; per esempio è chiaro che uno spazio convesso completo può venir rappresentato topologicamente su di uno spazio non convesso. Perciò sono collegati con alcuni concetti della geometria metrica problemi topologici molto profondi e spesso ancora non risolti. Quali proprietà deve per esempio possedere uno spazio metrico compatto (cioè uno spazio metrico in cui ogni insieme infinito ha un punto di condensazione), per essere topologicamente rappresentabile sopra uno spazio convesso?

La percorribilità continua è certo necessaria. Se essa sia anche sufficiente, o quali altre condizioni debbano venire ad essa aggiunte, rappresenta una domanda non ancora risolta e straordinariamente difficile.

4. - Gli spazi della geometria analitica fra gli spazi metrici.

Uno dei più importanti esempi metrici è l'R_n, lo spazio euclideo n-dimensionale, nel quale ogni punto p è dato mediante n numeri reali x_1, x_2,...., x_n e la distanza pq fra il punto p e il punto q di coordinate y_1, y_2,...., y_n è definita dalla formula $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+ .... +(x_n-y_n)^2}$. Quali proprietà deve avere uno spazio metrico, per essere congruente con R_n, oppure per essere congruente con un insieme parziale di R_n? Qui noi chiamiamo *congruenti* due spazi metrici, se essi sono rappresentabili l'uno sull'altro mediante una trasformazione biunivoca che conserva le distanze. Dopo che questa domanda ebbe trovato risposta [11],

---

[10] Per una nuova semplice dimostrazione di questo teorema vedi ARONSZAJN, Ergebnisse quaderno 6, pag. 45.

[11] Vedi MENGER, Mathem. Annalen, 100, pag. 113 e per un estratto Ergebnisse 1, pag. 20.

si potè subito affrontare e risolvere nel colloquio matematico di Vienna un nuovo problema molto più generale, che ora verrà brevemente esposto ([12]).

Prima di tutto, se sotto il concetto di spazio devono cadere tutti gli spazi studiati dalla geometria analitica, esso deve ancora venir generalizzato al di là del concetto di spazio metrico. In uno spazio metrico vengono ammessi come distanze solo i numeri reali non negativi, mentre negli spazi complessi della geometria analitica entrano distanze complesse e negative. Inoltre, in uno spazio metrico, due punti qualunque, non coincidenti, hanno distanza $\neq 0$, mentre nella geometria analitica complessa vengono considerate figure isotrope costituite da punti diversi, che due a due hanno distanza nulla. Una generalizzazione del concetto di spazio metrico, che comprende gli spazi considerati nella geometria analitica, si ottiene mediante la seguente definizione ([13]): un insieme R di elementi qualunque (chiamati punti) dicesi *spazio metrico complesso* ([14]) se ad ogni coppia di punti p e q corrisponde un numero complesso $pq = qp$, che è $= 0$ se è $p = q$, mentre se $p \neq q$, esiste almeno un punto r di R, per cui è $pr \neq qr$. Sotto questo concetto cade per esempio lo spazio complesso ad n dimensioni, ogni punto del quale è dato da n numeri complessi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e dove la distanza del punto p di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dal punto q di coordinate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ è definita da $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$. Fra i più importanti insiemi parziali di questo K_n, i quali sono pur essi come K_n spazi metrici complessi (e precisamente con distanze reali, ma non necessariamente positive), noi ricordiamo gli insiemi $R_{n,s}$ costituiti da quei punti di K_n, delle cui n coordinate le prime $\frac{n+s}{2}$ sono reali, e le ultime $\frac{n-s}{2}$ sono imaginarie pure. Per $s = n$ otteniamo lo $R_{n,n}$, che è molto prossimo allo spazio euclideo R_n ad n dimensioni, in quanto la distanza di due punti qualunque di tale $R_{n,n}$ è uguale al quadrato della distanza dei punti di R_n con eguali coordinate. Lo spazio $R_{n,s}$ è anzi uno *spazio metrico reale* e cioè uno spazio metrico complesso, in cui le distanze fra due punti qualsiasi sono reali.

La proprietà metrica fondamentale degli spazi K_n e $R_{n,s}$, che è in stretta relazione con proprietà di omogeneità e coll'esistenza di gruppi di trasformazioni congruenti, è la seguente: Se R è uno spazio metrico complesso tale, che per $n+3$ suoi punti $p_1, p_2, \ldots, p_{n+3}$ qualsiasi, esistono $n+3$ punti $p_1', p_2', \ldots, p'_{n+3}$ (non necessariamente distinti due a due) di K, rispettivamente $R_{n,s}$, con la proprietà, che $p_i' p_j' = p_i p_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n+3)$, allora esiste un insieme parziale R' di K_n, rispettivamente $R_{n,s}$, al quale R è *applicabile*, dove con questa espressione inten-

---

([12]) Vedi WALD, Ergebnisse 5, pp. 32-42.

([13]) Vedi MENGER, Ergebnisse 2, pag. 34; WALD-FLEXER, Ergebnisse 5, pag. 32 e per una ancora più estesa generalizzazione TAUSSKY, Ergebnisse 6, pag. 20.

([14]) Questa definizione e quelle dello spazio metrico reale e dello spazio metrico positivo delle pagine seguenti non sono da confondersi col concetto dello spazio metrico nel senso del FRÉCHET (vedi pag. 331).

diamo che ad ogni punto p di R si può far corrispondere un punto p' di R' tale che per le coppie di punti p, q e p', q' corrispondenti vale $pq = p'q'$. (Affinchè R e R' siano congruenti, è necessario e sufficiente che R sia applicabile a R' o R' a R mediante una trasformazione biunivoca).

Alla caratterizzazione di K_n e di $R_{n,s}$ serve la seguente definizione: Siano p_1, $p_2, \ldots, p_k$ punti qualsiasi di uno spazio metrico complesso, e indichiamo con $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & 0 & p_1p_2 & p_1p_3 \ldots & p_1p_k \\ 1 & p_1p_2 & 0 & p_2p_3 \ldots & p_2p_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & p_1p_k & p_2p_k & p_3p_k \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Evidentemente vale $\Delta(p_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta(p_1, p_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & p_1p_2 \\ 1 & p_1p_2 & 0 \end{vmatrix} = 2p_1p_2$ ecc. Affinchè uno spazio metrico complesso R sia applicabile, nel senso sopra detto, a un insieme parziale di K_n è necessario e sufficiente che per ogni $n+3$ punti p_1, $p_2, \ldots, p_{n+3}$ di R sia $\Delta(p_1, p_2, p_{n+3}) = 0$ e che per ogni $n+2$ punti $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}$ di R sia $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}) = 0$. Ogni spazio metrico contenente non più di $n+1$ punti è applicabile ad un insieme parziale di K_n.

Affinchè uno spazio metrico reale R sia applicabile a un insieme parziale di $R_{n,s}$ è necessario e sufficiente che per ogni $n+3$ e per ogni $n+2$ punti di esso sia $\Delta = 0$ e inoltre che ogni $n+1$ punti di R siano applicabili a punti di $R_{n,s}$. Se per $n+1$ punti $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ di uno spazio metrico reale è $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}) \neq 0$, allora gli $n+1$ punti si possono numerare con $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n+1}}$ in modo che nella successione

$$(*) \qquad \Delta(p_{i_1}), \quad \Delta(p_{i_1}, p_{i_2}), \ldots, \quad \Delta(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n+1}})$$

due numeri consecutivi non siano mai entrambi nulli. Affinchè tali $n+1$ punti siano applicabili a punti di $R_{n,s}$ è necessario e sufficiente che nella (*) dopo che in essa si siano esclusi i termini eventualmente nulli si abbiano $\frac{n+s}{2}$ cambiamenti di segno. Così resta dunque chiaro che se $n+1$ punti con $\Delta \neq 0$ sono applicabili a punti di $R_{n,s}$ non sono applicabili a punti di un $R_{n,t}$ $(t \neq s)$.

Affinchè $n+1$ punti $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ con $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}) \neq 0$ siano applicabili a punti di $R_{n,n}$ (nel qual caso sono congruenti con $n+1$ punti di $R_{n,n}$, poichè due punti distinti qualsiasi di $R_{n,n}$ hanno fra loro una distanza non nulla) è dunque necessario e sufficiente che nella (*) si abbiano n cambiamenti di segno. Ma poichè $\Delta(p_{i_1}) = -1$, questo è possibile soltanto se

$$\operatorname{sgn} \Delta(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}) = (-1)^k \quad \text{per } k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Con questo è anche possibile ottenere la caratterizzazione del R_n, dello spazio euclideo a n dimensioni ([15]), in cui la distanza di due punti qualsiasi è la radice quadrata dei punti di $R_{n,n}$ con eguali coordinate. Introduciamo in questo caso in luogo di Δ per k punti p_1, p_2,...., p_k il determinante

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & 0 & (p_1p_2)^2 & (p_1p_3)^2 \ldots & (p_1p_k)^2 \\ 1 & (p_1p_2)^2 & 0 & (p_2p_3)^2 \ldots & (p_1p_k)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (p_1p_k)^2 & (p_2p_k)^2 & (p_3p_k)^2 \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

e osserviamo, che noi ci limiteremo a considerare spazi metrici reali con distanze non-negative, o, come diremo *spazi metrici positivi.* Affinchè lo spazio metrico positivo R sia congruente a un insieme parziale di R_n è necessario e sufficiente che per ogni $n+2$ punti $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}$ di R sia $D(p_1, p_2, \ldots, p_{n+2})=0$ e che per ogni $k(2 \leqq k \leqq n+1)$ e per ogni k punti p_1, p_2,...., p_k sia

$$\operatorname{sgn} D(p_1, p_2, \ldots, p_k) = (-1)^k \quad \text{o} \quad 0.$$

Nel caso che R consista esattamente di $n+3$ punti $p_1, p_2, \ldots, p_{n+3}$, deve ancora aggiungersi la condizione $D(p_1, p_2, \ldots, p_{n+3})=0$.

Se invece R contiene più di $n+3$ punti, allora R è già congruente a un insieme parziale di R_n, quando ogni $n+2$ punti di R sono congruenti a $n+2$ punti di R_n (un'asserzione che sarebbe sbagliata per K_n o $R_{n,s}$, $0 \neq s \neq n$). Esistono però per ogni n spazi metrici positivi contenenti esattamente $n+3$ punti, che non sono congruenti a $n+3$ punti di R_n quantunque ogni $n+2$ dei loro punti siano congruenti a $n+2$ punti di R_n. Spazi di tale tipo verranno da noi chiamati $(n+3)$-ple pseudoeuclidee. Per $n=1$ si ottengono quadruple pseudoeuclidee, che si possono caratterizzare nel modo seguente: Affinchè 4 punti p_1, p_2, p_3, p_4 non siano congruenti a 4 punti di una retta, sebbene tutte le triple siano congruenti a triple di punti in linea retta, è necessario e sufficiente che per le 6 distanze valgano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= p_3p_4 > 0 \\ p_1p_3 &= p_2p_4 > 0 \\ p_1p_4 &= p_2p_3 = p_1p_2 + p_1p_3. \end{aligned}$$

Per $n=2$ si ottengono quintuple pseudoeuclidee la cui teoria è congiunta colla teoria delle trasformazioni isogonali del piano; se poi $n>2$ la teoria delle $(n+3)$-ple pseudoeuclidee si congiunge colla teoria di alcune trasformazioni cremoniane del R_n ([16]).

Affinchè uno spazio metrico positivo R sia congruente con lo R_n stesso, è, come risulta facilmente dalla teoria della convessità, necessario e sufficiente, che R

([15]) loc. cit. ([11]).

([16]) Vedi MENGER, Mathem. Annalen. 100, pp. 120-128.

sia completo, convesso internamente ed esternamente e inoltre soddisfi alle condizioni che assicurano la sua congruenza con un insieme parziale del R_n.

5. - Geometria differenziale senza coordinate.

Mentre gli spazi della geometria analitica possono venir subordinati, nel modo ora esposto, al concetto generale di spazio della geometria metrica senza coordinate, parve invece che un dominio particolarmente importante delle ricerche geometriche fosse legato indissolubilmente al concetto di coordinate e ai calcoli numerici della geometria analitica, voglio dire la geometria differenziale. L'unica via per la trattazione delle proprietà metriche locali delle figure spaziali parve finora essere il calcolo infinitesimale, che proprio agli scopi geometrici ha costruito da secoli tutto un completo simbolismo. Questo simbolismo e questi metodi così ricchi di conseguenze richiedono però, come ipotesi ineliminabile, che i punti dello spazio e delle figure studiate siano dati mediante coordinate. Ci sembra quindi degno di notevole interesse il fatto che anche la geometria metrica senza coordinate sia riuscita a trattare proprietà metriche locali delle figure dello spazio, senza che i loro punti sian dati mediante coordinate e senza che esse figure sian date mediante equazioni. Alcuni di questi teoremi contengono, se in particolare essi vengono applicati agli spazi euclidei, proposizioni della geometria differenziale classica, che così, attraverso la geometria metrica, risultano dimostrate senza calcolo differenziale ([17]).

Qui vorrei esporre solo un esempio, particolarmente importante, di questa geometria differenziale senza coordinate: la teoria della curvatura delle superfici, brevemente sviluppata nel colloquio matematico di Vienna ([18]). Siano dati 4 punti p_1, p_2, p_3, p_4 di uno spazio metrico, con le loro sei distanze $p_i p_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$; noi chiameremo *raggio di curvatura* dei punti p_1, p_2, p_3, p_4 un numero reale ϱ, nel caso che la superficie della sfera di raggio ϱ contenga 4 punti p_1', p_2', p_3', p_4' che sono congruenti con i 4 punti dati. Qui vien presa, come distanza di due punti della superficie sferica, la lunghezza del più breve fra i due archi di cerchio massimo, che congiungono i punti in questione. Con $P(p_1, p_2, p_3, p_4)$ denotiamo l'insieme di tutti i raggi di curvatura di p_1, p_2, p_3, p_4. Si mostra che quest'insieme può essere vuoto, e cioè che 4 punti dati possono non esser congruenti a 4 punti di nessuna superficie sferica. Può avvenire d'altro lato che l'insieme $P(p_1, p_2, p_3, p_4)$ contenga più di un numero, e cioè, che 4 punti dati siano eventualmente congruenti a 4 punti in superfici sferiche di raggi diversi.

Sia ora R uno spazio metrico compatto convesso, e p un punto dato di R; noi conveniamo di chiamare *p-successione* una successione di quadruple di punti $\{p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots,$ ad inf.), se in primo luogo, tali quadruple conver-

---

([17]) Vedi MENGER: Zur Theorie der Bogenkrümmung, Mathem. Annalen, 103, pag. 480, Jahresber. d. deutsch. Math. Ver., 50, pp. 211-213, 218.

([18]) Vedi WALD, Ergebnisse 6, pag. 29.

gono al punto p, cioè se si ha, per le distanze $p_i^n p$, $\lim\limits_{n\pm\infty} p_i^n p = 0$ $(i=1, 2, 3, 4)$, e, in secondo luogo, se soddisfano alla seguente condizione: se avendo denotata, per ogni n, con d_n la maggiore delle sei distanze $p_i^n p_j^n$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$, noi consideriamo la successione delle sestuple di numeri

$$\frac{p_1^n p_2^n}{d_n}, \quad \frac{p_1^n p_3^n}{d_n}, \quad \frac{p_1^n p_4^n}{d_n}, \quad \frac{p_2^n p_3^n}{d_n}, \quad \frac{p_2^n p_4^n}{d_n}, \quad \frac{p_3^n p_4^n}{d_n},$$

e se questa successione di sestuple possiede come sestupla di condensazione il gruppo dei sei numeri

$$\pi_{12}, \quad \pi_{13}, \quad \pi_{14}, \quad \pi_{23}, \quad \pi_{24}, \quad \pi_{34},$$

ognuno dei sei numeri π_{ij} è maggiore di zero, ed inoltre non esistono quattro punti q_1, q_2, q_3, q_4 di una retta, per i quali sia

$$q_1q_2=\pi_{12}, \quad q_1q_3=\pi_{13}, \quad q_1q_4=\pi_{14}, \quad q_2q_3=\pi_{23}, \quad q_2q_4=\pi_{24}, \quad q_3q_4=\pi_{34}.$$

Orbene, applicando il concetto di p-successione, la curvatura superficiale viene così definita: il numero reale $\varkappa$ dicesi *curvatura superficiale dello spazio R nel punto p*, se per ogni p-successione $\{p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n\}$ esiste un indice N con la proprietà che, per ogni $n > N$, possa trovarsi nell'insieme numerico $P(p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n)$ un numero ϱ_n tale che $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{\varrho_n^2} = \varkappa$. Sebbene possa accadere, come fu ricordato, che per ogni singolo n l'insieme $P(p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n)$ dei raggi di curvatura contenga diversi numeri, la curvatura superficiale di R in p, or ora difinita, si rivela *univoca*, e cioè, se $\varkappa$ è la curvatura superficiale di R in p, si può dimostrare che: comunque si prenda per ogni p-successione $\{p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n\}$ un numero $\bar{\varrho}_n$ fra l'insieme dei numeri $P(p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n)$, vale sempre $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{\bar{\varrho}_n^2} = \varkappa$. Inoltre si dimostra pure: se in particolare lo spazio R è una superficie di GAUSS, data mediante funzioni tre volte differenziabili, di uno spazio euclideo, esiste in tal caso, in ogni punto p, una curvatura superficiale di R in p, e questa coincide proprio con la curvatura di GAUSS della superficie nel punto p.

In questo modo si è dunque riusciti ad introdurre il concetto di curvatura superficiale senza coordinate. Ma il risultato di questa teoria, più degno di nota e che reca maggior stupore, è una specie di inversione dell'ultimo teorema ora ricordato. E cioè il seguente ([19]): se R è uno spazio metrico convesso e compatto, che possiede in ogni punto una curvatura superficiale (nel senso or ora precisato) finita, esso è congruente ad uno spazio riemanniano a due dimensioni, e cioè ad una superficie di GAUSS. Si osservi che oltre alla compattezza, alla convessità e

([19]) Vedi WALD, Ergebnisse quaderno 7, che uscirà in autunno 1935. In questo articolo verrà data anche una semplificazione della definizione sopraddetta della curvatura.

all'esistenza di una curvatura superficiale, non si fa sopra lo spazio metrico alcuna ipotesi da cui si possa, sulla base di quelle tre condizioni, dimostrare che trattasi proprio di una superficie di GAUSS. Non si suppone neanche che lo spazio sia a due dimensioni. La due-dimensionalità è del resto una conseguenza abbastanza immediata dell'esistenza di una curvatura superficiale finita. La maggior difficoltà nella dimostrazione dell'accennato teorema si incontra per provare che ogni punto di uno spazio compatto convesso con curvatura superficiale finita è congiunto ad ogni punto di un intorno abbastanza piccolo da un solo segmento (che due punti di uno spazio compatto convesso siano congiunti da almeno un segmento è un risultato della teoria della convessità). Questa unicità dei segmenti fra punti vicini dello spazio riproduce il fatto, fondamentale per la metrica delle superfici di GAUSS, che ogni punto di una superficie di GAUSS è congiunto ad ogni punto di un suo intorno opportunamente piccolo da una e una sola geodetica. L'ultima difficoltà della dimostrazione consiste poi nell'introdurre sui segmenti uscenti da un punto [segmenti che corrispondono alle linee geodetiche della superficie di GAUSS da costruire] un sistema di coordinate polari, e nel provare che per esso valgono proprio le classiche formule della geometria differenziale delle superfici.

È evidente che i metodi ricordati permettono di dedurre nuove rigorose dimostrazioni dei più importanti teoremi della geometria differenziale classica delle superfici sotto ipotesi straordinariamente generali; per es. di ottenere un nuovo sviluppo della teoria delle superfici a curvatura costante, ecc. Secondo l'opinione dei geometri del colloquio matematico di Vienna si hanno qui i primi passi verso una nuova fondazione di tutta la geometria differenziale; sicchè questa parte, la quale sembrava proprio la più lontana dai metodi geometrici senza coordinate, offrirà invece nel futuro — dopo i fondamentali risultati raggiunti da tali metodi nelle altre parti della geometria — uno dei più importanti campi della loro applicazione.