ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GUIDO ASCOLI

Sulle minime maggioranti concave e l'analisi delle funzioni continue

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 3 (1935), p. 251-266

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_3_251_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLE MINIME MAGGIORANTI CONCAVE E L'ANALISI DELLE FUNZIONI CONTINUE

di GUIDO ASCOLI (Milano).

§ 1. - Introduzione.

1. - In una Memoria ([1]), recentemente uscita negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ho dimostrato il teorema seguente:

« La funzione $f(x)$ sia limitata in $a \vdash\!\dashv b$ e sia $\bar{f}(x)$ il limite superiore della f in $a \vdash\!\dashv x$; la funzione $\bar{f}(x)$ potrà dirsi la *minima maggiorante non decrescente* di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$. Si può formare una successione $f_n(x)$ definita dalle formule

$$f_1(x)=\bar{f}(x)-f(x), \qquad f_{n+1}(x)=\bar{f}_n(x)-f_n(x).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia

$$\lim_{x \to \infty} f_n(x)=0$$

e valga quindi lo sviluppo

$$(A) \qquad f(x)=\bar{f}(x)-\bar{f}_1(x)+\bar{f}_2(x)-\dots$$

è che la $f(x)$ abbia al più discontinuità di 1ª specie.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè lo sviluppo (A) sia assolutamente convergente è che la $f(x)$ sia a variazione limitata. In tal caso, associando nello sviluppo i termini di posto pari e quelli di posto dispari si ottiene per $f(x)$ la decomposizione canonica di JORDAN; si ha cioè

$$\bar{f}(x)+\bar{f}_2(x)+\bar{f}_4(x)+\dots=f(a)+Pf(x), \qquad \bar{f}_1(x)+\bar{f}_3(x)+\dots=Nf(x)$$

avendo indicato con $Pf(x)$, $Nf(x)$ le variazioni, positiva e negativa, della f in $a \vdash\!\dashv x$ ».

Assai simili sono l'argomento, il metodo e i risultati del presente lavoro; si tratta infatti di un algoritmo formalmente identico a quello sopra indicato, salvo che, per una data funzione $f(x)$, il simbolo $\bar{f}(x)$ ha qui il valore di *minima maggiorante concava e continua* (la concavità essendo intesa nel senso di JENSEN ([2]),

([1]) *Sopra un nuovo algoritmo per la rappresentazione delle funzioni di variabile reale.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. III, 1934, pp. 243-254). Richiameremo in seguito con (M) questa Memoria.

([2]) Cfr. JENSEN (J. L. W. V.): *Sur les fonctions convèxes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* (Acta Mathem., 30, 1906, pp. 175-193).

cioè come concavità verso il basso); caso che è geometricamente più espressivo del precedente e che si presta facilmente ad una estensione alle funzioni di più variabili. Si pone anche qui la questione della validità dello sviluppo corrispondente ad (A) e che diremo *sviluppo* (A'); il risultato che si trova è ben semplice, poichè *condizione necessaria e sufficiente per la validità dello sviluppo* (A') *è che la* $f(x)$ *sia continua.*

Anche le condizioni per la convergenza *assoluta* dello sviluppo sono di estrema semplicità: occorre e basta che *la* $f(x)$ *sia differenza di due funzioni concave e continue nell'intervallo.* Le funzioni di questo tipo, che ho chiamato funzioni (D), hanno molte analogie (ed anche relazioni strettissime) con le funzioni a variazione limitata; in particolare si può assegnare per una funzione (D) una decomposizione *canonica*, nella differenza di due particolari funzioni concave e continue le quali soddisfano ad una certa proprietà di minimo. E vale allora anche qui il fatto notevole: *associando i termini di posto pari e quelli di posto dispari dello sviluppo* (A') *di una funzione* (D), *si ottiene per questa precisamente la suaccennata decomposizione canonica.*

Molto interessante appare infine un'ultima circostanza: che *per le funzioni* (D) *lo sviluppo* (A') *risulta derivabile termine a termine*, a destra e a sinistra di ogni punto interno all'intervallo. Collegati con questo fatto sono altri sviluppi notevoli uno dei quali, per esempio, dà il valore assoluto della differenza tra derivata destra e sinistra per la $f(x)$, espresso per le analoghe differenze per la $\bar{f}$ e le $\bar{f}_n$ [3].

§ 2. - La minima maggiorante concava e continua di una funzione limitata.

2. - Conviene che accertiamo anzitutto, nel modo per noi più conveniente, l'esistenza di una minima maggiorante concava continua di una funzione limitata $f(x)$ definita in un intervallo chiuso $a \vdash\!\dashv b$. Ciò potrebbe farsi per via geometrica, considerando l'insieme definito da

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad y \leqslant f(x),$$

e il minimo insieme convesso che lo contiene [4]. Si riconosce che il contorno di questo secondo insieme è costituito da due semirette $y < A$, $y < B$ delle rette $x = a$,

---

[3] Per le proprietà delle funzioni concave usate nel corso del lavoro, cfr., oltre la fondamentale Memoria di JENSEN già citata, anche GALVANI (L.): *Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque.* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 41, 1916, pp. 103-134); CINQUINI (S.): *Sopra un recente teorema di derivazione per serie del prof. Tonelli.* (Rend. Ist. Lombardo, 64, 1931, pp. 695-708).

[4] Per lo sviluppo di questo concetto si veda l'estesa trattazione di BONNESEN (T.) e FENCHEL (W.): *Theorie der konvexen Körper.* (Ergebn. d. Mathematik, 3 B., H. 1, 1934), §§ 1, 2.

$x=b$, e di una linea che è l'immagine della funzione cercata. Preferiamo qui giungere al risultato per via analitica, ciò che riesce assai semplice e breve, imitando del resto un noto procedimento di H. MINKOWSKI.

Per l'ipotesi che $f(x)$ sia limitata, esistono funzioni lineari $\sigma(x)=px+q$ maggioranti di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$; tali $\sigma(x)$ hanno, per ogni x, un limite inferiore $\bar{f}(x)$; *diciamo che* $\bar{f}(x)$ *è concava e continua in* $a \vdash\!\dashv b$. Dimostreremo anzi più generalmente il teorema seguente:

Sia Σ *una classe di funzioni lineari* $\sigma(x)$, *che in un certo intervallo* $a \vdash\!\dashv b$ *sono tutte maggiori di un certo numero* m; *il limite inferiore* $\varphi(x)$ *dei valori delle* $\sigma(x)$ *per ogni* x *in* $a \vdash\!\dashv b$ *è una funzione concava e continua in* $a \vdash\!\dashv b$.

Per la prima proprietà basta osservare che per tre valori arbitrari x_1, x_2, x_3 dell'intervallo, con $x_1<x_2<x_3$, e per ogni $\sigma(x)$, si ha

$$\sigma(x_2)=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\,\sigma(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\,\sigma(x_3)$$

da cui, prendendo i limiti inferiori al variare di $\sigma(x)$ in Σ,

$$\varphi(x_2)\geqslant\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\,\varphi(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\,\varphi(x_3). \tag{1}$$

Per la seconda proprietà, che basterebbe del resto provare per $x=a$ e $x=b$ [5], teniamo nella (1) x_1 e x_3 fissi e facciamo tendere x_2 ad x_1. Poichè il secondo membro tende a $\varphi(x_1)$ vediamo che i limiti di indeterminazione di $\varphi(x)$ per $x\to x_1+0$ sono $\geqslant\varphi(x_1)$. D'altra parte, per una qualunque $\sigma(x)$ di Σ si ha $\varphi(x)\leqslant\sigma(x)$ e quindi i detti limiti di indeterminazione sono $\leqslant\sigma(x_1)$. E se si osserva finalmente che, per la definizione stessa di $\varphi(x)$, esistono valori $\sigma(x_1)$ prossimi quanto si vuole a $\varphi(x_1)$, si conclude che i detti limiti coincidono con $\varphi(x_1)$, cioè che $\varphi(x)$ è continua a destra per ogni $x<b$. Analogamente si prova la continuità a sinistra per ogni $x>a$.

3. - Proviamo ora che $\bar{f}(x)$ *è la minima funzione concava continua che maggiora* $f(x)$. Infatti sia $F(x)$ una funzione concava continua tale che $F(x)\geqslant f(x)$; per ogni ξ interno ad $a \vdash\!\dashv b$ la $F(x)$ ammette derivata destra finita $F_d'(\xi)$, e la funzione lineare

$$\sigma(x)=F(\xi)+(x-\xi)F_d'(\xi),$$

rappresentata dalla tangente a destra alla grafica di $F(x)$ corrispondente alla ascissa ξ, è maggiorante di $F(x)$ e quindi di $f(x)$. Per la definizione di $\bar{f}(x)$ è dunque $\sigma(x)\geqslant\bar{f}(x)$ e in particolare $\sigma(\xi)\geqslant\bar{f}(\xi)$ cioè $F(\xi)\geqslant\bar{f}(\xi)$. Con ciò la tesi è dimostrata per ogni x diverso da a e b; per questi valori essa segue dalla supposta continuità di $F(x)$ e $\bar{f}(x)$ anche negli estremi dell'intervallo.

---

[5] Una funzione concava limitata in un intervallo è continua in ogni punto interno all'intervallo (JENSEN).

4. - La determinazione di $\bar{f}(x)$ può compiersi effettivamente nel modo seguente. Nella funzione lineare $px+q$ teniamo fisso p e determiniamo q in modo che essa sia una $\sigma(x)$; dovrà essere

$$px+q \geqslant f(x), \qquad q \geqslant f(x)-px, \qquad q \geqslant \alpha(p)$$

avendo posto

$$\alpha(p) = \limsup \{f(x)-px\}, \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Tra le dette $\sigma(x)$ è dunque minima la

$$\sigma_p(x) = px + \alpha(p)$$

e per il calcolo di $\bar{f}(x)$ basterà servirsi delle $\sigma_p(x)$, cioè determinare il limite inferiore di $\sigma_p(x)$ al variare di p tra $-\infty$ e $+\infty$.

5. - Supponendo ora in particolare $f(x)$ superiormente semicontinua (o in particolare continua) studieremo l'insieme I dei punti di $a \vdash\!\dashv b$ in cui è $\bar{f}(x)=f(x)$. Diciamo intanto che esso non è mai vuoto poichè vi appartengono i punti a e b. Basterà provare la cosa per a, e per questo, essendo certamente $\bar{f}(a) \geqslant f(a)$, basterà provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una $\sigma(x)$ che assume per $x=a$ il valore $f(a)+\varepsilon$.

Si consideri infatti la funzione lineare $f(a)+\varepsilon+p(x-a)$ e si cerchi di determinare p in modo che essa sia una $\sigma(x)$; risulta subito la condizione

$$p \geqslant \frac{f(x)-f(a)-\varepsilon}{x-a} \tag{2}$$

per $a < x \leqslant b$. Ora esiste un intorno $a \vdash\!\dashv a+h$ di a in cui è $f(x) < f(a)+\varepsilon$, e quindi il secondo membro della (2) è negativo; nel rimanente intervallo $a+h \vdash\!\dashv b$ lo stesso secondo membro è funzione superiormente semicontinua e quindi superiormente limitata; è dunque possibile soddisfare alla (2) e il nostro asserto è dimostrato.

Diciamo in secondo luogo che *I è chiuso*; ed infatti essendo la funzione $f(x)-\bar{f}(x)$ superiormente semicontinua e non positiva, si riconosce subito che in un punto di accumulazione di punti ove essa è nulla il suo valore non può essere nè positivo nè negativo.

Proveremo finalmente che *in un intervallo $x_1 \vdash\!\dashv x_2$ contiguo ad I la $\bar{f}(x)$ è lineare*. Sia infatti $l(x)$ la funzione lineare definita dalle condizioni

$$l(x_1) = f(x_1) = \bar{f}(x_1), \qquad l(x_2) = f(x_2) = \bar{f}(x_2),$$

e si cerchi di determinare λ in modo che $l(x)+\lambda$ sia una $\sigma(x)$. Come al n.º 4 otteniamo come minimo valore di λ il limite superiore, che per le nostre ipotesi sarà un massimo, di $f(x)-l(x)$.

Ora dalle proprietà delle funzioni concave si ha che per $a \leqslant x < x_1$, $x_2 < x \leqslant b$ è $l(x) \geqslant \bar{f}(x)$ e quindi $l(x) \geqslant f(x)$, $f(x)-l(x) \leqslant 0$; per $x_1 < x < x_2$ è invece $l(x) \leqslant \bar{f}(x)$. Se ammettiamo che tra x_1 e x_2 $f(x)-l(x)$ assuma anche valori positivi, il suo massimo tra a e b si avrà in un punto ξ tra x_1 e x_2, sicchè la $l(x)+f(\xi)-l(\xi)$

sarà una $\sigma(x)$; e poichè per $x=\xi$ essa assume il valore $f(\xi)$ sarà necessariamente $\bar{f}(\xi)=f(\xi)$. Esisterebbe dunque in tal caso tra x_1 e x_2 un punto di I, contro l'ipotesi. Dunque anche tra x_1 e x_2 è $f(x)-l(x)\leqq 0$, $l(x)$ è una $\sigma(x)$ ed è perciò $l(x)\geqq\bar{f}(x)$. Ma tra x_1 e x_2 è anche $l(x)\leqq\bar{f}(x)$, dunque in questo intervallo è $\bar{f}(x)=l(x)$ e il teorema è dimostrato.

6. - Ci saranno utili in seguito le seguenti osservazioni:

a). *Se* $f(x)\geqq g(x)$ *sarà* $\bar{f}(x)\geqq\bar{g}(x)$.

Ed infatti è $\bar{f}(x)\geqq f(x)\geqq g(x)$, sicchè $\bar{f}(x)$ è una maggiorante concava continua di $g(x)$; ma $\bar{g}(x)$ è la minima, dunque $\bar{f}(x)\geqq\bar{g}(x)$.

b). *Se le funzioni superiormente semicontinue* $f_n(x)$ *tendono senza mai crescere ad una funzione* (*superiormente semicontinua*) $f(x)$, *sarà*

$$\lim_{n\to\infty}\bar{f}_n(x)=\bar{f}(x) \qquad \text{(cfr. (M), n.° 3).}$$

Anzitutto, essendo $f_n(x)\geqq f_{n+1}(x)\geqq f(x)$ sarà, per *a*),

$$\bar{f}_n(x)\geqq\bar{f}_{n+1}(x)\geqq\bar{f}(x)$$

e quindi le $\bar{f}_n(x)$ hanno per $n\to\infty$ una funzione limite $g(x)\geqq\bar{f}(x)$.

Riprendiamo ora per le $\bar{f}_n(x)$ la costruzione del n.° 4: se $a_n(p)$ è il massimo di $f_n(x)-px$ al variare di x in $a\vdash\!\dashv b$, $\bar{f}_n(x)$ è il limite superiore di $px+a_n(p)$ al variare di p tra $-\infty$ e $+\infty$. Qui le funzioni $f_n(x)-px$ sono superiormente semicontinue e tendono senza crescere a $f(x)-px$; si rende quindi applicabile un teorema noto ((M), n.° 3) che dà

$$\lim_{n\to\infty}a_n(p)=\max\,(f(x)-px)=a(p).$$

È poi

$$\bar{f}_n(x)\leqq px+a_n(p),$$

e al limite per $n\to\infty$

$$g(x)\leqq px+a(p)$$

e quindi, prendendo il limite inferiore del secondo membro al variare di p,

$$g(x)\leqq\bar{f}(x)$$

Confrontando i due risultati ottenuti per la $g(x)$ vediamo che è

$$g(x)=\bar{f}(x)$$

cioè la tesi.

§ 3. - Lo sviluppo (A') per le funzioni continue.

7. - Sia ora $f(x)$ una qualunque funzione definita e limitata in $a\vdash\!\dashv b$ e $\bar{f}(x)$ la sua minima maggiorante concava e continua; se poniamo

$$f_1(x)=\bar{f}(x)-f(x)$$

la $f_1(x)$ sarà pure limitata in $a \,|\!\!-\!\!|\, b$ e non negativa. Formiamo allora la minima maggiorante concava e continua di $f_1(x)$ e sia $\bar{f}_1(x)$, e poniamo

$$f_2(x) = \bar{f}_1(x) - f_1(x)$$

e così via.

Viene così a determinarsi una successione $f_n(x)$ di funzioni non negative in $a \,|\!\!-\!\!|\, b$ la cui legge di formazione è

$$f_{n+1}(x) = \bar{f}_n(x) - f_n(x);$$

da questa si ha poi, per successive sostituzioni,

(1) $$f(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x) - \ldots. + (-1)^n \bar{f}_n(x) + (-1)^{n+1} f_n(x).$$

Ci possiamo allora domandare per quali funzioni $f(x)$ si ha

(2) $$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

sicchè valga lo sviluppo, che potrà dirsi *per minime maggioranti concave e continue*

(A') $$f(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x) - \ldots.$$

Si vede subito che una tale funzione $f(x)$ è necessariamente continua; vedremo infatti tra poco che è $\bar{f}_{n+1}(x) < \bar{f}_n(x)$, sicchè se $\bar{f}_n(x)$ tende a zero per $n \to \infty$ vi tende uniformemente, per un noto teorema di Dini; lo stesso avviene allora per $f_n(x) \leqslant \bar{f}_n(x)$ e quindi anche per il termine complementare dello sviluppo abbreviato (1); lo sviluppo (A') è dunque equiconvergente ed $f(x)$ è continua. Si noti anzi che il secondo membro della (A') non può convergere in $a \,|\!\!-\!\!|\, b$ senza rappresentare la $f(x)$.

Dimostreremo ora che il risultato si può invertire, sicchè *condizione necessaria e sufficiente affinchè valga lo sviluppo* (A') (*anzi perchè lo sviluppo stesso converga*) *è che la* $f(x)$ *sia continua.*

8. - *a*). È anzitutto $\bar{f}_{n+1}(x) \leqslant \bar{f}_n(x)$. Si ha infatti $f_{n+1}(x) = \bar{f}_n(x) - f_n(x) < \bar{f}_n(x)$; dunque $\bar{f}_n(x)$ è una maggiorante concava continua di $f_{n+1}(x)$, e perciò $\bar{f}_n(x) \geqslant \bar{f}_{n+1}(x)$.

b). È poi $f_{n+2}(x) \leqslant f_n(x)$. Si ha infatti

$$f_{n+2}(x) = \bar{f}_{n+1}(x) - f_{n+1}(x) = \bar{f}_{n+1}(x) - \bar{f}_n(x) + f_n(x),$$

donde, per *a*), la tesi.

c). Da *a*), *b*) risulta che le successioni $\bar{f}_n(x)$, $f_{n-1}(x)$, $f_{2n}(x)$ tendono per $n \to \infty$ a tre funzioni determinate, non negative; dimostreremo che *se* $f(x)$ *è continua* questi limiti sono nulli.

Si ponga per questo

$$\lim_{n \to \infty} f_{2n-1}(x) = \varphi(x);$$

poichè le $f_{2n-1}(x)$ sono continue e tendono senza mai crescere a $\varphi(x)$, è applicabile il teorema *b*) del n.° 6, e si ha

$$\lim_{n \to \infty} \bar{f}_{2n-1}(x) = \bar{\varphi}(x).$$

Sottraendo:
$$\lim_{n\to\infty} f_{2n}(x)=\overline{\varphi}(x)-\varphi(x)=\varphi_1(x)$$
ed essendo ancora applicabile lo stesso teorema
$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_{2n}(x)=\overline{\varphi}_1(x)$$
Ma $\overline{f}_{2n-1}(x)$ e $\overline{f}_{2n}(x)$ hanno lo stesso limite, che è quello di $\overline{f}_n(x)$; dunque è

(3) $$\overline{\varphi}(x)=\overline{\varphi}_1(x).$$

Di qui, e dal fatto che $\varphi(x)$ e $\varphi_1(x)$ sono superiormente semicontinue, si ricava che è $\varphi(x)=0$, e quindi la tesi. Sia x_0 un punto in cui $\varphi(x)$ prende il suo valore massimo e sia questo >0; potremo anzi supporre che sia x_0 il minimo valore di x per cui $\varphi(x)$ diviene massima. Esso non è a perchè per $x=a$ è (n.° 5) $\overline{f}(a)=f(a)$, $f_1(a)=0$, $f_2(a)=0,\ldots$, e al limite $\varphi(a)=0$. Sarà allora evidentemente $\overline{\varphi}(x_0)=\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_0)=0$; e per $a\leqslant x<x_0$ sarà $\varphi(x)<\varphi(x_0)$.

Ora dalla (3) segue $\overline{\varphi}_1(x_0)=\overline{\varphi}(x_0)>0$ mentre $\varphi_1(x_0)=0$; segue (n.° 5) che in un intorno $x_1 \frown x_2$ di x_0 la $\overline{\varphi}_1(x)$, e cioè la $\overline{\varphi}(x)$, è lineare. Se ora prendiamo come intorno $x_1 \frown x_2$ il massimo in cui ciò avviene, dovrà essere
$$\varphi(x_1)=\overline{\varphi}(x_1), \qquad \varphi(x_2)=\overline{\varphi}(x_2)$$
chè se avvenisse l'opposto, per esempio $\varphi(x_1)<\overline{\varphi}(x_1)$ l'intorno si potrebbe prolungare oltre x_1 con la stessa proprietà. Ne viene che $\varphi(x_0)$ è compreso tra $\varphi(x_1)$ e $\varphi(x_2)$. Ma $\varphi(x_0)$ è il valore massimo di $\varphi(x)$; dunque è $\varphi(x_1)=\varphi(x_0)$ ed esiste cioè un $x_1<x_0$ in cui $\varphi(x)$ prende il valore massimo. Ciò è contro il supposto; è dunque identicamente $\varphi(x)=0$, $\varphi_1(x)=0$, vale la (2), e il teorema è dimostrato.

§ 4. - Funzioni che sono differenza di due funzioni concave e continue.

9. - Alla seconda parte della nostra ricerca dobbiamo premettere un breve studio di una classe di funzioni che ha stretta analogia con quella delle funzioni a variazione limitata. Si tratta delle funzioni $f(x)$ che sono differenze di due funzioni $g(x)$, $h(x)$ concave e continue in $a \vdash\!\dashv b$:

(1) $$f(x)=g(x)-h(x)$$

(od anche delle $-h(x)$, $-g(x)$, convesse e continue in $a \vdash\!\dashv b$). Le diremo per brevità funzioni (D).

Nostro scopo principale è di dare per esse una rappresentazione canonica analoga a quella di Jordan per le funzioni a variazione limitata.

Notiamo anzitutto alcune proprietà delle funzioni (D). Poichè una funzione concava ammette in ogni punto interno all'intervallo derivata a destra e a sinistra finite, mai crescenti, differenti tra loro al più in un insieme numerabile di punti, la prima continua a destra, la seconda a sinistra, si può affermare che:

Una funzione (D) *ammette in ogni punto interno ad* $a \vdash\!\dashv b$ *derivata destra continua a destra, derivata sinistra continua a sinistra, diverse tra loro al massimo in un insieme numerabile, ciascuna a variazione limitata in ogni tratto* $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ *interno ad* $a \vdash\!\dashv b$. *Le loro variazioni (positiva, negativa e totale) relative all'interno di* $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ *sono eguali.*

Ricordando poi che una funzione concava e continua in $a \vdash\!\dashv b$ è assolutamente continua [6], si conclude anche che *una funzione* (D) *è assolutamente continua; essa è quindi un integrale indefinito* (secondo Lebesgue) *della derivata destra o sinistra; queste derivate sono perciò integrabili in tutto* $a \vdash\!\dashv b$ (e non solo in una sua parte interna).

10\. - La decomposizione (1) di una funzione (D), $f(x)$, non è evidentemente unica, potendosi aggiungere a $g(x)$ e $h(x)$ una qualunque funzione concava o, in particolare, lineare. Con quest'ultimo mezzo si può ottenere, per esempio, che sia

$$h(a) = h(b) = 0$$

e quindi

$$g(a) = f(a), \qquad g(b) = f(b).$$

Noi otterremo ora una particolare decomposizione di questo tipo, perfettamente determinata dalla $f(x)$, mediante le seguenti considerazioni.

Introduciamo per questo le notazioni seguenti. Essendo $\varphi(x)$ una funzione a variazione limitata in ogni parte $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ interna ad $a \vdash\!\dashv b$, indichiamo rispettivamente con

$$[P\varphi]_\alpha^\beta, \qquad [N\varphi]_\alpha^\beta, \qquad [T\varphi]_\alpha^\beta$$

le variazioni, positiva negativa e totale, di φ in $\alpha \vdash\!\dashv \beta$. Poniamo poi

$$[P\varphi]_\beta^\alpha = -[P\varphi]_\alpha^\beta$$

ed analoghe.

Si indichi ora con $f'(x)$ la derivata destra o la derivata sinistra di $f(x)$, ed essendo c un punto interno ad $a \vdash\!\dashv b$ si ponga

$$\pi(x) = [Pf']_c^x, \qquad \nu(x) = [Nf']_c^x, \qquad \tau(x) = [Tf']_c^x.$$

Queste tre funzioni sono integrabili in $a \vdash\!\dashv b$; si ha infatti, indicando ancora con l'apice derivate destre o sinistre, per ogni $x \geqslant c$,

$$0 \leqslant \tau(x) = [Tf']_c^x \leqslant [Tg']_c^x + [Th']_c^x$$

ed essendo $g'(x)$, $h'(x)$ non crescenti

$$0 \leqslant \tau(x) \leqslant g'(c) - g'(x) + h'(c) - h'(x)$$

dove il secondo membro è integrabile tra c e b. E analogamente per l'integrabilità tra a e c. Ne segue subito l'integrabilità di $\pi(x)$ e $\nu(x)$.

---

[6] Cinquini, loc. cit., n.° 1.

Poniamo allora:

$$(2)\qquad G(x)=l(x)+\frac{x-a}{b-a}\int_a^b \nu(t)dt-\int_a^x \nu(t)dt, \qquad H(x)=\frac{x-a}{b-a}\int_a^b \pi(t)dt-\int_a^x \pi(t)dt$$

avendo indicato con $l(x)$ la funzione lineare che coincide con $f(x)$ agli estremi dell'intervallo, e cioè

$$l(x)=f(a)+\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)].$$

Si riconosce subito che $G(x)$ e $H(x)$ non dipendono da c; se infatti si muta c in un altro punto c_1, le funzioni $\pi(t)$, $\nu(t)$ vengono aumentate di due costanti che non mutano evidentemente il risultato del calcolo (7). È poi evidente che esse sono continue; si vede poi che sono concave, in vari modi; per esempio verificando la condizione di JENSEN

$$G(x+h)+G(x-h)-2G(x)\leqq 0 \text{ ecc.}$$

Si ha infatti

$$G(x+h)+G(x-h)-2G(x)=\int_{x-h}^{x} \nu(t)dt-\int_{x}^{x+h} \nu(t)dt=$$

$$=\int_0^h [\nu(x-t)-\nu(x+t)]dt=-\int_0^h [Nf']_{x-t}^{x+t}dt\leqq 0.$$

E si ha infine, essendo $\pi(x)-\nu(x)=f'(x)-f'(c)$,

$$G(x)-H(x)=l(x)-\frac{x-a}{b-a}\int_a^b [f'(t)-f'(c)]dt+\int_a^x [f'(t)-f'(c)]dt=$$

$$=l(x)-\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)]+f(x)-f(a)=f(x).$$

Si ha dunque così una decomposizione della $f(x)$, che possiamo dire *canonica*, nella differenza di due particolari funzioni concave, che è quella che avevamo in vista. Per essa si ha, come è evidente

$$G(a)=f(a), \qquad G(b)=f(b), \qquad H(a)=0, \qquad H(b)=0$$

onde essa rientra nel tipo accennato in principio di questo paragrafo.

11. - Possiamo ora provare che la nostra decomposizione canonica possiede una proprietà di minimo analoga a quella della decomposizione di JORDAN delle

(7) Tale indipendenza si mette in luce anche ponendo le $G(x)$, $H(x)$ sotto la forma meno semplice

$$G(x)=l(x)+\frac{1}{b-a}\int_a^x du\int_a^b [Nf']_u^t dt, \qquad H(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^x du\int_a^b [Pf']_u^t dt.$$

funzioni a variazione limitata. E cioè: *fra tutte le funzioni concave e continue in* $a \vdash\!\dashv b$, $g(x)$, $h(x)$, *la seconda delle quali nulla agli estremi, per le quali è*

$$g(x) - h(x) = f(x)$$

la $G(x)$ *e la* $H(x)$ *sono le minime:*

$$G(x) \leqslant g(x), \qquad H(x) \leqslant h(x).$$

Per la dimostrazione, si prendano tra a e b i valori arbitrari x_0, x e sia $x_0 < x$; si ha allora

$$f'(x) - f'(x_0) = [h'(x_0) - h'(x)] - [g'(x_0) - g'(x)],$$

formula che decompone la funzione a variazione limitata $f'(x) - f'(x_0)$, nulla in x_0, nella differenza di due funzioni non decrescenti, nulle in x_0. Per le note proprietà delle variazioni, positiva e negativa, di una funzione sarà perciò

$$h'(x_0) - h'(x) \geqslant [Pf']_{x_0}^{x}, \qquad g'(x_0) - g'(x) \geqslant [Nf']_{x_0}^{x}.$$

La seconda diseguaglianza può scriversi

$$g'(x_0) - g'(x) \geqslant \nu(x) - \nu(x_0), \qquad g'(x) + \nu(x) \leqslant g'(x_0) + \nu(x_0)$$

e prova che la funzione $g'(x) + \nu(x)$ non è mai crescente. Ne segue, per il teorema della media

$$\frac{\int_a^x [g'(t) + \nu(t)]dt}{x - a} \geqslant \frac{\int_x^b [g'(t) + \nu(t)]dt}{b - x}.$$

Da questa relazione, notando che $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ si ottiene

$$(b - x)\left[g(x) - f(a) + \int_a^x \nu(t)\,dt\right] \geqslant (x - a)\left[f(b) - g(x) + \int_a^b \nu(t)\,dt - \int_a^x \nu(t)\,dt\right]$$

e ricavando $g(x)$

$$g(x) \geqslant \frac{(b - x)f(a) + (x - a)f(b)}{b - a} + \frac{x - a}{b - a}\int_a^b \nu(t)\,dt - \int_a^x \nu(t)\,dt = G(x)$$

come si voleva.

In modo analogo, anzi più semplice, risulta che $h(x) \geqslant H(x)$, e il teorema è così dimostrato.

12. - a). Per ottenere le funzioni $G(x)$, $H(x)$, tenuto conto che la loro differenza è nota $(= f(x))$, basta calcolare la somma $G(x) + H(x)$; essa è data da

$$G(x) + H(x) = l(x) + \frac{x - a}{b - a}\int_a^b \tau(t)\,dt - \int_a^x \tau(t)\,dt \tag{3}$$

e richiede quindi la sola conoscenza della variazione totale di $f'(x)$.

b). In seguito al risultato del n.° 11 non sarebbe necessario verificare che le formule (2), (3) danno il medesimo risultato, sia che le variazioni che in esse compariscono si riferiscano alla derivata destra o a quella sinistra; ma la cosa non offre difficoltà. Basta osservare che il risultato non dipende dalla scelta di c; e che se c è un punto ove la derivata è unica le variazioni della derivata destra e sinistra coincidono ogni qual volta x è un punto ove la derivata è unica; cioè quasi ovunque.

c). Con l'analoga considerazione si prova che se per c si prende un punto ove la derivata è unica, le variazioni tra c e x si possono calcolare *nell'interno* dell'intervallo, risultando così indipendenti dalla derivata scelta; e che si può anche calcolarle, ciò che ci sarà utile in seguito, interpretando $f'(x)$ come una qualunque funzione compresa tra le due derivate, destra e sinistra, e quindi differente da queste al più in un insieme numerabile.

d). Ci converrà indicare la costruzione delle G e H mediante uno speciale simbolo di operazione; porremo per questo

$$(4) \qquad \begin{cases} N^*f(x) = \dfrac{x-a}{b-a}\displaystyle\int_a^b \nu(t)dt - \int_a^x \nu(t)dt, \\ P^*f(x) = \dfrac{x-a}{b-a}\displaystyle\int_a^b \pi(t)dt - \int_a^x \pi(t)dt, \\ T^*f(x) = \dfrac{x-a}{b-a}\displaystyle\int_a^b \tau(t)dt - \int_a^x \tau(t)dt = N^*f(x) + P^*f(x). \end{cases}$$

dimodochè la decomposizione canonica della $f(x)$ sarà data da

$$f(x) = l(x) + N^*f(x) - P^*f(x)$$

con il solito significato di $l(x)$.

Si noti che le funzioni definite dalle (4) sono concave e continue, nulle agli estremi, e quindi non negative ([8]).

§ 5. - Condizioni per l'assoluta convergenza dello sviluppo (A').

13. - Possiamo ora affrontare la questione di riconoscere in quali casi lo sviluppo (A') di una funzione continua $f(x)$ riesca assolutamente convergente. Si dimostra intanto subito che sotto questa ipotesi la serie $\sum\limits_1^\infty f_n(x)$ riesce uniforme-

([8]) La considerazione delle funzioni (D) è da riconnettersi alla ricerca con cui F. Riesz ha ottenuto per la prima volta il suo celebre teorema sui funzionali lineari nel campo delle funzioni continue [C. R. Acad. Sc., 2° sem. 1909, Ann. de l'Ec. N. Sup., 28, 1911, pp. 33-62 (in special modo pp. 33-36)]; in essa si dà una proprietà caratteristica delle funzioni che sono integrali di una funzione a variazione limitata *in tutto* un intervallo (e quindi speciali funzioni (D)), proprietà analoga di quella che definisce le funzioni a variazione limimente convergente (9). Ed infatti sia c un punto interno all'intervallo; nell'intervallo $a \vdash\!\dashv c$ la curva $y = f_n(x)$ rimane al disotto della secante che unisce i punti $(c, f_n(c))$, $(b, 0)$; ciò dà la diseguaglianza, valida per $a \leqslant x \leqslant c$

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{b-x}{b-c} f_n(c) \leqslant \frac{b-a}{b-c} f_n(c)$$

e questa, essendo $\sum f_n(c)$ convergente, prova l'asserita equiconvergenza nell'intervallo $a \vdash\!\dashv c$. In modo analogo la si prova per l'intervallo $c \vdash\!\dashv b$.

Da questa osservazione segue che se lo sviluppo (A') è assolutamente convergente le serie convergenti formate dai termini di posto pari e da quelli di posto dispari rappresentano due funzioni concave e continue, di cui la $f(x)$ è differenza; dunque *la* $f(x)$ *è una funzione* (D).

Nei paragrafi seguenti invertiremo questo risultato, e dimostreremo di più che *la decomposizione ora accennata è precisamente la decomposizione canonica definita nel* § 4.

14. - a). Sia dunque $f(x)$ una funzione (D) e

$$f(x) = l(x) + N^*f(x) - P^*f(x)$$

la sua rappresentazione canonica. Sarà

$$f_1(x) = [\bar{f}(x) - l(x) + P^*f(x)] - N^*f(x)$$

e ciò prova che $f_1(x)$ è ancora una funzione (D). Ma non è questa la rappresentazione canonica di $f_1(x)$, bensì la seguente

$$f_1(x) = P^*f(x) - [N^*f(x) + l(x) - \bar{f}(x)]$$

come ora ci proponiamo di dimostrare. Vogliamo cioè provare le relazioni

$$N^*f_1(x) = P^*f(x), \qquad P^*f_1(x) = N^*f(x) + l(x) - \bar{f}(x) \tag{1}$$

e basterà per questo dimostrare la prima.

b). Dedurremo la relazione cercata da una analoga per le variazioni $\nu_1(x)$, $\pi(x)$ relative a $f_1'(x)$ e $f'(x)$, ciò che ci sarà facilitato dando a queste derivate una interpretazione particolare, consentita da ciò che si è detto nel n.° 12, c). Si osservi per questo che essendo $f_1(x) \geqslant 0$, in un punto ove è $f_1(x) = 0$ si ha

$$D^- f_1(x) \leqslant 0, \qquad D^+ f_1(x) \geqslant 0$$

---

tata. Profittando della proprietà indicata, convenientemente modificata, o di altra analoga, non dovrebbe esser difficile istituire una teoria delle funzioni (D) indipendente dalla considerazione delle loro derivate, giungendo in particolare alla rappresentazione canonica per una via analoga a quella seguita da JORDAN per le funzioni a variazione limitata.

(9) Ripetiamo qui in sostanza, convenientemente semplificata, la dimostrazione data dal CINQUINI (loc. cit., n.° 2) per un teorema più generale.

e quindi, tenuto conto che $\bar{f}(x)$ è concava:

$$D^{-}f(x) \geqslant D^{-}\bar{f}(x) \geqslant D^{+}\bar{f}(x) \geqslant D^{+}f(x)$$

(donde si vede anche che se esiste $Df(x)$ esiste anche $D\bar{f}(x)$ e le è eguale) ([10]).

Porremo allora $\bar{f}'(x) = D^{+}\bar{f}(x)$ ovunque; $f'(x) = D^{+}f(x)$ in ogni punto x ove sia $f(x) < \bar{f}(x)$, $f'(x) = D^{+}\bar{f}(x)$ negli altri punti; in corrispondenza sarà $f_1'(x) = D^{+}f_1(x)$ nei primi punti, $f_1'(x) = 0$ nei secondi. Si avrà così in ogni caso

$$f_1'(x) = \bar{f}'(x) - f'(x).$$

c). Ciò posto, sia $a < \alpha < \beta < b$ e supponiamo per semplicità che in α e β esista la derivata ordinaria di $f(x)$ (e quindi di $\bar{f}(x)$, $f_1(x)$). Si dica I l'insieme formato da α, β e dai punti di $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ in cui è $\bar{f}(x) = f(x)$, $f_1(x) = 0$. Sappiamo (n.° 5) che I è chiuso; siano $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ gli intervalli aperti continui ad I, π_r la variazione positiva di $f'(x)$ in i_r.

Poichè in i_r la $\bar{f}(x)$ è lineare, e quindi la $\bar{f}'(x)$ costante, la variazione negativa di $f_1'(x)$ in i_r sarà eguale alla variazione positiva di $f'(x)$ in i_r, cioè a π_r.

d). Cerchiamo ora di valutare la variazione negativa di $f_1'(x)$ in $\alpha \vdash\!\dashv \beta$, o, ciò che è lo stesso, *entro* $\alpha \vdash\!\dashv \beta$. Eseguiamo per ciò una divisione qualunque dell'intervallo; se un punto di divisione non è in I, e quindi sta in un certo i_r, aggreghiamo ai punti di divisione gli estremi di questo i_r. Avremo così due sorta di intervalli: intervalli appartenenti a qualche i_r e che riempiranno anzi alcuni di essi, per esempio $i_1, i_2, \ldots, i_n$, e intervalli residui, aventi per estremi due punti di I, appartenenti a due diversi i_r. Calcolando la somma degli incrementi negativi di $f_1'(x)$ in questi intervalli troviamo una somma $\leqslant \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n$ negli intervalli della prima specie, zero nei secondi perchè $f_1'(x)$ si annulla agli estremi. Fanno eccezione, eventualmente, due intervalli terminati ad α e β, che danno un contributo che può supporsi piccolo a piacere.

Da ciò concludiamo, passando al limite superiore, che la cercata variazione non supera la somma di tutti i π_r

$$[Nf_1']_\alpha^\beta \leqslant \sum \pi_r.$$

È chiaro, d'altra parte, che è $[Pf']_\alpha^\beta \geqslant \sum \pi_r$; sicchè

$$[Nf_1']_\alpha^\beta \leqslant [Pf']_\alpha^\beta.$$

Se ora nella relazione $f' = \bar{f}' - f_1'$ prendiamo le variazioni positive, abbiamo

$$[Pf']_\alpha^\beta \leqslant [Nf_1']_\alpha^\beta$$

([10]) Ciò vale nei punti ove è $\bar{f}(x) = f(x)$; negli altri $\bar{f}(x)$ è lineare e quindi ammette ancora derivata; si può quindi affermare che *ove esiste l'ordinaria* $f'(x)$ *esistono tutte le* $\bar{f}'(x)$, $f_n'(x)$, $\bar{f}_n'(x)$. (Si noti che qui f' vale Df e non $D\bar{f}$).

essendo $[P\bar{f}']_\alpha^\beta=0$, perchè $\bar{f}'$ non è mai crescente. Confrontando risulta

$$[Nf_1']_\alpha^\beta=[Pf']_\alpha^\beta$$

che ci dà la richiesta variazione.

e). Ponendo nella relazione precedente $\alpha=c$, $\beta=x$ e supposto quindi c scelto in modo che ivi esista la ordinaria $f'(x)$, concludiamo che la relazione

$$\nu_1(x)=\pi_1(x) \tag{2}$$

vale per quasi tutti i valori di x; e tenendo conto allora delle formule (4) del n.° 12 abbiamo precisamente la tesi annunziata in *a*)

$$N^*f_1(x)=P^*f(x).$$

15. - Riprendiamo ora le (1), sopprimendo per brevità l'indicazione della variabile:

$$N^*f_1=P^*f, \qquad P^*f_1=N^*f+l-\bar{f}$$

e sostituiamo in esse f_n ad f; poichè f_n è nulla agli estremi, si ottiene

$$N^*f_{n+1}=P^*f_n, \qquad P^*f_{n+1}=N^*f_n-\bar{f}_n.$$

Da queste, per successive sostituzioni, si ha facilmente

$$l+N^*f=\bar{f}+\bar{f}_2+\bar{f}_4+ \dots +\bar{f}_{2n-2}+N^*f_{2n}$$
$$P^*f=\bar{f}_1+\bar{f}_3+\bar{f}_5+ \dots +\bar{f}_{2n-1}+P^*f_{2n}$$

da cui, essendo N^*f_{2n}, P^*f_{2n} non negative (perchè concave e nulle agli estremi),

$$\bar{f}+\sum_1^{n-1}\bar{f}_{2r}\leq l+N^*f, \qquad \sum_1^{n}\bar{f}_{2r-1}\leq P^*f.$$

Da ciò risulta intanto la convergenza delle serie $\sum\bar{f}_{2r}$, $\sum\bar{f}_{2r-1}$, e quindi quella assoluta dello sviluppo (A'); essendo inoltre i primi membri due funzioni concave e continue, la seconda delle quali nulla agli estremi, e aventi per differenza f, dal teorema di minimo del n.° 11 segue che si ha precisamente

$$\bar{f}+\sum_1^{\infty}\bar{f}_{2r}=l+N^*f, \qquad \sum_1^{\infty}\bar{f}_{2r-1}=P^*f. \tag{3}$$

E con questo le asserzioni del n.° 13 riescono completamente dimostrate.

Risulta anche

$$\bar{f}+\sum_1^{\infty}\bar{f}_r=l+T^*f \tag{4}$$

essendo T^*f dato dalla terza delle (4) del n.° 12 ([11]).

([11]) Un metodo perfettamente analogo si sarebbe potuto usare in (M), evitando così la dimostrazione del n.° 10 e il lemma ivi richiamato.

§ 6. - Un caso di derivabilità termine a termine.

16. - *a*). Per le serie di funzioni concave vale un teorema di derivazione termine a termine, dimostrato da S. CINQUINI (loc. cit., n.° 2). In base ad esso e ad un suo facile complemento ([12]), si può asserire che le (3), (4) del numero precedente sono derivabili termine a termine, a destra e a sinistra di ogni punto interno all'intervallo, dando luogo a serie uniformemente convergenti in ogni tratto $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ tutto interno ad $a \vdash\!\dashv b$.

Da ciò segue subito, sottraendo: *Se la $f(x)$ è una funzione (D), lo sviluppo (A') è derivabile termine a termine, a destra e a sinistra di ogni punto interno all'intervallo $a \vdash\!\dashv b$; e in ogni tratto interno ad $a \vdash\!\dashv b$ la serie ottenuta è uniformemente convergente.* E gioverà qui ricordare che se $f(x)$ ammette in un punto derivata ordinaria, tutti i termini della serie (A') l'ammetteranno egualmente.

b). La derivazione delle (3), a cui sopra si è accennato, dà luogo a formule che presentano pure un certo interesse. Così, derivando la seconda delle (3), e supponendo per semplicità che nel punto x esista la derivata ordinaria di $f(x)$, dalla (4) del n.° 12 si ricava

$$\sum_1^\infty \bar{f}'_{2r-1}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b [Pf']_x^t dt, \tag{1}$$

e di qui, facendo $x=\alpha$, $x=\beta$ e sottraendo

$$\sum_1^\infty [\bar{f}'_{2r-1}(\alpha) - \bar{f}'_{2r-1}(\beta)] = [Pf']_\alpha^\beta. \tag{2}$$

In modo analogo, ma più brevemente, tenendo conto dello sviluppo derivato di (A'), si ha

$$\bar{f}'(x) + \sum_1^\infty \bar{f}'_{2r}(x) = f'(x) + \frac{1}{b-a}\int_a^b [Pf']_x^t dt, \tag{1'}$$

$$\bar{f}'(\alpha) - \bar{f}'(\beta) + \sum_1^\infty [\bar{f}'_{2r}(\alpha) - \bar{f}'_{2r}(\beta)] = [Nf']_\alpha^\beta. \tag{2'}$$

([12]) Il teorema dato dal CINQUINI, come estensione di uno di TONELLI, afferma che una serie di funzioni concave e continue in $a \vdash\!\dashv b$, convergente in a, in b, e in un punto c compreso, converge uniformemente in $a \vdash\!\dashv b$, e che la serie delle derivate, nei punti di un intervallo interno ad $a \vdash\!\dashv b$ ove esse esistono, è convergente uniformemente e rappresenta la derivata della somma della serie data. Basta ora osservare che al tendere di x ad un dato punto x_0, a destra o a sinistra, nell'insieme dei punti ove le derivate esistono, queste derivate tendono alle derivate destre o sinistre in x_0, e tener conto dell'uniformità della convergenza, per concludere che la serie data è derivabile termine a termine a destra e a sinistra di *ogni* punto x_0 dell'intervallo. E si riconosce anche subito che in ogni parte interna ad $a \vdash\!\dashv b$ la convergenza è ancora uniforme.

E sommando le (2), (2′) si ha finalmente

$$\bar{f}'(\alpha)-\bar{f}'(\beta)+\sum_{1}^{\infty}[\bar{f}_r'(\alpha)-\bar{f}_r'(\beta)]=[Tf']_{\alpha}^{\beta}. \tag{2''}$$

Deve notarsi che le (2), (2′), (2″) si sarebbero potute ottenere direttamente partendo dalla (2) del n.° 14, con un procedimento analogo a quello usato nel n.° 15; e che le formule scritte si possono estendere anche al caso in cui in α e β non esistano le derivate ordinarie; basterà sostituire dappertutto $\alpha\pm0$ ad α, $\beta\pm0$ a β, e interpretare opportunamente i simboli.

In particolare, ponendo al posto di α e β i simboli $x-0$, $x+0$, si hanno formule dove intervengono le differenze tra le derivate destre e sinistre della f, della $\bar{f}$, delle $\bar{f}_r$, in un dato punto x. E così dalla (2″) si ha

$$|D^+f-D^-f|=(D^-\bar{f}-D^+\bar{f})+\sum_{1}^{\infty}(D^-\bar{f}_r-D^+\bar{f}_r)$$

mentre la (2) dà una serie che rappresenta D^+f-D^-f se questa quantità è positiva, lo zero se è negativa; l'opposto dà la (2′).

NOTA. - A complemento delle indicazioni date nella nota (8) segnaliamo qui un recente lavoro di T. POPOVICIU: *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles* (Mathematica (Cluj), vol. 8, 1934, pp. 1-85) nel quale, inclusa in ricerche di carattere molto generale, viene data a p. 30 una decomposizione, dotata di una certa proprietà di minimo, delle funzioni dette dall'Autore « a prima variazione limitata », nella differenza di due funzioni concave o convesse. Ora le funzioni a prima variazione limitata non sono altro che quelle speciali funzioni (D) già considerate dal RIESZ, di cui è parola nella citata nota (8); e per esse la decomposizione canonica data dal sig. POPOVICIU coincide con quella da noi esposta nei n.i 10 e 11. Il metodo è del resto totalmente diverso. Nel lavoro del sig. POPOVICIU si troveranno anche varie importanti indicazioni bibliografiche.