Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Guido Fubini

I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 3 (1935), p. 219-224

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_3_219_0>

I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVO-DIFFERENZIALE (1)

di GUIDO FUBINI (Torino).

Ringrazio la Direzione della Scuola di avermi dato l'occasione di esporre le idee, che hanno condotto alla moderna geometria proiettivo-differenziale, proprio in queste aule ove ancora si muove lo spirito del mio grande Maestro Prof. LUIGI BIANCHI, dove tanti e tanti studiosi, e io tra essi, abbiamo appreso l'amore della ricerca geometrica. Proprio per opera del BIANCHI, accanto alla geometria differenziale euclidea ebbero rigoglioso sviluppo le geometrie differenziali non euclidee. E in questi campi di ricerca si erano trovati molti teoremi comuni, perchè si studiavano proprietà proiettive piuttosto che proprietà metriche.

Tanto per citare qualche semplice esempio, ricorderò la teoria delle asintotiche di una superficie, quelle delle sviluppabili, dei fuochi e dei piani focali di una congruenza di rette e infine la teoria delle congruenze W che, per opera del BIANCHI, fece compiere tanti progressi alla Geometria Differenziale.

Ad altri problemi in apparenza di geometria metrica, per esempio al problema della deformazione infinitesima di una superficie, si riconosceva il carattere proiettivo, senza che si riuscisse a capirne l'intima ragione. Di altri problemi (per esempio di quello della ricerca delle superficie a curvatura nulla negli spazii ellittici) non si era capito il carattere proiettivo.

WILCZYNSKI per primo ha studiato in modo sistematico la geometria proiettivo-differenziale, ricorrendo a certi sistemi di equazioni differenziali lineari illimitatamente integrabili; e, per quanto il suo metodo applicato per esempio alle superficie si complichi in modo gravoso se non si assumono a coordinate curvilinee u, v i parametri delle asintotiche, pure egli ha ottenuto risultati fondamentali; tra questi specialmente feconda è stata la scoperta delle *direttrici* (direttrici della congruenza comune ai due complessi lineari osculatori in un punto A di una superficie S alle asintotiche di S uscenti da A).

A un punto di vista molto diverso si riannodano le ricerche che riducono lo studio delle proprietà proiettive di una superficie a quello di alcune forme diffe-

(1) Riassunto di una conferenza tenuta il dì 8 febbraio 1934 presso la R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

renziali, e che in altre parole vogliono estendere alla geometria proiettiva i metodi creati da GAUSS per la geometria metrica.

A tale fine si è cominciato col rispondere alla domanda, se e in quale modo fosse generalizzabile la nozione di superficie applicabili.

Se due superficie S, S' sono *metricamente* applicabili, tra i loro punti A, A' intercede una corrispondenza biunivoca; e la figura F composta di un punto A di S e dei punti infinitamente vicini $A+dA$ è uguale alla figura F' formata dai punti omologhi A', $A'+dA'$: ciò che appunto è espresso dalla uguaglianza degli elementi lineari di GAUSS. E l'asserzione che F ed F' sono uguali equivale a postulare l'esistenza di un *movimento* M che porta F in F'. Sorge spontanea l'idea di dire che le due superficie sono *proiettivamente* applicabili se, per ogni coppia di punti omologhi A, A', esiste non un movimento ma una proiettività che porta la figura F in F'. Ma una tale definizione non è accettabile, perchè dalla corrispondenza biunivoca tra i punti di S, S' segue come immediata conseguenza l'esistenza di infinite proiettività che portano F in F'. Per trovare qualcosa di interessante, bisogna limitare la definizione, tenendo conto anche degli infinitesimi di secondo ordine, e considerare la figura Φ formata da un tale punto A, dai punti $A+dA$ e $A+dA+\frac{1}{2}d^2A$ insieme alla figura omologa Φ'. Si è trattato di precisare da un punto di vista sia analitico che geometrico tale definizione; e, senza neanche accennare alle estensioni ad altri enti geometrici (congruenze, complessi di sette, ipersuperficie ecc.), mi accontenterò di enunciare il principale risultato a cui si è giunti per la teoria delle superficie. Supposto che S, S' siano in corrispondenza biunivoca, si scelgano su esse coordinate curvilinee u, v omologhe, tali cioè che punti corrispondenti di S ed S' abbiamo uguali coordinate curvilinee u, v. Per l'applicabilità metrica è condizione necessaria e sufficiente che S, S' abbiano uguale elemento lineare di GAUSS (radice quadrata di una forma quadratica differenziale in du, dv): per l'applicabilità proiettiva vale un teorema analogo, purchè all'elemento lineare di GAUSS si sostituisca l'*elemento lineare proiettivo* che si riconosce essere il quoziente di due forme F_3, F_2 l'una cubica, l'altra quadratica in du, dv. Le due forme F sono naturalmente così definite solo a meno di un fattore comune, funzione delle u, v. Questo risultato è ottenuto escludendo il caso banale delle superficie sviluppabili (per le quali F_2 si ridurrebbe ad un quadrato perfetto, e sarebbe anzi identicamente nulla se la superficie si riducesse a un piano).

Negli altri casi, gli unici importanti, si sono poi *normate* le forme F, sostituendo ad esse due forme φ_3, φ_2 (determinate completamente dalla superficie considerata) in guisa che $\varphi_3:\varphi_2$ sia proprio uguale a $F_3:F_2$. Sorge spontanea la questione di interpretare geometricamente questo teorema; e delle tante interpretazioni geometriche trovate per tale elemento lineare la più semplice è quella dovuta al TERRACINI che ha trovato una semplicissima relazione tra tale elemento lineare e il birapporto dei quattro punti in cui le tangenti asintotiche in due punti A, B vicini sulla superficie tagliano la retta intersezione dei corrispondenti piani tangenti.

Anche per la forma φ_2 si sono trovate eleganti e semplici significati geometrici: meno semplici sono le interpretazioni geometriche della forma φ_3. Ma ciò ha scarsa importanza: l'essenziale è lo studio del rapporto $\varphi_3 : \varphi_2$.

Molto importante è lo studio dei casi in cui questo rapporto si annulla o diventa infinito, cioè dei casi in cui $\varphi_2 = 0$, oppure $\varphi_3 = 0$. L'equazione $\varphi_2 = 0$ definisce le asintotiche; la $\varphi_3 = 0$ definisce direzioni, già trovate per altra via da CLEBSCH e da DARBOUX. Diamo un'idea della via seguita da DARBOUX: nella geometria metrica le sfere che toccano una superficie S in un suo punto A tagliano S lungo una linea che in A ha un punto doppio a tangenti t, t' generalmente distinte. Vi sono *due* sfere (le sfere di curvatura) per cui tale punto doppio si riduce a un cuspide, e le rette t, t' coincidono. Le *due* direzioni di $t = t'$ relative a queste *due* sfere sono le direzioni t, τ di curvatura. *Non* esiste però alcuna sfera la cui intersezione con S abbia un punto doppio in A e le rette t, τ come tangenti in tale punto.

Analogamente noi considereremo le quadriche che toccano S in A, in guisa tale che la loro intersezione con S sia una linea che in A ha un punto *triplo* con tre tangenti t, t', t'' (generalmente distinte). Esistono però delle quadriche per cui queste tangenti coincidono, (per cui $t = t' = t''$). In questo caso tale tangente individuerà su S una direzione di DARBOUX (sarebbe meglio dire di CLEBSCH-DARBOUX). Da ogni punto generico A di S escono *tre* direzioni di DARBOUX ed (in contrapposto a quanto avviene nel caso metrico) esistono ∞^1 quadriche Q (*quadriche di Darboux*) che tagliano S in una linea che ha un punto triplo in A, e vi ha per tangenti le direzioni di DARBOUX. Queste quadriche formano un fascio, cui appartiene il piano tangente contato due volte. Lo *Hessiano di* φ_3 *è proporzionale a* φ_2: ciò che dà una relazione tra tangenti asintotiche e tangenti di DARBOUX. Le direzioni coniugate a quelle di DARBOUX sono state da lungo tempo scoperte per tutt'altra via da C. SEGRE.

Se u, v sono i parametri delle asintotiche, ad elemento lineare proiettivo si può assumere il rapporto

$$\frac{\beta du^2 + \gamma dv^3}{2dudv},$$

(ove β, γ sono i vincoli $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ di CHRISTOFFEL per l'elemento lineare di GAUSS).

Se esso è *identicamente nullo*, e le linee di DARBOUX sono indeterminate, la superficie è una quadrica. Se invece è soltanto $\beta = 0$ oppure $\gamma = 0$, la superficie è rigata. Se ne deduce tosto che, com'era prevedibile *a priori*, la geometria differenziale proiettiva delle superficie rigate ha caratteri di speciale semplicità; e noi non ce ne occuperemo più in questo rapido sguardo. Se $\beta\gamma \neq 0$, allora si può porre

$$\varphi_3 = \beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3),$$
$$\varphi_2 = 2\beta\gamma dudv,$$

provando che tali forme sono completamente determinate dalla superficie (e si possono facilmente scrivere in coordinate curvilinee qualsiasi). Le linee di SEGRE sono determinate dalla $\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0$.

Ma si può, volendo, non definire in blocco le quadriche di DARBOUX, ma definirne qualcuna in modo diretto. Così per esempio la quadrica di LIE è la quadrica che contiene le tangenti a tre asintotiche $v=$cost. tirate da un punto A e dai due punti A', A'' infinitamente vicini ad A sulla asintotica $u=$cost. uscente da A (e, come ha già provato S. LIE, tale quadrica non cambia se scambiamo l'ufficio delle asintotiche uscenti da A). Altre quadriche di DARBOUX si possono definire con metodi analoghi; perciò ogni quadrica di DARBOUX si potrà definire proiettivamente dando il birapporto che essa forma (nel fascio di tali quadriche) con tre quadriche particolari di DARBOUX definite direttamente (una delle quali può anche essere il piano tangente in A contato due volte).

Si presenta spontaneo un elemento geometrico essenziale: ogni retta r uscente da A ha come retta polare rispetto ad una qualsiasi delle quadriche di DARBOUX relative al punto A una medesima retta ϱ posta nel piano α che tocca S nel punto A: due rette siffatte, una r uscente da A, l'altra ϱ posta in α si diranno polari (così per esempio se S è a curvatura metrica costante, la retta polare della sua normale metrica è all'infinito e viceversa). Tutta la geometria differenziale acquista un carattere di semplicità, se, scelte in un modo qualunque le coordinate omogenee x di un punto A di S, si scelgono (come si prova possibile) le coordinate omogenee ξ di un piano α tangente ad S in guisa tale che: La retta r intersezione dei piani

$$\lambda\xi_u + \nu\xi, \qquad \mu\xi_v + \nu\xi \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ costanti arbitrarie})$$

la per retta polare ϱ la retta congiungente i punti (del piano α)

$$\lambda x_u + \nu x, \qquad \mu x_v + \nu x.$$

(Con x_u, ξ_u ecc. indico le derivate parziali di x, ξ ecc.).

Così per esempio se delle coordinate omogenee x le prime tre sono le solite coordinate cartesiane, e la quarta è uguale ad 1, le coordinate ξ corrispondenti sono le coordinate di LELIEUVRE tanto utili nella geometria metrica.

Come, normando opportunamente, si può passare dalle forme F_2, F_3 alle forme φ_2, φ_3, completamente definite dalla superficie, così da un sistema qualsiasi di coordinate omogenee x, ξ si può passare a coordinate omogenee normali, cioè completamente determinate dalla superficie S per ogni suo punto A. Se ne deduce la possibilità di definire una *normale proiettiva*, i raggi di curvatura proiettiva e perfino di generalizzare il *theorema egregium* di GAUSS.

In modo analogo a quanto avviene nella geometria metrica per definire una superficie, oltre all'elemento lineare (alle forme F_2, F_3 oppure φ_2, φ_3) si deve dare un'altra forma quadrica; si possono dare equazioni differenziali del secondo ordine a cui soddisfano le x e le ξ, i cui coefficienti sono determinati appena siano date le forme differenziali citate; e si possono estendere le equazioni di GAUSS e di CODAZZI. Lo studio delle coppie di superficie proiettivamente applicabili porta ad alcune classi di superficie che erano già state studiate per tutt' altra via e che godono di proprietà estremamente notevoli. A me basta ricordare che di tali classi di superficie fanno parte tutte quelle superficie, per cui il BIANCHI ha creato la sua teoria delle trasformazioni per congruenze W. Queste non solo si possono estendere a nuove classi di superficie, ma nel caso del BIANCHI ricevono complementi notevoli e semplicissime definizioni geometriche. Ne voglio qui ricordare una.

Sia S una superficie per esempio applicabile metricamente sopra una quadrica. Scelta ad arbitrio una retta r dello spazio, si consideri la congruenza delle rette t che toccano la superficie S e si appoggiano ad r. Deformiamo (proiettivamente) S in modo che ogni suo elemento superficiale trascini con sè la retta t corrispondente. Ogni retta t darà origine ad una retta t', che genera una delle congruenze W del BIANCHI, la cui seconda falda focale è una trasformata della superficie iniziale.

Da ogni punto A di una superficie S esce un piano (il piano *canonico*) su cui giacciono le rette più importanti, uscenti da A e dotate di qualche notevole proprietà geometrica: oltre alla normale proiettiva e alla direttrice di WILCRYNSKI si sono trovate molte altre rette canoniche, che a quattro a quattro hanno di solito birapporti puramente numerici.

Anche la teoria delle congruenze W, spogliata da tutti gli elementi *metrici* delle trattazioni abituali, diventa di una estrema semplicità cosicchè non solo le proprietà proiettive, ma anche le proprietà metriche trovano trattazioni brevi e suggestive; i nuovi fatti analitici scoperti hanno ricevuto poi feconde interpretazioni geometriche.

È così costruito il fondamento di un nuovo edificio geometrico: problemi nuovi si affacciano in gran copia (per non dire d'altro ricorderò soltanto la teoria delle geodetiche proiettive e delle pangeodetiche). Problemi antichi ricevono nuova luce, si studiano in modo più semplice. Ricerche disparate si fondono e collegano in una struttura più semplice e armonica.

Tra le nuove classi di superficie ricorderò quelle le cui asintotiche appartengono a complessi lineari che pongono in nuova luce le già citate superficie a curvatura nulla negli spazii ellittici, ricorderò le superficie di coincidenza (per cui coincidono tutte le rette canoniche uscenti da un punto), ricorderò le superficie R (per cui $\beta_v = \gamma_u$) già studiate da DEMOULIN e TZITZEICA e le superficie di JONAS (per cui $\beta_u = \gamma_v$), ricorderò infine le superficie isotermo-asintotiche (per cui $\beta = \gamma$): le uniche superficie che sono falde focali di una congruenza sulle cui falde si corrispondono non solo le asintotiche, ma anche le linee di DARBOUX o di SEGRE.

Da una superficie si passa alla duale, cambiando di segno l'elemento lineare (scambiando F_3 o φ_3 in $-F_3$ ad in $-\varphi_3$), cioè cambiando β, γ di segno. E teoremi analoghi valgono negli iperspazii.

E, come nella geometria metrica, così anche nella geometria proiettiva le ipersuperficie degli spazii ad $n > 3$ dimensioni sono, tranne pochi casi di nessun interesse, proiettivamente indeformabili. Molto interessanti ricerche a questo riguardo ha eseguito il giapponese KANITANI, Professore a Port-Arthur.

Interpretazioni geometriche svariate, nuove forme differenziali sono dovute al BOMPIANI, al TERRACINI ed a molti altri ricercatori, fra i quali primeggiano CARTAN e ČECH ([2]).

E, mentre a nuovi enti geometrici si applicano i metodi della geometria proiettiva, a questa geometria si subordinano sia la geometria affine che le geometrie metriche euclidea e non euclidea. Ed accanto al nuovo edificio altri si costruiscono: la geometria nel gruppo delle trasformazioni conformi che ha legami così intimi con la geometria proiettiva dei sistemi di rette per non parlare di altre geometrie meno importanti. E, tanto per dare un esempio, le superficie isoterme della geometria metrica non sono che le superficie deformabili nel gruppo delle trasformazioni conformi: Il problema analogo della determinazione delle congruenze di rette proiettivamente deformabili non è ancora invece risoluto completamente, nonostante le poderose ricerche che CARTAN ha dedicato a questo argomento.

([2]) Recentemente (marzo 1935) il Prof. BOMPIANI mi ha comunicato nuove interpretazioni dell'elemento lineare proiettivo di una superficie, assai notevoli per eleganza e semplicità.