

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LEONIDA TONELLI

Sulle equazioni di Eulero nel calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 4, n° 2 (1935), p. 191-216

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_191_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE EQUAZIONI DI EULERO NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Consideriamo il primo dei problemi del Calcolo delle Variazioni, in forma ordinaria: il problema di rendere minimo l'integrale

$$(1) \quad I_C = \int_C f(x, y, y') dx \quad (1).$$

La corrispondente equazione differenziale di EULERO è data da

$$(2) \quad \frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0,$$

e, relativamente agli integrali di questa equazione, sono fondamentali, nella teoria classica del Calcolo delle Variazioni, alcune questioni: l'esistenza e l'unicità della curva integrale uscente da un punto con data direzione; l'esistenza e l'unicità della curva integrale che unisce due punti sufficientemente vicini; la dipendenza e la derivabilità degli integrali rispetto agli elementi iniziali; la costruzione di un campo di estremali (la così detta *costruzione di Weierstrass*) ecc. ecc.

La (2) si svolge, come equazione differenziale del secondo ordine, eseguendo la derivazione della $f_{y'}$ rispetto alla x ; e ciò porta (quando sia $f_{y'y'} \neq 0$) a scriverla nella forma

$$(3) \quad y'' = \{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}\} : f_{y'y},$$

che consente di risolvere le questioni or ora accennate con la immediata applicazione di noti teoremi generali sulle equazioni differenziali ordinarie. Questa applicazione richiede la continuità e la derivabilità del secondo membro della (3), rispetto agli elementi dai quali dipende. Si è così condotti a supporre che la $f(x, y, y')$ sia continua insieme con le sue derivate parziali dei primi tre ordini, o, più semplicemente, che la $f(x, y, y')$ e la $f_{y'}(x, y, y')$ siano continue insieme con le loro derivate parziali dei primi due ordini.

(1) Soltanto per ragioni di semplicità ci limitiamo qui al primo problema del Calcolo delle Variazioni, ed alla forma ordinaria.

Per altro — come ha osservato esplicitamente C. CARATHÉODORY ⁽²⁾ — se (nell'ipotesi $f_{y'y'} \neq 0$) operando la trasformazione hamiltoniana si introducono le variabili canoniche e si passa dalla forma (3) alla forma canonica

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

dove è

$$(5) \quad q = f_{y'}(x, y, y'), \quad H(x, y, q) = f + y'q,$$

tutte le questioni più sopra indicate si risolvono ammettendo solamente l'esistenza e la continuità delle derivate parziali della $f(x, y, y')$ dei primi due ordini (il che implica anche la continuità della f medesima).

L'economia che così si realizza nelle ipotesi sulla derivabilità della $f(x, y, y')$ può essere messa facilmente in evidenza, anche senza passare a traverso la funzione di HAMILTON $H(x, y, q)$. Ed infatti, supposto $f_{y'y'} \neq 0$, si può risolvere rispetto alla y' la prima delle (5) ottenendo

$$(6) \quad y' = \varphi(x, y, q)$$

ed anche, per la (2),

$$(7) \quad q' = f_{yy}(x, y, \varphi(x, y, q));$$

ed il sistema delle (6) e (7) (che, come si verifica immediatamente, non è altro che il sistema (4)) è equivalente alla (2). Ora, i secondi membri di (6) e (7) presuppongono soltanto le derivate parziali del primo ordine della $f(x, y, y')$; ed essi sono perciò continui, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, quando la $f(x, y, y')$ sia supposta continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini. Pertanto, ammessa quest'ultima ipotesi, i teoremi generali sulle equazioni differenziali ordinarie, ai quali abbiamo alluso più sopra, possono applicarsi senz'altro al sistema (6), (7); e ciò basta al nostro scopo.

* * *

Nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ho mostrato, in varie occasioni, l'utilità, per gli sviluppi del metodo diretto da me seguito, di considerare l'equazione di EULERO (2) nella forma, datale da P. DU BOIS-REYMOND,

$$(8) \quad f_{y'}(x, y(x), y'(x)) - \int_{x_0}^x f_{yy}(x, y(x), y'(x)) dx = f_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)),$$

che è un'equazione integro-differenziale del tipo di VOLTERRA.

⁽²⁾ *Bemerkung über die Eulerschen Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1931, pp. 40-42).

Nella presente Memoria, mi propongo ora di far vedere che la (8) può vantaggiosamente sostituirsi alla (2) anche in altre questioni. Più precisamente, voglio mostrare che lo studio dell'equazione di EULERO nella forma (8) permette di conseguire, ai fini sopra indicati, quelle economie, nelle ipotesi sulla derivabilità della $f(x, y, y')$, alle quali conduce la forma canonica. Anzi, come si vedrà, la forma (8) si presta in modo del tutto naturale a ridurre ulteriormente le ipotesi in questione, in modo da eliminare tutte quelle che non sembrano strettamente indispensabili.

* * *

Contrariamente all'uso corrente, nel mio trattato già citato ho dapprima stabilito l'esistenza e l'unicità della curva integrale della (2) che unisce due punti sufficientemente vicini; e ne ho poi dedotto l'esistenza e l'unicità della curva integrale che esce da un punto con data direzione. E per tutto questo mi sono appoggiato ai miei teoremi di esistenza per il minimo dell'integrale I_C , senza far uso dei teoremi generali relativi all'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie. Il metodo da me seguito ha, fra l'altro, il vantaggio di condurre, nello stesso tempo, ai teoremi sull'estremo « in piccolo » ed alle proposizioni di esistenza e unicità sopra indicate (e, in particolar modo, a quelle relative alla curva integrale che unisce due punti vicini) con ipotesi più larghe di quelle generalmente ammesse; ed anche più larghe delle ipotesi richieste dall'uso della forma canonica (4).

Nelle pagine che seguono si procederà col metodo dei miei *Fondamenti* e poi anche con quello inverso; e si vedrà, per esempio, che l'esistenza e l'unicità della curva integrale della (2) che unisce due punti vicini o che esce da un punto con data direzione sussistono supponendo soltanto la $f(x, y, y')$ continua, a derivata parziale $f_{y'}$ lipschitziana rispetto a y e y' , e con la $f_{y'}$ a rapporto incrementale, rispetto a y' , maggiore di un numero $m > 0$ per tutti gli y' vicini a quelli che interessano. E si vedrà pure che anche queste condizioni possono essere allargate. Si otterranno così dei risultati sugli integrali I_C quasi-regolari normali, che vanno in special modo notati.

Per quanto riguarda il ricorso alle derivate parziali seconde della $f(x, y, y')$, sembra che esso sia indispensabile soltanto per stabilire la derivabilità degli integrali della (2) rispetto agli elementi iniziali (e in quelle questioni che dipendono da tale derivabilità). E va notato che la derivabilità rispetto all'ordinata ed al coefficiente angolare della tangente nel punto iniziale è indipendente dall'ipotesi dell'esistenza della derivata $f_{y'x}$. Fissate poi le condizioni per la derivabilità degli integrali della (2) rispetto agli elementi iniziali, restano fissate anche quelle per la costruzione dei campi di estremali.

* * *

1. - Definizioni e ipotesi fondamentali.

Diremo *campo* A un insieme limitato e chiuso di punti del piano (x, y) (piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali) avente dei punti *interni*; e chiameremo *striscia* S_A la minima striscia del piano (x, y) , a lati paralleli all'asse delle y , che contiene il campo A .

Indicando con a^* , b^* le ascisse minima e massima dei punti del campo A , i lati della striscia S_A saranno le rette $x=a^*$, $x=b^*$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ del piano (x, y) sarà detto *interno al campo* A , *relativamente alla striscia* S_A , se appartiene ad A e se è possibile di determinare un numero positivo ρ in modo che tutti i punti comuni al cerchio (P_0, ρ) (di centro P_0 e raggio ρ) ed alla striscia S_A appartengano pure ad A .

Nel seguito indicheremo sempre con A_0 un insieme chiuso composto tutto di punti interni ad A , relativamente alla striscia S_A .

La funzione $f(x, y, y')$, che considereremo in tutto il presente lavoro, sarà sempre definita (reale e ad un valore) per tutti i punti (x, y) del campo A e per tutti gli y' di un intervallo (Y_1', Y_2') , *finito* o *infinito*. L'insieme di tutte le terne (x, y, y') , con (x, y) e y' appartenenti rispettivamente al campo A ed all'intervallo (Y_1', Y_2') , si dirà *dominio* \mathfrak{F} .

Per tutte le terne (x, y, y') del dominio \mathfrak{F} , la $f(x, y, y')$ si supporrà sempre *finita e continua*, insieme con le sue derivate parziali f_y e $f_{y'}$. Ulteriori ipotesi sulla $f(x, y, y')$ saranno fatte man mano che si presenteranno indispensabili.

Diremo (con KNESER) *estremale relativa alla funzione* $f(x, y, y')$ — o, semplicemente, *estremale*, quando non possano sorgere confusioni — ogni curva

$$(9) \quad y=y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

tutta appartenente al campo A , tale che la $y(x)$ sia, in tutto (a, b) , continua insieme con la sua derivata (finita) $y'(x)$, e tale inoltre da verificare, in tutto (a, b) , le disuguaglianze $Y_1' \leq y'(x) \leq Y_2'$ e l'equazione di Eulero

$$(10) \quad \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) - f_y(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (3).$$

È evidente che ogni estremale (9) relativa alla $f(x, y, y')$, soddisfacendo in tutto (a, b) all'equazione (10), verifica anche la

$$(11) \quad f_{y'}(x, y(x), y'(x)) - f_{y'}(a, y(a), y'(a)) - \int_a^x f_y(x, y(x), y'(x)) dx = 0.$$

(3) Le derivate si intenderanno come *derivate destre* in $x=a$ e come *derivate sinistre* in $x=b$.

Viceversa, ogni curva come la (9), con $y(x)$ continua, in tutto (a, b) , insieme con la sua derivata (finita) $y'(x)$, e tale da soddisfare, pure in tutto (a, b) , alle $Y_1' \leq y'(x) \leq Y_2'$ ed alla (11), verifica anche la (10) ed è perciò un'estremale relativa alla $f(x, y, y')$.

2. - L'estremo « in piccolo » per una notevole categoria di integrali I_C .

Diamo innanzi tutto alcune proposizioni relative all'esistenza dell'estremo « in piccolo » per l'integrale I_C . La prima di queste proposizioni si riferisce ad una importante classe di integrali *quasi-regolari positivi normali*, tali cioè che per essi l'intervallo (Y_1', Y_2') coincida con $(-\infty, +\infty)$ e la $f_{y'}(x, y, y')$, in ogni punto (x, y) del campo A , sia funzione sempre crescente della y' .

Se l'integrale I_C è quasi-regolare positivo normale;

se, in ciascun punto (x, y) del campo A , è, per $|y'| \rightarrow \infty$,

$$(12) \quad |f_{y'}(x, y, y')| \rightarrow \infty \quad (4);$$

se è possibile di determinare quattro numeri maggiori di zero, M, N_1, N_2, N_3 , in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A , per ogni y' finito e per ogni φ tale che $|\varphi| < M$ e che $(x, y + \varphi)$ risulti un punto di A ,

$$|f_y(x, y + \varphi, y')| \leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y')| + N_3;$$

preso comunque un numero positivo ρ_0 , si può determinarne un altro δ , positivo, in modo che, essendo P_1 e P_2 due punti qualunque, rispettivamente di A_0 e di A , distanti fra loro meno di δ e di ascisse diverse, nella classe di tutte le curve ordinarie ⁽⁵⁾ C che congiungono i punti detti, ne esista almeno una minimante per l'integrale I_C , e che tutte queste curve minimanti siano delle estremali interne al cerchio (P_1, ρ_0) .

Questa proposizione discende immediatamente da un teorema di E. J. MCSHANE ⁽⁶⁾ e dalle proposizioni dei n.° 1 e 7 della mia Memoria: *Sulle proprietà delle estremanti* ⁽⁷⁾, tenendo presenti le considerazioni svolte nel n.° 91, a) del Vol. II dei miei *Fondamenti*. Si terrà pure presente che dalla condizione (12) segue la (12'), e che, per essere I_C quasi-regolare positivo normale, la tendenza di $|f_{y'}|$ a ∞ , per $|y'| \rightarrow \infty$, risulta uniforme in tutto il campo A .

(4) In questo enunciato, la (12) può essere sostituita con la

$$(12') \quad \left| \frac{f(x, y, y')}{y'} \right| \rightarrow \infty.$$

(5) Tali cioè che appartengano al campo A , che siano rappresentabili nella forma (9), con $y(x)$ funzione assolutamente continua in (a, b) e con $f(x, y(x), y'(x))$ integrabile sull'intervallo detto.

(6) Cfr. L. TONELLI: *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*. (Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, S. II, Vol. III (1934), pp. 401-450), n.° 10.

(7) Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, S. II, Vol. III (1934), pp. 213-237.

3. - Oscillazione della $y'(x)$ su un'estremale.

Prima di dare altre proposizioni analoghe a quella del n.º 2, e per gli ulteriori sviluppi del presente lavoro, è necessario di studiare l'oscillazione della $y'(x)$ su un'estremale.

a). Se, per tutti i punti (x, y) del campo A , la $f_{y'}(x, y, y')$ è funzione sempre crescente della y' in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') contenuto in (Y_1', Y_2') ; scelti ad arbitrio tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \eta$, con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$ e $\eta > 0$, è sempre possibile di determinarne un altro δ , positivo, in modo che, considerata una qualunque estremale relativa alla $f(x, y, y')$

$$\mathbf{E}: y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

tale che su di essa esista un punto $P_0 \equiv [x_0, y(x_0)]$ in cui sia $\lambda_1 \leq y'(x_0) \leq \lambda_2$, si abbia, per tutti gli x comuni ai due intervalli (a, b) e $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$(13) \quad |y'(x) - y'(x_0)| \leq \eta.$$

Indichiamo con l un numero positivo tale che sia $\bar{Y}_1' \leq \lambda_1 - l < \lambda_2 + l \leq \bar{Y}_2'$, e osserviamo innanzi tutto che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è sempre possibile di determinare un $\sigma > 0$ in modo che, se in un qualsiasi punto (x, y) del campo A , è

$$|f_{y'}(x, y, y_1') - f_{y'}(x, y, y_2')| < \sigma,$$

per una coppia y_1', y_2' , di valori dell'intervallo $(\lambda_1 - l, \lambda_2 + l)$, risulti

$$|y_1' - y_2'| < \varepsilon.$$

Ed infatti, in caso contrario, data la continuità della $f_{y'}(x, y, y')$ dovrebbero esistere almeno un punto (\bar{x}, \bar{y}) di A ed una coppia \bar{y}_1', \bar{y}_2' di numeri dell'intervallo $(\lambda_1 - l, \lambda_2 + l)$ e soddisfacenti alla $|\bar{y}_1' - \bar{y}_2'| \geq \varepsilon$, in modo da aversi

$$f_{y'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}_1') - f_{y'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}_2') = 0,$$

il che è impossibile perchè la $f_{y'}$ è sempre funzione crescente della y' in qualsiasi punto (x, y) di A .

Osserviamo poi che, chiamato ε il minore dei due numeri η e l , e considerato il numero σ che gli corrisponde secondo quanto abbiamo detto or ora, si può determinare un numero positivo ϱ tale che, per ogni coppia $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ di punti del campo A , distanti fra loro non più di ϱ , e per ogni y' dell'intervallo (λ_1, λ_2) , sia

$$(14) \quad |f_{y'}(x_1, y_1, y') - f_{y'}(x_2, y_2, y')| < \frac{\sigma}{2}.$$

Indichiamo, infine, con N il massimo modulo della $f_y(x, y, y')$ per tutti i punti (x, y) del campo A e per tutti gli y' dell'intervallo $(\lambda_1 - l, \lambda_2 + l)$, e con δ il minore dei numeri

$$\frac{\varrho}{2}, \quad \frac{\varrho}{2\{|\lambda_1| + |\lambda_2| + l\}}, \quad \frac{\sigma}{2N}.$$

Ciò premesso, considerata l'estremale \mathfrak{E} ed il suo punto P_0 , determiniamo il massimo intervallo (x_0, x_1) di (a, b) nel quale vale sempre la

$$(15) \quad |y'(x) - y'(x_0)| \leq \varepsilon.$$

L'ascissa x_1 coinciderà con x_0 quando sia $x_0 = b$. Dico che, se non è $x_1 = b$, risulta $x_1 \geq x_0 + \delta$. Ed infatti, si supponga $x_1 \neq b$ e $x_1 < x_0 + \delta$. In tutto l'intervallo (x_0, x_1) , vale la (11) e si ha

$$f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) - f_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) - \int_{x_0}^{x_1} f_y(x, y(x), y'(x)) dx = 0,$$

che può scriversi

$$(16) \quad f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) - f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_0)) = \\ = f_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) - f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_0)) + \int_{x_0}^{x_1} f_y(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Ma, per la (15), in (x_0, x_1) è sempre $\lambda_1 - l \leq y'(x) \leq \lambda_2 + l$, e quindi

$$|y(x_1) - y(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} y'(x) dx \right| < \delta \{ |\lambda_1| + |\lambda_2| + l \} \leq \frac{\sigma}{2}.$$

Il punto $(x_1, y(x_1))$ dista dunque da $(x_0, y(x_0))$ meno di σ , ed è così, per la (14),

$$|f_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) - f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_0))| < \frac{\sigma}{2}.$$

Dalla (16) segue perciò

$$|f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) - f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_0))| < \frac{\sigma}{2} + \delta N \leq \sigma,$$

donde, per il modo secondo cui è stato determinato σ ,

$$|y'(x_1) - y'(x_0)| < \varepsilon.$$

Ma, essendosi supposto $x_1 \neq b$, è necessariamente, per la continuità di $y'(x)$,

$$|y'(x_1) - y'(x_0)| = \varepsilon.$$

Questa contraddizione prova che o è $x_1 = b$ oppure è $x_1 \geq x_0 + \delta$.

Analogamente si prova che, se (x_1', x_0) è il massimo intervallo a sinistra di x_0 , che appartiene ad (a, b) ed in cui vale sempre la (15), o è $x_1' = a$, oppure è $x_1' \leq x_0 - \delta$; e il teorema è dimostrato.

b). Dalla proposizione stabilita in a) discende il seguente corollario:

Se, per tutti i punti (x, y) del campo A , la $f_y(x, y, y')$ è funzione sempre crescente della y' in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') contenuto in (Y_1', Y_2') ;

fissati due numeri λ_1 e λ_2 , con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$, e considerato un in-

sieme $\{\mathbf{E}\}$ di estremali, relative alla $f(x, y, y')$, definite ciascuna su un proprio intervallo e sempre soddisfacenti alle disuguaglianze

$$\lambda_1 \leq y'(x) \leq \lambda_2,$$

le derivate $y'(x)$ risultano tutte ugualmente continue sui rispettivi intervalli di definizione.

4. - Teoremi su l'estremo « in piccolo ».

a). Se l'integrale I_C è quasi-regolare positivo normale;

se, in tutto il dominio \mathfrak{F} esiste, finita e continua, la derivata parziale $f_{y'y}(x, y, y')$;

presi ad arbitrio tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \varrho$, con $\lambda_1 < \lambda_2, \varrho > 0$, è sempre possibile di determinarne altri due ϱ_0 e δ_0 , positivi e ambedue minori di ϱ , in modo che, se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono due punti, rispettivamente di A_0 e di A , distanti fra loro meno di δ_0 e soddisfacenti alle disuguaglianze

$$(17) \quad \lambda_1 \leq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leq \lambda_2:$$

1°) nella classe di tutte le curve ordinarie C che li congiungono e che giacciono nel cerchio (P_1, ϱ_0) , ne esista almeno una minimante per l'integrale I_C ;

2°) che tutte queste curve minimanti siano delle estremali con la derivata $y'(x)$ sempre compresa fra

$$(18) \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \varrho \quad e \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \varrho.$$

Questa proposizione si dimostra col ragionamento fatto nel n.° 109 del Vol. II dei miei *Fondamenti*, sostituendo in esso all'uso del lemma del n.° 108, dello stesso volume, quello della proposizione qui stabilita al n.° 3, e sfruttando infine nuovamente questa ultima proposizione.

b). Più generalmente, si ha:

Se, in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') contenuto in (Y_1', Y_2') , la derivata parziale $f_{y'y}(x, y, y')$ è funzione sempre crescente della y' , qualunque sia il punto (x, y) del campo A ;

se, in tutto il dominio \mathfrak{F} esiste, finita e continua, la derivata parziale $f_{y'y}(x, y, y')$;

presi ad arbitrio tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \varrho$, con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$ e $\varrho > 0$, se ne possono sempre determinare altri due ϱ_0 e δ_0 , positivi e ambedue minori di ϱ , in modo che, se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono due punti qualsiasi, rispettivamente di A_0 e di A , distanti fra loro meno di δ_0 , e soddisfacenti alle (17):

1°) nella classe di tutte le curve ordinarie C che li congiungono,

che giacciono nel cerchio (P_1, ϱ_0) e che hanno la derivata $y'(x)$ — considerata solo là dove esiste — sempre compresa nell'intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') , ne esista almeno una minimante per I_G ;

2°) che tutte queste curve minimanti siano delle estremali con la derivata $y'(x)$ sempre compresa fra i numeri (18).

Per la dimostrazione di questa proposizione si veda quanto è detto nel n.° 110 del Vol. II dei *Fondamenti*.

5. - Esistenza dell'estremale che unisce due punti vicini.

Le proposizioni dei n.° 2 e 4 danno senz'altro dei teoremi d'esistenza per l'estremale che unisce due punti vicini, e si ha che:

nelle condizioni dei teoremi del n.° 2 e del n.° 4, esiste sempre almeno un'estremale che congiunge i punti P_1 e P_2 indicati nei teoremi stessi, che giace tutta nel cerchio (P_1, ϱ_0) e che, nel caso dei teoremi del n.° 4, a) e b), ha la derivata $y'(x)$ sempre compresa fra i numeri (18).

6. - La condizione di regolarità a).

Per trattare l'unicità dell'estremale che unisce due punti vicini occorre enunciare una importante condizione di regolarità e premettere una disuguaglianza, che utilizzeremo in luogo dello sviluppo raccorciato del TAYLOR.

Diremo che, in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') contenuto in (Y_1', Y_2') , la $f(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione di regolarità a)* se, per ogni parte limitata di (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') , si può assegnare un $m > 0$ tale che qualsiasi coppia y_1', y_2' di valori di quella parte renda soddisfatta la disuguaglianza

$$(19) \quad \frac{f_{y'}(x, y, y_1') - f_{y'}(x, y, y_2')}{y_1' - y_2'} \geq m,$$

in tutti i punti (x, y) del campo A .

Diremo poi che l'integrale I_G è *regolare positivo*, se l'intervallo (Y_1', Y_2') coincide con $(-\infty, +\infty)$, e se la $f(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione di regolarità a)* in tutto l'intervallo $(Y_1', Y_2') \equiv (-\infty, +\infty)$.

7. - Dimostrazione di una disuguaglianza.

a). Sia $\varphi(u, v)$ una funzione delle due variabili u, v , definita in un certo campo B e in esso continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine φ_u, φ_v . Se (u_0, v_0) è un punto del campo B , *interno* a tale campo, per tutti gli h e k minori in valore assoluto di un certo numero Δ , il punto $(u_0 + h, v_0 + k)$ è anch'esso *interno* a B , e tale è pure $(u_0 + ht, v_0 + kt)$, per tutti i t dell'intervallo $(0, 1)$. Fissata una coppia h, k , con $|h| < \Delta, |k| < \Delta$, e posto

$$\Phi(t) = \varphi(u_0 + ht, v_0 + kt),$$

si ha

$$\Phi_t(t) = h\varphi_u(u_0 + ht, v_0 + kt) + k\varphi_v(u_0 + ht, v_0 + kt)$$

e $\Phi(t)$, $\Phi_t(t)$ risultano finite e continue nell'intervallo $(0, 1)$. Se allora poniamo, per $0 < t \leq 1$,

$$\{\Phi_t(t) - \Phi_t(0)\} : t = R(t),$$

otteniamo

$$\Phi_t(t) = \Phi_t(0) + tR(t)$$

e, integrando da 0 ad 1,

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi_t(0) + \int_0^1 tR(t) dt,$$

ossia

$$\varphi(u_0 + h, v_0 + k) = \varphi(u_0, v_0) + [h\varphi_u(u_0, v_0) + k\varphi_v(u_0, v_0)] + \int_0^1 tR(t) dt.$$

Ma è

$$\begin{aligned} \int_0^1 tR(t) dt &= \int_0^1 t \frac{\Phi_t(t) - \Phi_t(0)}{t} dt = \\ &= \int_0^1 t \left\{ h \frac{\varphi_u(u_0 + ht, v_0 + kt) - \varphi_u(u_0, v_0)}{t} + k \frac{\varphi_v(u_0 + ht, v_0 + kt) - \varphi_v(u_0, v_0)}{t} \right\} dt = \\ &= \int_0^1 t \left\{ h^2 \frac{\varphi_{uu}(u_0 + ht, v_0 + kt) - \varphi_{uu}(u_0, v_0 + kt)}{ht} + hk \frac{\varphi_{uv}(u_0, v_0 + kt) - \varphi_{uv}(u_0, v_0)}{kt} + \right. \\ &\quad \left. + hk \frac{\varphi_{vu}(u_0 + ht, v_0 + kt) - \varphi_{vu}(u_0, v_0 + kt)}{ht} + k^2 \frac{\varphi_{vv}(u_0, v_0 + kt) - \varphi_{vv}(u_0, v_0)}{kt} \right\} dt \end{aligned}$$

e tutto ciò vale anche se h e k non sono diversi da zero, quando si intenda di dare il valore 0 a quei rapporti qui scritti che si presentassero nella forma $0:0$.

Supponiamo ora che esistano tre numeri m_1, m_2, M_1 , con $M_1 \geq 0$, in modo da aversi

$$\frac{\varphi_u(u', v') - \varphi_u(u'', v')}{u' - u''} \geq m_1, \quad \frac{\varphi_v(u', v') - \varphi_v(u'', v')}{v' - v''} \geq m_2,$$

$$\left| \frac{\varphi_u(u', v') - \varphi_u(u', v'')}{v' - v''} \right| \leq M_1,$$

tutte le volte che (u', v') , (u'', v'') , (u', v'') , (u'', v') siano quattro punti del campo B , con $u' - u'' \neq 0$, $v' - v'' \neq 0$, e in modo che il rettangolo che ha tali punti come vertici sia tutto costituito di punti di B . Si avrà con ciò anche

$$\left| \frac{\varphi_v(u', v') - \varphi_v(u'', v')}{u' - u''} \right| \leq M_1 \quad (8),$$

(8) È infatti

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_v(u', v') - \varphi_v(u'', v')}{u' - u''} &= \frac{1}{u' - u''} \left\{ \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\varphi(u', v' + l) - \varphi(u', v')}{l} - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\varphi(u'', v' + l) - \varphi(u'', v')}{l} \right\} \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\varphi_v(\bar{u}, v' + l) - \varphi_v(\bar{u}, v')}{l} \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^1 tR(t)dt \geq (h^2m_1 - 2|hk|M_1 + k^2m_2) \int_0^1 tdt$$

donde

$$(20) \quad \varphi(u_0 + h, v_0 + k) \geq \varphi(u_0, v_0) + [h\varphi_u(u_0, v_0) + k\varphi_v(u_0, v_0)] + \\ + \frac{1}{2} [h^2m_1 - 2|hk|M_1 + k^2m_2].$$

b). Se si suppone, in quanto abbiamo detto in a), che sia

$$m_1 \geq 0, \quad m_2 \geq 0, \quad M_1 = 0,$$

e che, di più, si abbia, per $v' - v'' \neq 0$,

$$(21) \quad \frac{\varphi_v(u', v') - \varphi_v(u', v'')}{v' - v''} > 0,$$

si ottiene

$$\varphi(u_0 + h, v_0 + k) \geq \varphi(u_0, v_0) + [h\varphi_u(u_0, v_0) + k\varphi_v(u_0, v_0)] + \\ + \int_0^1 k \{ \varphi_v(u_0, v_0 + kt) - \varphi_v(u_0, v_0) \} dt.$$

Se è $k \neq 0$, dalla (21) segue che l'espressione sotto il segno di integrale è maggiore di zero per $0 < t \leq 1$, e si ha perciò

$$(20') \quad \varphi(u_0 + h, v_0 + k) > \varphi(u_0, v_0) + [h\varphi_u(u_0, v_0) + k\varphi_v(u_0, v_0)].$$

8. - Unicità dell'estremale che unisce due punti vicini.

a). Se l'integrale I_C è regolare positivo ⁽⁹⁾;

se per ogni intervallo finito (λ_1', λ_2') si possono determinare due numeri m_1 e M_1 , con $M_1 \geq 0$, tali che sia

$$(22) \quad \frac{f_y(x, y_1, y') - f_y(x, y_2, y')}{y_1 - y_2} \geq m_1,$$

$$(23) \quad \left| \frac{f_{y'}(x, y_1, y') - f_{y'}(x, y_2, y')}{y_1 - y_2} \right| \leq M_1,$$

per ogni coppia di punti (x, y_1) , (x, y_2) , distinti, di uguale ascissa, appartenenti al campo A , e per ogni y' di (λ_1', λ_2') ;

presi ad arbitrio due numeri λ_1, λ_2 , con $\lambda_1 < \lambda_2$, se ne può sempre determinare un altro $\rho_0 > 0$, in modo che, se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono

con

$$\left| \frac{\varphi_u(\bar{u}, v' + l) - \varphi_u(\bar{u}, v')}{l} \right| \leq M_1.$$

⁽⁹⁾ Vedi n.° 6.

due punti qualsiasi, rispettivamente di A_0 e di A , soddisfacenti alle (17), non possa esistere più di un'estremale che congiunga P_1 e P_2 e che giaccia tutta nel cerchio (P_1, ϱ_0) .

La dimostrazione di questa proposizione si ottiene da quella del n.° 111, b) del Vol. II dei *Fondamenti* sostituendo all'uso del lemma del n.° 108, a), dello stesso volume, e dello sviluppo del TAYLOR, quello della proposizione qui stabilita al n.° 3 e della disuguaglianza (20).

b). Più generalmente si ha:

Se in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') appartenente a (Y_1', Y_2') la $f(x, y, y')$ soddisfa alla condizione di regolarità a) (n.° 6);

se, per ogni intervallo finito (λ_1', λ_2') contenuto in (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') si possono determinare due numeri m_1 e M_1 , con $M_1 \geq 0$, tali che valgano le (22) e (23) per ogni coppia di punti (x, y_1) , (x, y_2) , distinti, di uguale ascissa, appartenenti al campo A , e per ogni y' di (λ_1', λ_2') ;

presi ad arbitrio due numeri λ_1 e λ_2 , con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$, si può determinare un $\varrho_0 > 0$ in modo che, se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono due punti qualsiasi rispettivamente di A_0 e di A , soddisfacenti alle (17), non possa esistere più di un'estremale che congiunga P_1 e P_2 e che giaccia tutta nel cerchio (P_1, ϱ_0) .

c). Se nelle (22) e (23) è sempre $m_1 \geq 0$, $M_1 = 0$, il teorema dato in a) vale anche se l'integrale I_C , invece di essere regolare positivo, è soltanto *quasi-regolare positivo normale*. Per provarlo, si utilizzerà, invece della (20), la (20').

9. - Esistenza dell'estremale passante per un punto con data direzione.

Ammesse le ipotesi dei teoremi dei n.° 4, b) e 8, b);

presi ad arbitrio tre numeri λ_1 , λ_2 , ϱ , con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$ e $\varrho > 0$, si può determinare un $\delta > 0$ in modo che, scelti comunque un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di A_0 ed un y_0' dell'intervallo (λ_1, λ_2) , esista un'estremale

$$\mathbf{E}_0: \quad y = y_0(x), \quad x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta,$$

sempre soddisfacente alle condizioni

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_0'(x_0) = y_0', \\ |y_0'(x) - y_0'(x_0)| < \varrho,$$

intendendosi di non considerare quella parte dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ eventualmente esterna a (a^*, b^*) .

La dimostrazione di questa proposizione è uguale a quella indicata nel n.° 112, a) del Vol. II dei *Fondamenti*. Per essa si terrà conto di quanto fu stabilito qui al n.° 3, b).

10. - Dimostrazione diretta dell'esistenza dell'estremale passante per un punto con data direzione.

Ci proponiamo ora di stabilire direttamente la proposizione del n.º precedente, e sotto condizioni un po' più generali, deducendola dalla considerazione dell'equazione (11).

a). Supponiamo che, per tutti i punti (x, y) del campo A , la $f_{y'}(x, y, y')$ sia funzione sempre crescente della y' in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') appartenente a (Y_1', Y_2') .

Cominciamo col considerare un punto (x_0, y_0) interno al campo A , relativamente alla striscia S_A , con $x_0 < b^*$, e fissiamo un valore y_0' tale che $\bar{Y}_1' < y_0' < \bar{Y}_2'$. Per semplicità di scrittura supporremo $x_0 = 0$.

Affermiamo che è possibile di determinare un $\delta > 0$ in modo che esista almeno un'estremale

$$\mathbf{E}_0: y = y_0(x), \quad 0 \leq x \leq \delta,$$

definita su tutto l'intervallo $(0, \delta)$ e soddisfacente alle condizioni

$$(24) \quad y_0(0) = y_0, \quad y_0'(0) = y_0'.$$

Fissiamo, innanzi tutto, un $l > 0$ in modo che tutti i punti (x, y) soddisfacenti alle $0 \leq x \leq l$, $|y - y_0| \leq l$, appartengano al campo A , e in modo anche che tutti gli y' tali che $|y' - y_0'| \leq l$ appartengano a (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') ; e sia M il massimo modulo della $f_{y'}(x, y, y')$ per tutti i punti (x, y) e tutti gli y' ora indicati.

Posto

$$(25) \quad z = f_{y'}(x, y, y'),$$

si può determinare un $l_1 > 0$ in modo che questa equazione definisca univocamente la y' come funzione continua di (x, y, z) :

$$(26) \quad y' = \varphi(x, y, z),$$

in tutto il campo B definito da

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq l_1, \\ y_0 - l_1 &\leq y \leq y_0 + l_1, \\ z_0 - l_1 &\leq z \leq z_0 + l_1, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$z_0 = f_{y'}(0, y_0, y_0'),$$

e in modo che sia

$$\varphi(0, y_0, z_0) = y_0'.$$

Possiamo supporre $l_1 \leq l$ ed anche che, in tutto il campo B , risulti sempre

$$(27) \quad y_0' - l \leq \varphi(x, y, z) \leq y_0' + l.$$

Poniamo

$$\delta = l_1 : \{ 1 + l + M + |y_0'| \}.$$

Sia ora n un numero intero positivo tale che $1 : n < \delta$, e definiamo la funzione $y_n(x)$ ponendo

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} y_n(x) = y_0 + y_0' x, \quad \text{per } 0 \leq x \leq 1 : n, \\ y_n(x) = y_0 + \frac{1}{n} y_0' + \int_0^{x-(1:n)} \varphi(x, y_n(x), z_0 + \int_0^x f_y(x, y_n(x), y_n'(x)) dx) dx, \quad \text{per } \frac{1}{n} < x \leq \delta. \end{array} \right.$$

Verifichiamo che è effettivamente possibile di definire così la $y_n(x)$ in tutto l'intervallo $(0, \delta)$.

In $(0, \frac{1}{n})$ la $y_n(x)$ risulta continua insieme con $y_n'(x)$, ed è

$$(29) \quad |y_n(x) - y_0| < l_1 < l,$$

$$(30) \quad |y_n'(x) - y_0'| < l,$$

$$(31) \quad \left| \int_0^x f_y(x, y_n(x), y_n'(x)) dx \right| < l_1,$$

e la

$$(32) \quad \varphi(x, y_n(x), z_0 + \int_0^x f_y(x, y_n(x), y_n'(x)) dx)$$

risulta calcolata sul *campo* B ed il suo valore è funzione continua di x e verifica la (27). Le (28) definiscono perciò la $y_n(x)$ anche in $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$.

In $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ la $y_n(x)$ risulta continua insieme con $y_n'(x)$, la $y_n'(x)$ verifica la (30) e la $y_n(x)$ la (29); vale perciò la (31) e l'espressione (32) è ancora calcolata sul *campo* B e il suo valore è funzione continua di x e soddisfa la (27).

Così proseguendo si vede che le (28) definiscono effettivamente la $y_n(x)$ su tutto l'intervallo $(0, \delta)$ come funzione continua a derivata $y_n'(x)$ continua e in modo da verificare sempre le (29) e (30).

Le $y_n(x)$ e $y_n'(x)$ risultano pertanto, per tutti gli n tali che $1 : n < \delta$, tutte ugualmente limitate in $(0, \delta)$; e ne segue che le $y_n(x)$ sono ivi anche tutte ugualmente continue. E siccome è

$$y_n'(x) = y_0', \quad \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{n},$$

$$y_n'(x) = \varphi\left(x - \frac{1}{n}, y_n\left(x - \frac{1}{n}\right), z_0 + \int_0^{x-(1:n)} f_y(x, y_n(x), y_n'(x)) dx\right), \quad \text{per } \frac{1}{n} < x \leq \delta,$$

e la φ qui scritta è sempre calcolata in un punto del *campo* B , ed è

$$|f_y(x, y_n(x), y_n'(x))| \leq M,$$

donde le funzioni

$$z_0 + \int_0^{x-(1:n)} f_y(x, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

risultano tutte ugualmente continue, altrettanto può dirsi delle $y_n'(x)$. Si può dunque scegliere nella successione delle $y_n'(x)$ una successione parziale $y'_{n_m}(x)$ uniformemente convergente in tutto $(0, \delta)$ verso una funzione continua, che indicheremo con $y'_\infty(x)$. Allora la successione delle

$$y_{n_m}(x) = y_0 + \int_0^x y'_{n_m}(x) dx$$

convergerà anch'essa uniformemente verso una funzione continua $y_\infty(x)$, che avrà come derivata, in tutto $(0, \delta)$, precisamente la $y'_\infty(x)$. E sarà $y_\infty(0) = y_0, y'_\infty(0) = y'_0$.

Indicato con $\varphi_n(x)$ il valore dell'espressione (32), si ha poi

$$\left| \int_0^x \varphi_n(x) dx - \int_0^{x-(1:n)} \varphi_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{n} (|y'_0| + l),$$

perchè il valore (32) verifica sempre la (27); mentre, d'altra parte, è, per $m \rightarrow \infty$,

$$\int_0^x \varphi_{n_m}(x) dx = \int_0^x \varphi(x, y_\infty(x), z_0 + \int_0^x f_y(x, y_\infty(x), y'_\infty(x)) dx) dx.$$

Dunque, per $m \rightarrow \infty$, dalle (28) segue, in tutto $(0, \delta)$,

$$y_\infty(x) = y_0 + \int_0^x \varphi(x, y_\infty(x), z_0 + \int_0^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx) dx,$$

$$y'_\infty(x) = \varphi(x, y_\infty(x), z_0 + \int_0^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx),$$

e, per le (25) e (26),

$$z_0 + \int_0^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx = f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty),$$

ossia

$$f_y(x, y_\infty, y'_\infty) - f_{y'}(0, y_\infty(0), y'_\infty(0)) - \int_0^x f_{yy'}(x, y_\infty, y'_\infty) dx = 0,$$

e questo mostra che la curva

$$y = y_\infty(x), \quad 0 \leq x \leq \delta,$$

è un'estremale.

Quanto abbiamo affermato è così provato.

b). La dimostrazione precedente mostra senz'altro che vale il seguente teorema:
Se, per tutti i punti (x, y) del campo A , la $f_y(x, y, y')$ è funzione sempre crescente della y' in uno stesso intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') appartenente a (Y_1', Y_2') ; presi ad arbitrio tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \varrho$, con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$ e $\varrho > 0$, si può

determinare un $\delta_0 > 0$ in modo che, scelti comunque un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di A_0 ed un y_0' dell'intervallo (λ_1, λ_2) , esista almeno un'estremale

$$\mathbf{E}_0: \quad y = y_0(x), \quad x_0 - \delta_0 \leq x \leq x_0 + \delta_0,$$

sempre soddisfacente alle condizioni

$$\begin{aligned} y_0(x_0) = y_0, \quad y_0'(x_0) = y_0', \\ |y_0'(x) - y_0'(x_0)| < \varrho, \end{aligned}$$

intendendosi anche qui di non considerare quella parte dell'intervallo $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ eventualmente esterna a (a^*, b^*) .

Questo teorema si applica, in particolare, a tutti gli integrali I_C quasi-regolari positivi normali.

11. - Unicità dell'estremale passante per un punto con data direzione.

a). Supponiamo che, in un intervallo limitato (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') contenuto in (Y_1', Y_2') , la $f(x, y, y')$ soddisfi alla *condizione di regolarità a)*, e che sia, per ogni coppia $(x, y_1), (x, y_2)$ di punti del campo A , di uguale ascissa, e per ogni y' di (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') ,

$$(33) \quad |f_y(x, y_1, y') - f_y(x, y_2, y')| \leq N |y_1 - y_2|,$$

e, per ogni punto (x, y) di A ed ogni coppia y_1', y_2' di valori dell'intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') ,

$$(34) \quad |f_y(x, y, y_1') - f_y(x, y, y_2')| \leq N |y_1' - y_2'|.$$

Considerato un punto (x_0, y_0) interno al campo A , relativamente alla striscia S_A , con $x_0 < b^*$, e fissato un y_0' tale che $\bar{Y}_1' < y_0' < \bar{Y}_2'$, affermiamo che è possibile di determinare un $\delta_0 > 0$ in modo che, se è $0 < \delta \leq \delta_0$, non possano esistere due estremali distinte

$$\mathbf{E}_1: \quad y = y_1(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \delta,$$

$$\mathbf{E}_2: \quad y = y_2(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \delta,$$

definite sullo stesso intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ e soddisfacenti alle condizioni

$$(35) \quad \begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0 \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Sia l un numero positivo tale che tutti i punti (x, y) soddisfacenti alle $x_0 \leq x \leq x_0 + l$, $|y - y_0| \leq l$, appartengano al campo A e tale pure che tutti gli y' soddisfacenti alla $|y' - y_0'| \leq l$ appartengano all'intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') . Consideriamo un δ_0 positivo, minore di l e sufficientemente piccolo affinché ogni estremale uscente dal punto (x_0, y_0) con direzione di coefficiente angolare y_0' abbia, su tutto l'intervallo $(x_0, x_0 + \delta_0)$, la derivata $y'(x)$ sempre compresa nell'intervallo $(y_0' - l, y_0' + l)$: questo è possibile in virtù del n.º 3. Supponiamo, inoltre, δ_0 tale che risulti

$$(36) \quad \delta_0 < l: \{ |y_0'| + l \}, \quad \delta_0 < m: 3N,$$

dove m rappresenta il secondo membro della (19) relativo a tutto l'intervallo (limitato) (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') .

Ciò posto, si supponga che esistano le due estremali \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 più sopra indicate. Avremo, per la (11), su tutto $(x_0, x_0 + \delta)$,

$$f_{y'}(x, y_1(x), y_1'(x)) - f_{y'}(x_0, y_0, y_0') - \int_{x_0}^x f_{y''}(x, y_1, y_1') dx = 0,$$

$$f_{y'}(x, y_2(x), y_2'(x)) - f_{y'}(x_0, y_0, y_0') - \int_{x_0}^x f_{y''}(x, y_2, y_2') dx = 0,$$

e sottraendo membro a membro

$$f_{y'}(x, y_1(x), y_1'(x)) - f_{y'}(x, y_2(x), y_2'(x)) = \int_{x_0}^x \{f_{y''}(x, y_1, y_1') - f_{y''}(x, y_2, y_2')\} dx$$

ed anche

$$|f_{y'}(x, y_1, y_1') - f_{y'}(x, y_1, y_2')| \leq |f_{y'}(x, y_2, y_2') - f_{y'}(x, y_1, y_2')| +$$

$$+ \int_{x_0}^x \{|f_{y''}(x, y_1, y_1') - f_{y''}(x, y_2, y_1')| + |f_{y''}(x, y_2, y_1') - f_{y''}(x, y_2, y_2')|\} dx,$$

donde segue, ponendo $\delta y = y_1 - y_2$, $\delta y' = y_1' - y_2'$, e tenendo conto delle ipotesi fatte ⁽¹⁰⁾

$$(37) \quad m |\delta y'| \leq N |\delta y| + N \int_{x_0}^x \{|\delta y| + |\delta y'|\} dx.$$

Indichiamo con Δ il massimo valore di $|\delta y'|$ in $(x_0, x_0 + \delta)$, e sia x_1 uno dei punti di questo intervallo in cui $|\delta y'|$ assume tale valore Δ . Scrivendo la precedente disuguaglianza per $x = x_1$, e tenendo presente che è

$$\delta y = \int_{x_0}^{x_1} \delta y' dx,$$

otteniamo

$$m \Delta \leq N \Delta \left\{ (x_1 - x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} + (x_1 - x_0) \right\},$$

$$(m - 3N\delta) \Delta \leq 0,$$

e, per la seconda delle (36),

$$\Delta \leq 0.$$

Ma è, per la sua stessa definizione, $\Delta \geq 0$. Si ha dunque $\Delta = 0$, vale a dire $|\delta y'| \equiv 0$ in tutto $(x_0, x_0 + \delta)$, e perciò anche $\delta y \equiv y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$, e le due estremali \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 non sono distinte, come appunto volevamo provare.

⁽¹⁰⁾ Si tenga anche presente quanto si è detto in ⁽⁸⁾.

b). Quanto abbiamo dimostrato in a) vale anche se, invece delle (33) e (34), si hanno le disuguaglianze

$$(33') \quad |f_y(x, y_1, y') - f_y(x, y_2, y')| \leq \frac{N_1(x)}{|x-x_0|} |y_1 - y_2|,$$

$$(34') \quad |f_y(x, y, y_1') - f_y(x, y, y_2')| \leq N_2(x) |y_1' - y_2'|,$$

con $N_1(x)$ e $N_2(x)$ funzioni non negative integrabili (nel senso del LEBESGUE) in (a^*, b^*) , e di più con $N_2(x)$ tale che

$$N_2(x) |x - x_0| \rightarrow 0, \quad \text{per } x - x_0 \rightarrow 0.$$

Ed infatti, supponendo δ_0 sufficientemente piccolo, si ottiene ora, in luogo della (37),

$$m |\delta y'| \leq N_2(x) |\delta y| + \int_{x_0}^x \left\{ \frac{N_1(x)}{|x-x_0|} |\delta y| + N_2(x) |\delta y'| \right\} dx$$

e quindi

$$m \Delta \leq \Delta \left[N_2(x_1)(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \{ N_1(x) + N_2(x) \} dx \right],$$

donde $\Delta = 0$.

c). Quanto abbiamo provato in a) vale anche se, invece dell'ipotesi relativa alla *condizione di regolarità a)*, si ammette che il rapporto incrementale della f_y rispetto alla y' resti sempre, in (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') , $\geq m |x - x_0|^a$, con $m > 0$ e $0 \leq a < 1$; oppure resti sempre $\geq m |x - x_0|$, con $m > 2N$ ⁽⁴¹⁾.

d). Dalla dimostrazione data in a) risulta facilmente il seguente teorema:

Se, in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') appartenente ad (Y_1', Y_2') , la $f(x, y, y')$ soddisfa alla condizione di regolarità a);

se, per tutti i punti (x, y) del campo A e per tutti gli y' di ogni intervallo finito (λ_1', λ_2') contenuto in (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') , la $f_y(x, y, y')$ è lipschitziana rispetto alla y ed alla y' ;

presi ad arbitrio due numeri λ_1 e λ_2 , con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$, si può determinare un δ_0 in modo che, se è $0 < \delta \leq \delta_0$, scelti comunque un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di A_0 ed un y_0' dell'intervallo (λ_1, λ_2) , non possa esistere più di un'estremale passante per il punto P_0 , avente, per $x = x_0$, la derivata $y'(x)$ uguale a y_0' , e definita su tutta la parte dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ contenuta in (a^, b^*) .*

12. - Continuità delle estremali rispetto agli elementi iniziali.

Ammesse le ipotesi del teorema di unicità del n.º 11, d);

⁽⁴¹⁾ Ciò si applica, per esempio, se è

$$f(x, y, y') \equiv y'^4 + \sqrt[3]{xy} y'^2 \quad \text{oppure} \quad f(x, y, y') \equiv 4xy'^2 + y^2 y' + y^2,$$

con $x_0 = y_0 = y_0' = 0$.

scelti ad arbitrio tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \varrho$, con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$ e $\varrho > 0$, si può determinare un $\delta > 0$ in modo che, se

$$\mathbf{E}_0: y = y_0(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0,$$

è una qualunque estremale costituita tutta di punti di A_0 e soddisfacente su tutto (a_0, b_0) alla condizione

$$\lambda_1 \leq y_0'(x) \leq \lambda_2,$$

se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ è un punto del campo A distante da $P_0 \equiv (a_0, y_0(a_0))$ non più di δ , e se y_1' è un valore tale che $|y_1' - y_0'(a_0)| \leq \delta$, l'estremale \mathbf{E}_1 , uscente da P_1 con direzione di coefficiente angolare y_1' , esista su tutta la parte dell'intervallo $(a_0, b_0 + \delta)$ contenuta in (a^*, b^*) , ed appartenga, su tutta la parte indicata, all'intorno $(\varrho)^2$ della \mathbf{E}_0 ⁽¹²⁾.

Sia ϱ_1 un numero positivo $\leq \varrho$, tale che $\bar{Y}_1' < \lambda_1 - \varrho_1 < \lambda_2 + \varrho_1 < \bar{Y}_2'$ e tale pure che tutti i punti di A distanti da almeno un punto di A_0 non più di $2\varrho_1$ risultino interni ad A , relativamente alla striscia S_A . Sia poi ϱ_2 un altro numero positivo $< \varrho_1 : 2$. In virtù dei teoremi dei n.º 10, *b*), e 11, *d*), è possibile di determinare un numero $l > 0$ in modo che, se $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ è un punto del campo A distante da un punto di A_0 non più di ϱ_2 , e con $\bar{x} < b^*$, sempre esista un'estremale $\bar{\mathbf{E}}$ uscente da \bar{P} con direzione di coefficiente angolare \bar{y}' , contenuto nell'intervallo $(\lambda_1 - \varrho_2, \lambda_2 + \varrho_2)$, e tale estremale risulti definita su tutta la parte dell'intervallo $(\bar{x}, \bar{x} + l)$ contenuta in (a^*, b^*) , e sia unica su questa parte. Possiamo anche imporre ad l di esser tale che, sulla parte di $(\bar{x}, \bar{x} + l)$ indicata, la $\bar{\mathbf{E}}$ abbia la $y'(x)$ sempre interna all'intervallo $(\bar{y}' - \varrho_2, \bar{y}' + \varrho_2)$.

Supponiamo ora che il teorema enunciato non sia vero. Allora, in corrispondenza ad ogni numero intero positivo n , potremo scegliere:

1º) un'estremale

$$\mathbf{E}_{0,n}: y = y_{0,n}(x), \quad a_{0,n} \leq x \leq b_{0,n},$$

costituita tutta di punti di A_0 e soddisfacente in tutto $(a_{0,n}, b_{0,n})$ alla

$$\lambda_1 \leq y'_{0,n}(x) \leq \lambda_2;$$

2º) un punto $P_{1,n} \equiv (x_{1,n}, y_{1,n})$ del campo A , distante da $P_{0,n} \equiv (a_{0,n}, y_{0,n}(a_{0,n}))$ non più di $\varrho_2 : n$;

3º) un y_n' tale che $|y_n' - y'_{0,n}(a_{0,n})| \leq \varrho_2 : n$;

in modo che, considerata l'estremale \mathbf{E}_n uscente da $P_{1,n}$ con direzione di coefficiente angolare y_n' e prolungata il più possibile nel senso delle x crescenti, e detto $\bar{\mathbf{E}}_n$ il massimo arco della \mathbf{E}_n che parte da $P_{1,n}$ e che appartiene all'in-

(12) Per la definizione di intorno $(\varrho)^2$ della \mathbf{E}_0 , vedasi *Fondamenti*, Vol. II, p. 357.

torno $(\varrho_1)^2$ della $\mathbf{E}_{0,n}$, se l'ascissa \bar{x}_n del secondo punto terminale di $\bar{\mathbf{E}}_n$ è $\geq b_{0,n}$, oppure all'intorno $(\varrho_1)^2$ dell'arco della $\mathbf{E}_{0,n}$ che parte da $P_{0,n}$ ed ha il secondo punto terminale di ascissa \bar{x}_n , se è $\bar{x}_n < b_{0,n}$, risulti

$$\bar{x}_n \leq b_{0,n} + \frac{\varrho_2}{n},$$

e risulti anche soddisfatta, qualora sia $\bar{x}_n = b^*$, almeno una delle due uguaglianze

$$|\bar{y}_n(\bar{x}_n) - y_{0,n}(b_{0,n})| = \varrho_1, \quad |\bar{y}'_n(\bar{x}_n) - y'_{0,n}(b_{0,n})| = \varrho_1,$$

dove si è indicata con $y = \bar{y}_n(x)$ l'equazione di $\bar{\mathbf{E}}_n$.

Si osservi che, se è $\bar{x}_n \leq b_{0,n}$, per n sufficientemente grande dovrà essere soddisfatta almeno una delle due uguaglianze

$$|\bar{y}_n(\bar{x}_n) - y_{0,n}(\bar{x}_n)| = \varrho_1, \quad |\bar{y}'_n(\bar{x}_n) - y'_{0,n}(\bar{x}_n)| = \varrho_1,$$

e, se è $b_{0,n} \leq \bar{x}_n \leq b^*$, dovrà essere soddisfatta almeno una delle due

$$|\bar{y}_n(\bar{x}_n) - y_{0,n}(b_{0,n})| = \varrho_1, \quad |\bar{y}'_n(\bar{x}_n) - y'_{0,n}(b_{0,n})| = \varrho_1.$$

Dalla proposizione del n.º 3, b), segue che le derivate $y'_{0,n}(x)$ e $\bar{y}'_n(x)$ sono tutte ugualmente continue sui rispettivi intervalli di definizione; e siccome sono anche ugualmente limitate, come le $y_{0,n}(x)$ e $\bar{y}_n(x)$, ne viene che dalla successione degli indici n se ne può estrarre un'altra n_m ($m=1, 2, \dots$) in modo che: 1º) gli intervalli (a_{0,n_m}, b_{0,n_m}) e $(x_{1,n_m}, \bar{x}_{n_m})$ convergono rispettivamente a due intervalli limiti $(a_{0,\infty}, b_{0,\infty})$ e $(x_{1,\infty}, \bar{x}_{\infty})$ ambedue non nulli; 2º) le $y_{0,n_m}(x)$ e $\bar{y}_{n_m}(x)$ convergono uniformemente a due funzioni $y_{0,\infty}(x)$ e $\bar{y}_{\infty}(x)$, date rispettivamente su $(a_{0,\infty}, b_{0,\infty})$ e $(x_{1,\infty}, \bar{x}_{\infty})$; 3º) le $y'_{0,n_m}(x)$ e $\bar{y}'_{n_m}(x)$ convergono uniformemente verso $y'_{0,\infty}(x)$ e $\bar{y}'_{\infty}(x)$, rispettivamente.

Ora le curve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0,\infty}: & \quad y = y_{0,\infty}(x), & a_{0,\infty} \leq x \leq b_{0,\infty}, \\ \bar{\mathbf{E}}_{\infty}: & \quad y = \bar{y}_{\infty}(x), & x_{1,\infty} \leq x \leq \bar{x}_{\infty}, \end{aligned}$$

sono due estremali; i loro punti iniziali coincidono (onde $a_{0,\infty} = x_{1,\infty}$), e in questi punti esse hanno la stessa tangente. Di più, è $\bar{x}_{\infty} \leq b_{0,\infty}$, e si ha

$$y_{0,\infty}(\bar{x}_{\infty}) = \bar{y}_{\infty}(\bar{x}_{\infty}), \quad y'_{0,\infty}(\bar{x}_{\infty}) = \bar{y}'_{\infty}(\bar{x}_{\infty}).$$

D'altra parte, deve valere almeno una delle uguaglianze

$$|\bar{y}_{\infty}(\bar{x}_{\infty}) - y_{0,\infty}(\bar{x}_{\infty})| = \varrho_1, \quad |\bar{y}'_{\infty}(\bar{x}_{\infty}) - y'_{0,\infty}(\bar{x}_{\infty})| = \varrho_1.$$

Siamo giunti perciò ad una contraddizione, la quale prova la verità del teorema enunciato.

13. - Ancora sull'esistenza dell'estremale che unisce due punti vicini.

Gli ultimi risultati raggiunti ci permettono di stabilire una proposizione circa l'esistenza dell'estremale che unisce due punti vicini, in condizioni diverse da quelle del teorema del n.º 5.

Ammesse le ipotesi del teorema del n.º 11, d);

presi ad arbitrio tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \varrho$, con $\bar{Y}_1' < \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{Y}_2'$, e $\varrho > 0$, se ne può sempre determinare un altro δ_0 , positivo, con $\delta_0 < \varrho$, in modo che, se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono due punti qualsiasi, rispettivamente di A_0 e di A , distanti fra loro meno di δ_0 e soddisfacenti alle (17), esista sempre almeno un'estremale che congiunge P_1 e P_2 , che giace tutta nel cerchio (P_1, δ_0) e che ha la derivata $y'(x)$ sempre compresa fra i numeri (18).

Fissiamo, innanzi tutto, un $\eta > 0$, tale che sia $2\eta < \varrho$ e $\bar{Y}_1' < \lambda_1 - 2\eta < \lambda_2 + 2\eta < \bar{Y}_2'$. Facciamo poi, nel teorema di esistenza del n.º 10, b), $\varrho = \eta$ sostituendo a $\lambda_1, \lambda_1 - \eta$ ed a $\lambda_2, \lambda_2 + \eta$, e determiniamo il corrispondente δ_0 . Questo δ_0 possiamo senz'altro supporlo minore del δ_0 determinato dal teorema di unicità del n.º 11, d), quando in esso si sostituisca λ_1 con $\lambda_1 - \eta$ e λ_2 con $\lambda_2 + \eta$; e possiamo anche supporlo tale che tutti i punti che giacciono nella striscia S_A e che distano da un qualsiasi punto di A_0 meno di $\delta_0 \{1 + |\lambda_1| + |\lambda_2| + 2\eta\}$ appartengano al campo A . Sia, per fissare le idee, $x_1 < x_2$; e supponiamo che la distanza dei due punti P_1 e P_2 risulti minore del δ_0 più sopra determinato. Avremo così $x_2 - x_1 < \delta_0$.

Consideriamo, su tutto l'intervallo (x_1, x_2) , le due estremali $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$, uscenti da P_1 con direzioni di coefficienti angolari $\lambda_0 - \eta$ e $\lambda_0 + \eta$, dove abbiamo indicato con λ_0 il rapporto $(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$. Se z_1 e z_2 sono le ordinate dei punti di \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 di ascissa x_2 , abbiamo, per quanto precede, $z_1 < y_2 < z_2$.

Consideriamo poi, sull'intervallo (x_1, x_2) e per ogni λ dell'intervallo $(\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta)$, l'estremale \mathbf{E} uscente da P_1 con direzione di coefficiente angolare λ , e indichiamo con $z(\lambda)$ l'ordinata del punto della \mathbf{E} di ascissa x_2 . Per la continuità (teorema del n.º 12) di $z(\lambda)$ rispetto a λ , e per la

$$z(\lambda_0 - \eta) = z_1 < y_2 < z_2 = z(\lambda_0 + \eta),$$

abbiamo che, per almeno un $\bar{\lambda}$ dell'intervallo $(\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta)$, è $z(\bar{\lambda}) = y_2$. Esiste così almeno un'estremale che unisce P_1 a P_2 , la quale, in virtù del teorema del n.º 10, b), e della determinazione qui fatta di δ_0 , ha la derivata $y'(x)$ sempre compresa fra $\lambda_0 - 2\eta$ e $\lambda_0 + 2\eta$, e quindi fra i numeri (18). Se poi η è stato scelto sufficientemente piccolo, si ha pure che questa estremale giace tutta nel cerchio (P_1, δ_0) .

14. - Derivabilità delle estremali rispetto agli elementi iniziali.

Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema :

Se, in un intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') appartenente a (Y_1', Y_2') , la $f(x, y, y')$ soddisfa alla condizione di regolarità a);

se per tutti i punti (x, y) del campo A e per tutti gli y' finiti dell'intervallo (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') esistono finite e continue le derivate parziali $f_{yy}, f_{yy'}, f_{y'y'}$; considerata un'estremale

$$\mathbf{E}_0: y = y_0(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0,$$

tutta costituita di punti di A_0 e tale che sia sempre, in (a_0, b_0) , $\bar{Y}_1' < y_0'(x) < \bar{Y}_2'$, al variare degli elementi iniziali $a_0, y_0(a_0) = y_0, y_0'(a_0) = y_0'$, le $y_0(x)$ e $y_0'(x)$ risultano funzioni derivabili di y_0 e y_0' , con derivate parziali del primo ordine continue rispetto al complesso $[x, a_0, y_0, y_0']$.

Se poi esiste finita e continua anche la derivata $f_{y'x}$, per gli stessi (x, y, y') indicati per le altre derivate parziali seconde della f , $y_0(x)$ e $y_0'(x)$ risultano funzioni derivabili anche di a_0 , con derivata parziale del primo ordine continua rispetto al complesso $[x, a_0, y_0, y_0']$.

a). Cominciamo col dimostrare la derivabilità di $y_0(x)$ e $y_0'(x)$ rispetto a y_0 . Consideriamo, per tutti gli ω sufficientemente piccoli e non nulli, l'estremale

$$\mathbf{E}_\omega: y = y_\omega(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0,$$

definita dai suoi elementi iniziali $a_0, y_\omega(a_0) = y_0 + \omega, y_\omega'(a_0) = y_0'$; e osserviamo che, in virtù di quanto abbiamo stabilito nel n.º precedente, per $\omega \rightarrow 0$, $y_\omega(x)$ e $y_\omega'(x)$ tendono uniformemente in tutto (a_0, b_0) verso $y_0(x)$ e $y_0'(x)$, rispettivamente.

Poichè tanto la \mathbf{E}_0 quanto la \mathbf{E}_ω verificano, su tutto (a_0, b_0) , l'equazione delle estremali (11), abbiamo

$$\begin{aligned} f_{y'}(x, y_\omega(x), y_\omega'(x)) - f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \\ - \int_{a_0}^x [f_y(x, y_\omega(x), y_\omega'(x)) - f_y(x, y_0(x), y_0'(x))] dx = \\ = f_{y'}(a_0, y_0 + \omega, y_0') - f_{y'}(a_0, y_0, y_0'), \end{aligned}$$

e quindi, dividendo per ω e ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(x) = \{y_\omega(x) - y_0(x)\} : \omega, \\ (38) \quad \bar{f}_{y'y} \varphi_\omega + \bar{f}_{y'y'} \varphi_\omega' - \int_{a_0}^x [\bar{f}_{yy} \varphi_\omega + \bar{f}_{yy'} \varphi_\omega'] dx = f_{y'y}(a_0, y_0 + \bar{\theta}\omega, y_0'), \end{aligned}$$

con evidente significato dei simboli adottati; e per $\omega \rightarrow 0$, $\bar{f}_{y'y}, \bar{f}_{y'y'}, \bar{f}_{yy}, \bar{f}_{yy'}$ convergono uniformemente, su tutto (a_0, b_0) , verso $f_{y'y}(x, y_0(x), y_0'(x)), f_{y'y'}(\dots), f_{yy}(\dots), f_{yy'}(\dots)$.

Indichiamo con N un numero positivo superiore ai valori assoluti delle derivate $f_{yy}, f_{yy'} = f_{y'y}, f_{y'y'}$, per tutti i punti (x, y) del campo A e per tutti gli y' di un intervallo limitato (λ_1, λ_2) , di (\bar{Y}_1', \bar{Y}_2') , tale che risulti, per tutti gli x di (a_0, b_0) ,

$$\lambda_1 < y_0'(x) < \lambda_2.$$

Considerato il numero m della *condizione di regolarità a*, relativo all'intervallo (λ_1, λ_2) , sia l il minore dei numeri 1 e $m:6N$. Abbiamo allora dalla (38), per tutti gli ω sufficientemente piccoli in modulo,

$$m |\varphi'_{\omega}| \leq N \left\{ |\varphi_{\omega}| + \int_{a_0}^x [|\varphi_{\omega}| + |\varphi'_{\omega}|] dx + 1 \right\};$$

e se indichiamo con Δ_{ω} il massimo valore di $|\varphi'_{\omega}|$ in tutto l'intervallo $(a_0, a_0 + l)$ ⁽¹³⁾, tenendo presente che è

$$\varphi_{\omega}(x) = \varphi_{\omega}(a_0) + \int_{a_0}^x \varphi'_{\omega}(x) dx,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} m \Delta_{\omega} &\leq N \{ |\varphi_{\omega}(a_0)| + \Delta_{\omega} l + l [|\varphi_{\omega}(a_0)| + \Delta_{\omega} l + \Delta_{\omega}] + 1 \}, \\ \left(\frac{m}{N} - 3l \right) \Delta_{\omega} &\leq 2 |\varphi_{\omega}(a_0)| + 1, \\ \Delta_{\omega} &\leq \frac{2N}{m} \{ 2 |\varphi_{\omega}(a_0)| + 1 \}, \end{aligned}$$

e perciò, in tutto $(a_0, a_0 + l)$,

$$(39) \quad |\varphi'_{\omega}(x)| \leq \frac{2N}{m} \{ 2 |\varphi_{\omega}(a_0)| + 1 \}, \quad |\varphi_{\omega}(x)| \leq |\varphi_{\omega}(a_0)| + \frac{2N}{m} \{ 2 |\varphi_{\omega}(a_0)| + 1 \};$$

e qui è $\varphi_{\omega}(a_0) = 1$. Queste disuguaglianze provano che $\varphi_{\omega}(x)$ e $\varphi'_{\omega}(x)$, per tutti gli ω sufficientemente piccoli in valore assoluto, sono ugualmente limitate in $(a_0, a_0 + l)$.

Ragionando sulla (38) scritta nella forma

$$\begin{aligned} \bar{f}_{y'y} \varphi_{\omega} + \bar{f}_{y'y'} \varphi'_{\omega} - \int_{a_0+l}^x [\bar{f}_{yy} \varphi_{\omega} + \bar{f}_{yy'} \varphi'_{\omega}] dx = \\ = f_{y'y}(a_0, y_0 + \bar{\theta}\omega, y_0') + \int_{a_0}^{a_0+l} [\bar{f}_{yy} \varphi_{\omega} + \bar{f}_{yy'} \varphi'_{\omega}] dx, \end{aligned}$$

si prova la stessa cosa anche in $(a_0 + l, a_0 + 2l)$; e così proseguendo, risulta che, per tutti gli ω in modulo sufficientemente piccoli, $\varphi_{\omega}(x)$ e $\varphi'_{\omega}(x)$ sono ugualmente limitate in tutto (a_0, b_0) .

Stabilito questo fatto, scriviamo la (38) per un altro valore ω_1 di ω (anch'esso non nullo e sufficientemente piccolo in modulo)

$$\tilde{f}_{y'y} \varphi_{\omega_1} + \tilde{f}_{y'y'} \varphi'_{\omega_1} - \int_{a_0}^x [\tilde{f}_{yy} \varphi_{\omega_1} + \tilde{f}_{yy'} \varphi'_{\omega_1}] dx = f_{y'y}(a_0, y_0 + \tilde{\theta}\omega_1, y_0'),$$

e poi sottraggiamo membro a membro dalla (38), ponendo

$$\delta\varphi = \varphi_{\omega}(x) - \varphi_{\omega_1}(x), \quad \delta\varphi' = \varphi'_{\omega}(x) - \varphi'_{\omega_1}(x).$$

⁽¹³⁾ Se risultasse $a_0 + l > b_0$ ci si limiterebbe all'intervallo (a_0, b_0) .

Otteniamo così

$$\begin{aligned} & \bar{f}_{y'y} \delta \varphi + \bar{f}_{y'y'} \delta \varphi' - \int_{a_0}^x [\bar{f}_{yy} \delta \varphi + \bar{f}_{yy'} \delta \varphi'] dx = \\ & = [f_{y'y}(a_0, y_0 + \bar{\theta} \omega, y_0') - f_{y'y}(a_0, y_0 + \bar{\theta} \omega_1, y_0')] + \\ & + (\tilde{f}_{y'y} - \bar{f}_{y'y}) \varphi_{\omega_1} + (\tilde{f}_{y'y'} - \bar{f}_{y'y'}) \varphi'_{\omega_1} - \int_{a_0}^x [(\tilde{f}_{yy} - \bar{f}_{yy}) \varphi_{\omega_1} + (\tilde{f}_{yy'} - \bar{f}_{yy'}) \varphi'_{\omega_1}] dx, \end{aligned}$$

che possiamo scrivere

$$(40) \quad \bar{f}_{y'y} \delta \varphi + \bar{f}_{y'y'} \delta \varphi' - \int_{a_0}^x [\bar{f}_{yy} \delta \varphi + \bar{f}_{yy'} \delta \varphi'] dx = \varepsilon(x),$$

con $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ uniformemente in tutto (a_0, b_0) , quando ω e ω_1 tendono entrambi a 0.

Ragionando sulla (40) come abbiamo fatto precedentemente sulla (38), e preso un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, otteniamo, in tutto l'intervallo $(a_0, a_0 + l)$ e per tutti gli ω e ω_1 sufficientemente piccoli in modulo, analogamente alle (39),

$$|\delta \varphi'| \leq \frac{2N}{m} \{2|\delta \varphi|_{a_0} + \varepsilon\}, \quad |\delta \varphi| \leq |\delta \varphi|_{a_0} + \frac{2N}{m} \{2|\delta \varphi|_{a_0} + \varepsilon\}.$$

E siccome è $|\delta \varphi|_{a_0} = 0$, ne viene, per $\omega \rightarrow 0$, $\omega_1 \rightarrow 0$, che è $\delta \varphi \rightarrow 0$, $\delta \varphi' \rightarrow 0$, uniformemente in tutto $(a_0, a_0 + l)$. Altrettanto si prova sull'intervallo $(a_0 + l, a_0 + 2l)$; ed infine, anche su tutto (a_0, b_0) . Dunque, su tutto questo intervallo, $\varphi_{\omega}(x)$ e $\varphi'_{\omega}(x)$ tendono, per $\omega \rightarrow 0$, uniformemente a due funzioni continue, di cui la seconda è la derivata della prima. Ciò significa che, in tutto (a_0, b_0) , esistono, continue, le derivate parziali del 1° ordine di $y_0(x)$ e $y_0'(x)$ rispetto all'elemento iniziale y_0 . Indicando con $D(x)$ e $D'(x)$, queste derivate parziali, si ha

$$D'(x) = \frac{d}{dx} D(x)$$

e dalla (38) segue, col passaggio al limite per $\omega \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} & f_{y'y}(x, y_0(x), y_0'(x)) D(x) + f_{y'y'}(\dots) D'(x) - \\ & - \int_{a_0}^x [f_{yy}(\dots) D(x) + f_{yy'}(\dots) D'(x)] dx = f_{y'y}(a_0, y_0, y_0'), \end{aligned}$$

la quale può anche scriversi

$$(41) \quad [f_{y'y}(x, y_0(x), y_0'(x)) D(x) + f_{y'y'}(\dots) D'(x)]_{a_0}^x - \int_{a_0}^x [f_{yy}(\dots) D(x) + f_{yy'}(\dots) D'(x)] dx = 0,$$

perchè è $D(a_0) = 1$, $D'(a_0) = 0$.

Il ragionamento qui fatto mostra, con l'ausilio della proposizione del n.° 12, che $D(x)$ e $D'(x)$, in quanto dipendono da a_0, y_0, y_0' , sono funzioni uniformemente

mente continue di queste variabili, per tutti gli x di (a_0, b_0) . E siccome poi $D(x)$ e $D'(x)$ sono funzioni continue di x , ne viene che esse sono anche funzioni continue del complesso $[x, a_0, y_0, y_0']$.

b). Con un ragionamento in tutto analogo a quello fatto in a) si prova che $y_0(x)$ e $y_0'(x)$ sono derivabili anche rispetto a y_0' , con derivate parziali del primo ordine continue rispetto al complesso $[x, a_0, y_0, y_0']$. Se queste derivate parziali si indicano con $D(x)$ e $D'(x)$, esse verificano la (41). Attualmente è $D(a_0)=0$, $D'(a_0)=1$.

c). Veniamo, infine, alla derivabilità rispetto ad a_0 . Potremmo qui procedere in modo analogo a quanto abbiamo fatto in a); ma possiamo raggiungere il nostro scopo più rapidamente, utilizzando i risultati già ottenuti in a) e b).

Osserviamo, innanzi tutto, che, per le ipotesi in cui ora ci troviamo, sull'estremale \mathbf{E}_0 , e su tutte quelle che appartengono ad un suo intorno $(\varrho)^2$, con ϱ sufficientemente piccolo, esiste finita e continua anche la derivata seconda

$$y'' = \frac{f_y - y' f_{y'y} - f_{y'x}}{f_{y'y}}$$

e tale derivata è continua rispetto al complesso $[x, a_0, y_0, y_0']$.

Considerata allora, per tutti gli ω sufficientemente piccoli in modulo, l'estremale

$$\mathbf{E}_\omega: y = y_\omega(x), \quad a_0 + \omega \leq x \leq b_0,$$

definita da $y_\omega(a_0 + \omega) = y_0$ e $y'_\omega(a_0 + \omega) = y_0'$, e continuata, quando sia $\omega > 0$, tale estremale su tutto l'intervallo $(a_0, a_0 + \omega)$, si ha, per $\omega \rightarrow 0$,

$$\frac{y_\omega(a_0) - y_0}{\omega} = \frac{y_\omega(a_0) - y_\omega(a_0 + \omega)}{\omega} \rightarrow -y_0'(a_0) = -y_0',$$

$$\frac{y'_\omega(a_0) - y_0'}{\omega} = \frac{y'_\omega(a_0) - y'_\omega(a_0 + \omega)}{\omega} \rightarrow -y_0''(a_0).$$

E siccome $y_0(x)$ e $y_0'(x)$ sono derivabili rispetto a y_0 e y_0' , come abbiamo già provato in a) e b), ne viene la loro derivabilità anche rispetto ad a_0 , con

$$\frac{\partial y_0(x)}{\partial a_0} = -\frac{\partial y_0(x)}{\partial y_0} y_0' - \frac{\partial y_0(x)}{\partial y_0'} y_0''(a_0),$$

$$\frac{\partial y_0'(x)}{\partial a_0} = -\frac{\partial y_0'(x)}{\partial y_0} y_0' - \frac{\partial y_0'(x)}{\partial y_0'} y_0''(a_0),$$

e così anche la continuità, rispetto a $[x, a_0, y_0, y_0']$, di queste derivate è messa in evidenza.

15. - Continuità e derivabilità rispetto a parametri contenuti nella funzione f .

Supponiamo che la funzione f dipenda, oltre che da x, y, y' , anche da un certo numero di parametri p_1, p_2, \dots, p_n , vale a dire, che sia $f(x, y, y', p_1, p_2, \dots, p_n)$ per tutte le terne (x, y, y') del dominio \mathfrak{F} e per tutte le n^{ple} (p_1, p_2, \dots, p_n) di un certo dominio limitato e chiuso \mathfrak{S} , intendendo che, per tutti gli (x, y, y') e (p_1, p_2, \dots, p_n)

indicati, la f e le sue derivate parziali f_y e $f_{y'}$ siano sempre finite e continue rispetto a $(x, y, y', p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Allora, se le ipotesi del teorema del n.º 12 risultano verificate uniformemente rispetto a tutte le n^{ple} (p_1, p_2, \dots, p_n) di un certo dominio chiuso parziale \mathcal{S}' di \mathcal{S} , e se l'estremale \mathbf{E}_0 è relativa ad un punto $(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$ di \mathcal{S}' , quanto è affermato nel teorema indicato vale per tutte le estremali \mathbf{E}_1 relative ai punti (p_1, p_2, \dots, p_n) di \mathcal{S}' di un certo intorno di $(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$.

Questo risultato si ottiene immediatamente ripetendo il ragionamento del n.º 12.

Coi ragionamenti del n.º 14, si ha anche immediatamente che, se, per le n^{ple} (p_1, p_2, \dots, p_n) di \mathcal{S}' e per tutte le terne (x, y, y') considerate nel teorema del n.º 14, esistono finite le derivate parziali $f_{y, p_1, \dots, p_n}, f_{y, p_n}, f_{y', p_1, \dots, p_n}, f_{y', p_n}$, ed esse, insieme con le $f_{yy}, f_{yy'}, f_{y'y'}, f_{y'x}$, sono sempre continue rispetto a $(x, y, y', p_1, p_2, \dots, p_n)$, dalle ipotesi del teorema indicato, supposte uniformemente verificate in \mathcal{S}' , discende pure che, per un'estremale \mathbf{E}_0 relativa ad un punto $(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$ di \mathcal{S}' , le derivate parziali del primo ordine di $y_0(x)$ e $y_0'(x)$, rispetto ad a_0, y_0, y_0' , sono funzioni continue di $[x, a_0, y_0, y_0', p_1, p_2, \dots, p_n]$ per (p_1, p_2, \dots, p_n) in \mathcal{S}' ; inoltre, se $(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$ è un punto interno a \mathcal{S}' , esistono finite anche le derivate parziali del primo ordine di $y_0(x)$ e $y_0'(x)$ rispetto a p_1, p_2, \dots, p_n , e queste derivate sono anch'esse continue nel complesso $[x, a_0, y_0, y_0', p_1, p_2, \dots, p_n]$.

16. - Osservazione.

È opportuno osservare che la dimostrazione del teorema di STURM contenuta nei *Fondamenti*, Vol. II, pp. 217-218, si applica senz'altro anche all'equazione (41), la quale poi non è che l'equazione (11) relativa alla funzione

$$f(x, y, y') \equiv \varphi_1(x)y'^2 + 2\varphi_2(x)y'y + \varphi_3(x)y^2$$

con

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &\equiv f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)), & \varphi_2(x) &\equiv f_{y'y}(x, y_0(x), y_0'(x)), \\ \varphi_3(x) &\equiv f_{yy}(x, y_0(x), y_0'(x)). \end{aligned}$$