

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

WILLEM VAN DER WOUDE

**Über die Drehungsgruppe in  $R_6$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 4, n° 2  
(1935), p. 163-174

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1935\\_2\\_4\\_2\\_163\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_163_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ÜBER DIE DREHUNGSGRUPPE IN $R_6$

VON WILLEM VAN DER WOUDE (Leiden).

Am Schlusz seiner Verhandlung: *Les groupes réels simples, finis et continus* (Annales Scientifiques de l'École normale supérieure (3), 31 (1914)) gibt E. CARTAN eine Aufzählung bemerkenswerter Beispiele von äquivalenten Gruppen<sup>(1)</sup>. Dabei wird eine dieser Gruppen stets gebildet von den reellen linearen Transformationen, mit Determinante gleich 1, die eine der Formen  $\sum_{i=1}^n \pm x_i^2$  ( $n=4, 5, 6$ ) invariant lassen; m. a. W. eine dieser Gruppen ist die Drehungsgruppe im vier-, fünf- und sechsdimensionalen euclidischen oder pseudo-euclidischen Raume.

Es ist hier an erster Stelle meine Absicht diese Äquivalenzen für den Fall  $n=6$  nochmals in ganz anderer Weise — CARTAN geht von den infinitesimalen Transformationen, ich gehe von den Gleichungen in endlicher Form aus — abzuleiten, während hier auch der bei CARTAN nicht vorkommender Fall der Signatur  $(++++-)$  berücksichtigt ist. Die Cartanschen Resultate für  $n=5$  ergeben sich sogleich hieraus; der Fall  $n=4$  ist öfters behandelt.

Ich zeige dazu, dasz man, von der bekannten Abbildung der Geraden eines dreidimensionalen Raumes  $R_3$  auf die Punkte einer quadratischen Varietät in  $R_5$  (F. KLEIN) ausgehend, sofort zu diesen Äquivalenzen geführt wird (§ 5).

Ich meinte aber dasz es angebracht sein könnte, wenn ich einige Eigenschaften dieser Abbildung hier noch einmal wiederhole (§§ 1, 2). Indem ich angebe welche (endliche) Transformationen in den äquivalenten Gruppen korrespondieren, zeigt es sich dann, dasz die Abbildung der einen Gruppe durch die andere stets auf zwei verschiedene Weisen möglich ist, wie auch aus den Automorphismen dieser Gruppe (oder aus den Transformationen der Kleinschen Varietät in sich mit Verwechslung der auf ihr liegenden Ebenenscharen) unmittelbar ersichtlich ist.

§ 1. - Es sei  $R_3$  ein dreidimensionaler projektiver Raum; Punkt- und Ebenenkoordinaten werden respektive mit  $x_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) und  $\xi_i$  bezeichnet. Eine Gerade

---

<sup>(1)</sup> Herr Dr. H. FREUDENTHAL war so freundlich mich auf die Arbeit Cartan's hinzuweisen. Auch für einige Bemerkungen danke ich ihn.

durch die Punkte  $A(a_i)$  und  $B(b_i)$  kann man durch die sechs homogenen Koordinaten  $p_{ik}(=a_i b_k - a_k b_i)$  bestimmen; es besteht dabei zwischen diesen Koordinaten die Identität

$$p_{23}p_{14} + p_{34}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0.$$

Wenn man nun die  $p_{ik}$  als Punktkoordinaten in einem fünfdimensionalen projektiven Raume  $R_5^*$  auffasst, so ist jede Gerade des  $R_3$  auf einem Punkte einer in  $R_5^*$  liegenden Varietät

$$(1) \quad \Omega^* \equiv p_{23}p_{14} + p_{34}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0$$

abgebildet.

Umgekehrt ist jeder Punkt von  $\Omega^*$  das Bild einer Geraden des  $R_3$  (Abbildung von F. KLEIN).

Auf  $\Omega^*$  liegen zwei Ebenensysteme. Das erste System wird durch die folgenden Gleichungen dargestellt

$$(2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} -x_3 p_{24} + x_2 p_{34} + x_4 p_{23} = 0, \\ x_3 p_{14} - x_1 p_{34} + x_4 p_{31} = 0, \\ -x_2 p_{14} + x_1 p_{24} + x_4 p_{12} = 0, \\ x_1 p_{23} + x_2 p_{31} + x_3 p_{12} = 0. \end{array} \right.$$

Von diesen vier Gleichungen sind stets, d. h. für jedes Wertsystem der  $x_i$ , drei von einander unabhängig; lässt man aber eine Gleichung fort, so bestimmen die drei anderen nicht mehr *jede* Ebene des Systems. Eine Ebene dieses Systems werde ich unten durch  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  angeben; man darf vorläufig die  $x_i$  nur als Parameter dieser Ebenen betrachten (unabhängig von den Punktkoordinaten des Ausgangsraumes  $R_3$ , worauf sie weiterhin abgebildet werden).

Ebenso kann man das zweite Ebenensystem durch

$$(2b) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\xi_3 p_{31} + \xi_2 p_{12} + \xi_4 p_{14} = 0, \\ \xi_3 p_{23} - \xi_1 p_{12} + \xi_4 p_{24} = 0, \\ -\xi_2 p_{23} + \xi_1 p_{31} + \xi_4 p_{34} = 0, \\ \xi_1 p_{14} + \xi_2 p_{24} + \xi_3 p_{34} = 0, \end{array} \right.$$

darstellen.

Eine Ebene dieses Systems werde ich mit  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$  bezeichnen.

Man beweist nun leicht die drei Sätze:

1). Zwei Ebenen eines und desselben Systems haben stets einen Punkt gemein.

2). Eine Ebene  $\{x\}$  und eine Ebene  $\{\xi\}$  haben keinen Punkt gemein, wenn nicht

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i x_i = 0;$$

in diesem Falle schneiden sie sich in einer Geraden.

3). Durch eine Gerade auf  $\Omega^*$  geht eine Eben  $\{x\}$  und eine Ebene  $\{\xi\}$ .

§ 2. - Man kann den Gleichungen (2a) eine ganz andere Deutung geben. Wenn man die  $x_i$  als Punktkoordinaten und die  $p_{ik}$  als Geradenkoordinaten im Ausgangsraume  $R_3$  auffasst, dann drücken sie die Bedingungen aus, dass eine Gerade ( $p_{ik}$ ) durch einen Punkt ( $x_i$ ) geht. Mit den Punkten einer Ebene auf  $\Omega^*$  korrespondieren bei der Kleinschen Abbildung dann in  $R_3$  die Geraden eines Bündels ( $x$ ). Die Abbildung der Geraden in  $R_3$  durch die Punkte der Varietät  $\Omega^*$  in  $R_3^*$  induziert also die Abbildung der Punkte ( $x$ ) in  $R_3$  durch die Ebenen  $\{x\}$  des ersten Systems und ebenso die Abbildung der Ebenen ( $\xi$ ) in  $R_3$  durch die Ebenen  $\{\xi\}$  des zweiten Systems auf  $\Omega^*$  (ausführlicher gesagt: mit jeder Geraden in einer bestimmten Ebene ( $\xi$ ) in  $R_3$  korrespondiert ein Punkt einer bestimmten Ebene  $\{\xi\}$  auf  $\Omega^*$ ).

Die drei vorhin gegebenen Sätze kann man also als Übersetzungen der folgenden Aussagen auffassen:

- 1). Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade, zwei Ebenen eine Schnittgerade.
- 2). Eine Ebene und ein Geradenbündel haben keine Gerade gemein, es sei denn dass der Mittelpunkt des Bündels in der Ebene liegt; dann aber haben sie einen Strahlenbüschel gemein.
- 3). Ein Strahlenbüschel hat einen Mittelpunkt und liegt in einer Ebene.

Man kann ebensogut die Punkte des  $R_3$  auf die Ebenen des Systems (2b) abbilden. Ich deute dazu auf einen Augenblick die Punktkoordinaten in  $R_3^*$  mit  $p_{ik}^*$  statt  $p_{ik}$  an, ebenso die koordinaten der Ebenen beider Systeme auf  $\Omega^*$  mit  $x_i^*$  und  $\xi_i^*$ ; die ungekreuzten  $p_{ik}$ ,  $x_i$ ,  $\xi_i$  mögen für die Geraden-, Punkt- und Ebenenkoordinaten in  $R_3$  reserviert bleiben. Die vorgehende Abbildung wird dann durch die Gleichungen

$$p_{ik}^* = p_{ik}$$

gegeben; sie induziert die weiteren Abbildungen, die durch

$$x_i^* = x_i, \quad \xi_i^* = \xi_i$$

charakterisiert sind.

Man bekommt nun die zweite Abbildung durch

$$p_{23}^* = p_{14}, \quad p_{24}^* = p_{31}, \quad p_{31}^* = p_{24}, \quad \text{u. s. w.};$$

es folgen dann die weiteren Abbildungsgleichungen

$$x_i^* = \xi_i, \quad \xi_i^* = x_i,$$

§ 3. - Eine Drehung in  $R_6$  um den Ursprung des Koordinatensystems ist eine orthogonale Transformation, d. h. eine Transformation

$$(3) \quad y_i' = \sum_{k=1}^6 \gamma_{ik} y_k$$

welche die Form  $\sum_{i=1}^6 y_i^2$  invariant läßt, wenn sie noch den folgenden Forderungen genügt: alle Koeffizienten  $\gamma_{ik}$  sind reell,  $|\gamma_{ik}| = +1$ .

Statt der Drehungen in  $R_6$  nehme ich im folgenden die mit ihnen nahverwandte Bewegungen im elliptischen Raume  $R_5^*$  als Ausgangspunkt.

Ich betrachte dazu die  $y_i$  als homogene Koordinaten in einem fünfdimensionalen projektiven Raume  $R_5^*$  (z. B. dem uneigentlichen linearen Raume des  $R_6$ ) in dem eine quadratische Varietät

$$(4) \quad \Omega^* \equiv \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 0$$

gegeben ist.

Eine (elliptische) Bewegung in diesem Raume ist jede projektive Transformation,

$$(5) \quad \varrho y_i' = \sum_{k=1}^6 \gamma_{ik} y_k$$

welche die Varietät  $\Omega^* = 0$  invariant läßt und wobei man, durch Multiplikation aller Koeffizienten mit demselben Faktor erreichen kann, dasz sie alle reell sind und ihre Determinante den Wert  $+1$  hat. Am einfachsten ist es, wenn man stets annimmt, dasz die Koeffizienten schon in dieser Weise normiert sind: nimmt man dann  $\varrho = \pm 1$ , dann geht die elliptische Bewegung in  $R_5^*$  in eine sechsdimensionale Drehung über. Also;

*Die Gruppe der elliptischen Bewegungen in  $R_5^*$  ist homomorph (1, 2) mit der Drehungsgruppe in  $R_6$ .*

§ 4. - Ich führe nun in  $R_5^*$  neue Koordinaten ein. Dazu setze ich

$$\left. \begin{array}{l} y_1 + iy_4 = p_1 \\ y_1 - iy_4 = \bar{p}_1 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} y_2 + iy_5 = p_2 \\ y_2 - iy_5 = \bar{p}_2 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} y_3 + iy_6 = p_3 \\ y_3 - iy_6 = \bar{p}_3 \end{array} \right\}.$$

(Ich schreibe hier  $p_1, p_2, p_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ , statt wie in § 1  $p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$ ).

Die Gleichung (4) geht über in

$$(6) \quad \Omega^* \equiv \sum_{k=1}^3 p_k \bar{p}_k = 0,$$

die Transformationsgleichungen (5) gehen über in

$$(7) \quad \begin{aligned} \varrho p_i' &= \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} p_k + \sum_{k=1}^3 \delta_{i\bar{k}} \bar{p}_k \\ \varrho \bar{p}_i' &= \sum_{k=1}^3 \delta_{\bar{i}k} p_k + \sum_{k=1}^3 \delta_{\bar{i}\bar{k}} \bar{p}_k. \end{aligned}$$

Diese Transformationen lassen (6) invariant; wenn man die Koeffizienten  $\gamma_{ik}$  zuerst normiert hat, gilt von den Koeffizienten  $\delta$ , dasz  $\delta_{ik}$  und  $\delta_{\bar{i}\bar{k}}$ , und ebenso  $\delta_{\bar{i}k}$  und  $\delta_{i\bar{k}}$  konjugiert-komplexe Zahlen sind (sonst hat man dazu alle Koeffizienten

mit einem Faktor zu multiplizieren); die Determinante  $|\delta|$  hat den Wert  $+1$ . Am einfachsten ist es, wieder stets anzunehmen, dass man für die Normierung der Koeffizienten  $\delta$  schon gesorgt hat.

Die Gleichungen der Ebenensysteme schreibe ich noch einmal auf

$$(8a) \left\{ \begin{array}{l} -x_3\bar{p}_2 + x_2\bar{p}_3 + x_4p_1 = 0, \\ x_3\bar{p}_1 - x_1\bar{p}_3 + x_4p_2 = 0, \\ -x_2\bar{p}_1 + x_1\bar{p}_2 + x_4p_3 = 0, \\ x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 0, \end{array} \right. \quad (8b) \left\{ \begin{array}{l} -\xi_3p_2 + \xi_2p_3 + \xi_4\bar{p}_1 = 0, \\ \xi_3p_1 - \xi_1p_3 + \xi_4\bar{p}_2 = 0, \\ -\xi_2p_1 + \xi_1p_2 + \xi_4\bar{p}_3 = 0, \\ \xi_1\bar{p}_1 + \xi_2\bar{p}_2 + \xi_3\bar{p}_3 = 0. \end{array} \right.$$

Es liegt dann auf der Hand neben  $R_5^*$  einen projektiven Raum  $R_3$  einzuführen und auf der in den §§ 1, 2 angegebenen Weise die Punkte von  $\Omega^*$  als die Bilder der Geraden in  $R_3$  zu betrachten; mit den Punkten  $(x)$  von  $R_3$  mögen die Ebenen  $\{x\}$  von (8a), mit den Ebenen  $(\xi)$  von  $R_3$  die Ebenen  $\{\xi\}$  von (8b) korrespondieren.

Durch eine Kollineation

$$(9) \quad x'_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} x_k$$

in  $R_3$  wird dann in  $R_5^*$  eine projektive Transformation der  $p_i$  und  $\bar{p}_i$  induziert ( $p_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \bar{p}_1 = a_1b_4 - a_4b_1$ ; u. s. w.), die (6) invariant lässt. Sie braucht aber nicht eine elliptische Bewegung in  $R_5^*$  zu sein, weil die Koeffizienten in der Transformation der  $p_i$  und  $\bar{p}_i$  nicht den genannten Bedingungen genügen. Umgekehrt ist es bekannt, dass jede elliptische Bewegung in  $R_5^*$  eine Kollineation (9) in  $R_3$  erzeugt (<sup>2</sup>). Es entsteht so die Frage, welche Untergruppe der Kollineationen in  $R_3$  mit der Gruppe der elliptischen Bewegungen in  $R_5^*$  isomorph ist.

§ 5. - Zur Beantwortung dieser Frage werde ich, wie es auf der Hand liegt, als konjugiert-komplexe Punkte in  $R_6$  oder  $R_5^*$  ein Punktepaar bezeichnen, dessen  $y$ -Koordinaten konjugiert-komplexe Zahlen sind. Welche lineare Räumepaare als konjugiert-komplexe bezeichnet werden sollen, bedarf dann keiner weiteren Erörterung. Komplex-konjugierte Zahlen deute ich durch  $a$  und  $\bar{a}$ ,  $b$  und  $\bar{b}$  an.

Ein Blick auf die Gleichungen (8a) und (8b) lehrt dann sogleich:

*Eine Ebene  $\{x\}$  und eine Ebene  $\{\xi\}$  sind dann und nur dann konjugiert-komplex, wenn*

$$(10) \quad \alpha \bar{\xi}_i = x_i \quad (i = 1, \dots, 4).$$

(<sup>2</sup>) Man sieht z. B. leicht ein, dass nicht nur  $\Omega^* = 0$  invariant bleibt, aber dass auch die beiden Ebenensysteme auf  $\Omega^*$  in sich selbst übergehen, sodass in  $R_3$  eine Transformation

$$(9^*) \quad x' = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

entsteht, die ein-eindeutig Punkte mit Punkten, Geraden mit Geraden, Ebenen mit Ebenen korrespondieren lässt. Diese Transformation ist also eine Kollineation (nicht eine Antikollineation, s. (9\*)).

Liegt nun eine elliptische Bewegung (7) in  $R_5^*$  vor, dann werden, wie wir gesehen haben, auch die Parameter  $x_i$  und  $\xi_i$  der Ebenensysteme auf  $\Omega^*$  (oder die Punkt- und Ebenenkoordinaten in  $R_3$ ) projektiv transformiert und zwar kontragredient zu einander, weil die Beziehung

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i x_i = 0$$

invariant ist (§ 1).

Aber auch die Beziehungen (10) sind invariant; kehrt man zu den Variablen  $y$  zurück, so hat die Transformation ja nur reelle Koeffizienten.

Also ist auch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^4 x_i \bar{x}_i = 0,$$

wenn man auf  $\bar{x}_i$  die zu (9) konjugiert-komplexe Transformation ausübt, invariant.

Die Form  $\sum_{i=1}^4 x_i \bar{x}_i$  wird dabei mit einer positiven Konstante  $\lambda$  multipliziert. Man kann, dadurch dass man die Matrix  $\|a_{ik}\|$  mit  $\lambda^{-\frac{1}{2}}$  multipliziert, dafür Sorg tragen, dass diese Konstante gleich  $+1$  ist; dann ist auch  $\sum_{i=1}^4 x_i \bar{x}_i$  invariant und (9) stellt eine unitäre Transformation dar. Man kann aber noch einen Schritt weitergehen und erreichen, dass  $|a_{ik}| = +1$ .

Es ist hier wieder am einfachsten anzunehmen, dass die Matrix  $\|a_{ik}\|$  in dieser Weise normiert ist (s. dieser §, Schluss); sie ist also eine unitäre Matrix mit Determinante gleich  $+1$ . Die zugehörige Transformation (9) nenne ich weiter eine *unitäre Kollineation*.

Mit einer Drehung in  $R_6$  oder mit einer Bewegung in  $R_5^*$  korrespondiert also eine unitäre Kollineation in  $R_3$ . Dass diese Korrespondenz der Kompositionsvorschrift — aus  $B_1 \rightarrow K_1$  und  $B_2 \rightarrow K_2$  folgt  $B_1 B_2 \rightarrow K_1 K_2$  — genügt, ist sofort klar. Weil nun alle die drei Gruppen — die der Drehungen in  $R_6$ , die der Bewegungen in  $R_5^*$  und die der unitären Kollineationen in  $R_3$  — fünfzehngliedrig sind, sind sie also homomorph (isomorph im Kleinen).

Deute ich noch einmal (gleichwie in § 3) die Punkte und die Ebenen des ersten Systems von  $\Omega^*$  mit  $p_i^*$ ,  $\bar{p}_i^*$  und  $x_i^*$  an, während die Koordinaten der Geraden und Punkte in  $R_3$  durch  $p_i$ ,  $\bar{p}_i$  und  $x_i$  angegeben bleiben,

$$(p_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \bar{p}_1 = a_1 b_4 - a_4 b_1, \text{ u. s. w.})$$

so ist diese Abbildung durch

$$p_i^* = p_i, \quad \bar{p}_i^* = \bar{p}_i$$

(und demzufolge  $x_i^* = x_i$ ) dargestellt.

Also: *Die Bewegungsgruppe in  $R_5^*$  ist isomorph (auch im Groszen) mit*

der Gruppe der unitären Kollineationen in  $R_3$ ; beide sind mit der Drehungsgruppe in  $R_6$  <sup>(3)</sup> homomorph (1, 2).

Es ist übrigens selbstverständlich, dass man ganz leicht diesen Satz beweisen kann, ausgehend von einer Kollineation

$$(9) \quad x_i' = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} x_k$$

mit unitärer Matrix; ausserdem denken wir uns die Koeffizienten wieder normiert, sodass  $|\alpha_{ik}| = +1$ . Die Transformation (9) erzeugt nämlich in  $R_3$  eine projektive Transformation der Geradenkoordinaten, also in  $R_5^*$  eine Punkttransformation (7), die  $\Omega^*$  invariant lässt. Es ist bekannt (und man überzeugt sich leicht davon), dass die Koeffizienten  $\delta_{ik}$  und  $\delta_{\bar{i}\bar{k}}$ , und ebenso  $\delta_{\bar{i}k}$  und  $\delta_{i\bar{k}}$ , komplementäre Matrizen in der Matrix  $\|\alpha_{ik}\|$  sind; das bedeutet, weil  $\|\alpha_{ik}\|$  unitär ist und ihre determinante den Wert  $+1$  hat, dass  $\delta_{ik}$  und  $\delta_{\bar{i}\bar{k}}$ ,  $\delta_{\bar{i}k}$  und  $\delta_{i\bar{k}}$ , konjugiert-komplexe Zahlen sind.

Ausserdem hat  $|\delta|$  den Wert  $+1$ ; es gilt

$$\delta = |\alpha_{ik}|^3 = +1.$$

Die in  $R_5^*$  erzeugte Transformation ist also eine Bewegung (§ 4). Wenn man dann in der gefundenen Transformation (7)  $\rho$  durch  $+1$  oder  $-1$  ersetzt, findet man zwei verschiedenen Drehungen in  $R_6$ ; es bleibt ja, wenn man zu den Koordinaten  $y$  zurückkehrt, in  $R_6$  der Kegelraum  $\Omega^* = 0$  invariant, die Transformationsdeterminante ist gleich  $+1$  (also bleibt auch  $\Omega^*$  invariant) und die Transformationskoeffizienten sind reell.

Dass diese Abbildung der unitären Kollineationen in  $R_3$  auf die Bewegungen in  $R_5^*$  die Umkehrung der vorigen ist, leuchtet, weil zur Darstellung der Abbildung die nämlichen Gleichungen benützt wurden, wieder sofort ein.

§ 6. - Eine zweite Abbildung erhält man, wenn man (§ 2, Schluss) die Ebenen (8a) auf  $\Omega^*$  und die Ebenen ( $\xi$ ) des  $R_3$  auf einander abbildet.

Wenn nun mit einer bestimmten Bewegung in  $R_5^*$  bei der ersten Abbildung eine unitäre Kollineation

$$(9) \quad x_i' = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} x_k$$

in  $R_3$  korrespondiert, so korrespondiert bei der zweiten Abbildung mit derselben Bewegung die Transformation

$$\xi_i' = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} \xi_k.$$

---

<sup>(3)</sup> Selbstverständlich kann man statt der unitären Kollineationen in  $R_3$  die unitären Transformationen im vierdimensionalen Vektorraume wählen; ich habe wegen der «Isomorphie im Groszen» den projektiven Raum  $R_3$  bevorzugt.



Diese Transformation erzeugt, weil  $x$  sich transformiert wie  $\bar{\xi}$ , in  $R_3$  die unitäre Kollineation

$$(9') \quad x_i' = \sum_{k=1}^4 \bar{a}_{ik} x_k.$$

Man kann nun fragen, ob diese beiden Abbildungen verschieden sind, d. h. ob durch eine einzige Koordinatentransformation jede Kollineation (9) in die mit ihr korrespondierende (9') übergeführt werden kann. Dazu würde jedenfalls nötig sein, dass korrespondierende Transformationen gleiche Normen hätten, d. h. dass die Norm jeder unitären Kollineation, mit Determinante  $+1$ , reell wäre. Dass dies aber nicht der Fall ist, zeigt z. B. die folgende Kollineation:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = e^{i\frac{\pi}{2}} x_2, \quad x_3' = e^{i\frac{\pi}{3}} x_3, \quad x_4' = e^{i\frac{\pi}{6}} x_4.$$

*Die beiden Abbildungen sind also nicht äquivalent.*

§ 7. - Ich mache hier noch eine kurze Bemerkung über die Transformationen mit reellen Koeffizienten der *ganzen* orthogonalen Gruppe in  $R_6$  (Drehungen und Umlegungen; Determinante gleich  $+1$  oder  $-1$ ).

Durch die Koordinaten  $p_i$  und  $\bar{p}_i$  einzuführen (§ 4) und diese weiterhin als Geradenkoordinaten im projektiven Raume  $R_3$  zu deuten, sind die Drehungen auf die unitären Kollineationen in  $R_3$  abgebildet. Man darf hier fragen: wo bleiben die Umlegungen?

Es ist klar, dass auch diese (s. die Transformationen (7), wo aber jetzt die normierte Determinante gleich  $-1$  ist) nicht nur  $\Omega^* = 0$  invariant lassen, aber auch jede Ebene auf  $\Omega^*$  in eine Ebene auf  $\Omega^*$  überführen. Aber diese beiden Ebenen gehören nicht zum selben System (durch kontinuierlichen Änderung der Transformationskoeffizienten wird die Identität nicht erreicht). Und wenn man dann wieder zum projektiven  $R_3$  übergeht, korrespondiert von diesen Ebenen die eine mit einem Punkte, die andere mit einer Ebene des  $R_3$ . Also:

*Die orthogonale Gruppe in  $R_6$  ist homomorph mit der Gruppe in  $R_3$ , die aus den unitären Kollineationen und den unitären Korrelationen zusammengesetzt ist; Umlegungen in  $R_6$  bilden sich auf die Korrelationen in  $R_3$  ab.*

§ 8. - Nach derselben Methode (§ 5) erhält man die Darstellungen im dreidimensionalen projektiven Raume der reellen Transformationen, mit Determinante  $+1$ , welche  $\sum_{i=1}^6 \varepsilon_i y_i^2$  ( $\varepsilon_i = \pm 1$ ) invariant lassen; es treten aber, wenn nicht  $\varepsilon_i$  für jedes  $i$  gleich  $+1$  ist, bei der Bestimmung der « Isomorphien im Groszen » gewisse Komplikationen auf. Ich glaube deshalb mich weiter ziemlich kurz fassen zu dürfen; nur die Punkte, wo die folgenden Fälle vom vorangehenden abweichen, habe ich ausführlicher besprochen.

a). An erster Stelle betrachte ich jetzt die reellen linearen Transformationen, mit der Determinante +1, die in  $R_6$  die Form

$$\Phi \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 + y_6^2$$

invariant lassen. Diese Transformationen bestehen aus zwei nicht unter einander zusammenhängenden Scharen.

a). Als Beispiel der ersten Schar kann man die identische Transformation oder die « Spiegelung in bezug auf den Ursprung des Koordinatensystems »:

$$(11) \quad y_i' = -y_i \quad (i=1, \dots, 6)$$

betrachten. Beide sind Sonderfälle der allgemeineren Transformation

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi, & \begin{cases} y_3' = y_3 \cos \psi + y_6 \sin \psi, \\ y_6' = -y_3 \sin \psi + y_6 \cos \psi, \end{cases} \\ y_2' = -y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi, & \\ \begin{cases} y_4' = y_4 \cos \chi + y_5 \sin \chi, \\ y_5' = -y_4 \sin \chi + y_5 \cos \chi, \end{cases} \end{cases}$$

und gehen durch kontinuierliche Änderung von  $\varphi, \psi, \chi$  aus einander hervor.

$\beta$ ). Ein Beispiel der zweiten Schar bildet

$$y_1' = -y_1, \quad y_4' = -y_4, \quad y_k' = y_k \quad (k=2, 3, 5, 6).$$

Es ist klar, dass zwei Transformationen, die durch Multiplizierung mit der « Spiegelung » (11) aus einander entstehen, stets zur selben Schar gehören.

Alle diese Transformationen lassen in  $R_5^*$  die Varietät

$$\bar{\Phi} = 0$$

invariant. Mit einer « Bewegung » in  $R_5^*$  korrespondieren wieder zwei « Drehungen » in  $R_6$ ; die beiden Gruppen sind wieder homomorph (1, 2). Diese beiden Drehungen in  $R_6$  gehen durch eine Spiegelung i. b. a. den Ursprung (11) in einander über; sie gehören also stets zur selben Schar  $\alpha^{(a)}$  oder  $\alpha^{(b)}$ . *Die Bewegungen in  $R_5^*$  bilden deshalb auch zwei nicht unter einander zusammenhängende Scharen.*

Ich führe neue Koordinaten ein durch

$$\begin{cases} y_1 + y_4 = p_1, & \begin{cases} y_2 + y_5 = p_2, \\ y_2 - y_5 = q_2, \end{cases} & \begin{cases} y_3 + iy_6 = p_3, \\ y_3 - iy_6 = \bar{p}_3. \end{cases} \\ y_1 - y_4 = q_1, & \end{cases}$$

Die Koordinaten  $p_1, p_2, q_1, q_2$  (von reellen Punkten) sind reell.

Die bei den Bewegungen invariante Varietät wird jetzt durch

$$\bar{\Phi} \equiv p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 \bar{p}_3 = 0$$

dargestellt.

Die Flächensysteme auf  $\bar{\Phi}$  (zuvor  $\Omega^*$ ) haben ihre Gleichungen (8a und 8b) nicht geändert; nur hat man  $\bar{p}_1$  und  $\bar{p}_2$  durch  $q_1$  und  $q_2$  zu ersetzen.

Konjugiert-komplex sind die Ebenen  $\{x\}$  und  $\{\bar{x}\}$ , wenn

$$\rho\xi_1 = \bar{x}_2, \quad \rho\xi_2 = -\bar{x}_1, \quad \rho\xi_3 = -\bar{x}_4, \quad \rho\xi_4 = \bar{x}_3.$$

Invariant ist bei jeder projektiven Transformation in  $R_3$

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i x_i = 0,$$

also bei den hier in Betracht kommenden Transformationen

$$\varphi \equiv \bar{x}_2 x_1 - \bar{x}_1 x_2 - \bar{x}_4 x_3 + x_3 \bar{x}_4 = 0.$$

*Die Bewegungsgruppe in  $R_5^*$  ist also isomorph, auch im Groszen, (s. § 5), mit den Kollineationen in  $R_3$ , die  $\varphi = 0$  invariant lassen.*

Es braucht aber nicht die Form

$$\varphi \equiv \bar{x}_2 x_1 - \bar{x}_1 x_2 - \bar{x}_4 x_3 + \bar{x}_3 x_4$$

bei diesen Transformationen invariant zu sein; sie kann mit einer reellen, positiven oder negativen, Konstante multipliziert werden. Es entsteht so die Frage; Die Bewegungen in  $R_5^*$  bilden zwei Scharen ( $\alpha$  und  $\beta$ ), ebenso die hier gefundenen Kollineationen im projektiven  $R_3$ ; wie hängen diese Scharen von einander ab?

Um dies zu entscheiden wähle ich aus den Bewegungen in  $R_5^*$  die Identität. diese erzeugt in  $R_3$  wieder die Identität. Wähle ich aber in  $R_5^*$  die Transformation

$$y_1' = -y_1, \quad y_4' = -y_4, \quad y_k' = y_k \quad (k=2, 3, 5, 6),$$

dann erzeugt diese (s. 8a) in  $R_3$  die Kollineation

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = -x_4$$

*Die Scharen ( $\alpha$  und  $\beta$ ) der Bewegungsgruppe in  $R_5^*$  werden in  $R_3$  durch die Scharen von Kollineationen, welche  $\varphi$  mit einer positiven resp. einer negativen Konstante multiplizieren, abgebildet.*

Man kann diesem Resultat eine andere Form geben. Invariant (bis auf eine reelle Konstante) ist auch  $\psi = i\varphi$ ;  $\psi$  ist aber eine hermitesche Form, die durch eine Koordinatentransformation in

$$\psi \equiv \bar{x}_1 x_1 - \bar{x}_2 x_2 - \bar{x}_3 x_3 + \bar{x}_4 x_4$$

übergeht. Man kann also in dem vorgehenden Satz  $\varphi$  durch  $\psi$  ersetzen <sup>(4)</sup>.

b). Ich betrachte jetzt die reellen linearen Transformationen, mit Determinante +1, welche in  $R_6$  die Form

$$\Psi \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 - y_6^2$$

<sup>(4)</sup> Auf die zweite Abbildungsweise der Bewegungen und auf die Abbildung der « Umlagen » (die Analoga der in den §§ 6, 7 behandelten Fragen) gehe ich nicht ein.

invariant lassen. Die Gruppe besteht wieder aus zwei nicht unter einander zusammenhängenden Scharen; jetzt gehören aber die identische Transformation und die Spiegelung in bezug auf den Ursprung zu verschiedenen Scharen.

Die Bewegungsgruppe in  $R_5^*$ , d. h. jetzt die reellen Kollineationen mit positiver Determinante (die man auf +1 normieren kann), welche ausserdem

$$\Psi = 0$$

invariant lassen, ist nochmals mit der vorigen homomorph (1, 2); aber die beiden Drehungen in  $R_6$ , die mit einer und derselben Bewegung in  $R_5^*$  korrespondieren, gehören jetzt zu verschiedenen Scharen. *Die Bewegungsgruppe in  $R_5^*$  ist zusammenhängend.*

Setze ich

$$\begin{cases} y_1 + iy_4 = p_1, \\ y_1 - iy_4 = \bar{p}_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 + iy_5 = p_2, \\ y_2 - iy_5 = \bar{p}_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 + y_6 = p_3, \\ y_3 - y_6 = q_3, \end{cases}$$

dann wird die invariante Varietät durch

$$\Psi \equiv p_1 \bar{p}_1 + p_2 \bar{p}_2 + p_3 q_3 = 0$$

dargestellt. Die Ebenensysteme auf  $\Psi$  haben die nämlichen Gleichungen als zuvor auf  $\Omega^*$ , nur hat man  $q_3$  statt  $\bar{p}_3$  zu setzen. Zwei konjugiert-komplexe Ebenen sind jetzt Ebenen *desselben* Systems. Sind z. B.  $\{x\}$  und  $\{x^*\}$  zwei solche Ebenen, dann ist

$$x_1^* = -\bar{x}_2, \quad x_2^* = \bar{x}_1, \quad x_3^* = \bar{x}_4, \quad x_4 = -\bar{x}_3.$$

Also ist bei diesen Transformationen, ausser

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i x_i = 0,$$

auch die Gleichung

$$\xi_1 \bar{x}_2 - \xi_2 \bar{x}_1 - \xi_3 \bar{x}_4 + \xi_4 \bar{x}_3 = 0$$

invariant (<sup>5</sup>).

Die Untergruppe der Kollineationen in  $R_3$ , die mit der hier betrachteten Gruppe in  $R_6$  homomorph (1, 2) — mit der Gruppe in  $R_5^*$  isomorph — ist, ist hierdurch charakterisiert (<sup>6</sup>).

(<sup>5</sup>) Diese Korrespondenz tritt bei CARTAN nicht auf.

(<sup>6</sup>) Seien diese Kollineationen in  $R_3$  durch  $x_i' = \sum_{k=1}^4 a_{ik} x_k$  dargestellt. Die Matrix  $\|a_{ik}\|$  hat (abgesehen von einem konstanten Faktor) dann die folgende merkwürdige Gestalt

$$\|a_{ik}\| = \left\| \begin{array}{cccc} a & b & p & q \\ -\bar{b} & \bar{a} & \bar{q} & -\bar{p} \\ r & s & c & d \\ \bar{s} & -\bar{r} & -\bar{d} & \bar{c} \end{array} \right\|.$$

c). In derselben Weise — das Resultat ist aber auch von vornher klar — findet man, dass die Gruppe der reellen Kollineationen in  $R_3$  homomorph (1, 2) ist mit der Gruppe der reellen linearen Transformationen (Determinante gleich +1) in  $R_6$ , welche die Form

$$\chi \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2$$

invariant lassen.

Sie ist isomorph mit der Gruppe der reellen Kollineationen (Determinante gleich +1), welche in  $R_5^*$  die Varietät  $\chi=0$  invariant lassen. Die beiden Transformationen in  $R_6$ , welche mit derselben Kollineation in  $R_3$  korrespondieren, gehören zu verschiedenen Scharen. Man kann diese Gruppe von Kollineationen in  $R_3$  auch charakterisieren durch die Forderung, dass ihre Transformationen die Gleichung

$$\sum_{i=1}^4 \bar{\xi}_i x_i = 0$$

invariant lassen.