JEAN FAVARD

Exemples de surfaces quarrables

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 2 (1935), p. 139-154
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_139_0>

EXEMPLES DE SURFACES QUARRABLES

par JEAN FAVARD (Grenoble).

1. - Parmi les surfaces élémentaires dont, à ma connaissance, la quadrature suivant les idées de Mr. LEBESGUE, n'a pas encore été effectuée, figurent les surfaces de révolution; le but de ce travail est, tout d'abord, de combler cette lacune. Mais, avant tout, il faut définir ce que l'on entend par surface de révolution: pour nous ce sera une zone, ou la surface engendrée par un arc plan de JORDAN $\mathfrak{A}$, sans point double, en tournant autour d'un axe de son plan ne le rencontrant pas.

Nous verrons en premier lieu que, pour qu'une telle surface soit quarrable, il est nécessaire et suffisant que l'arc $\mathfrak{A}$ qui l'engendre soit rectifiable, puis que l'aire de la surface est donnée par la formule de GULDIN:

$$2\pi \int_{\mathfrak{A}} x ds$$

où x désigne la distance d'un point de l'arc à l'axe de révolution et ds l'élément d'arc.

Le résultat que nous venons d'annoncer nous permet de poser d'une façon nouvelle le problème de la surface minima de révolution:

Soient donnés dans un plan une droite et deux points situés d'un même côté de cette droite, parmi tous les arcs de JORDAN qui joignent ces deux points, quel est celui qui, ne rencontrant pas la droite donnée, engendre l'aire la plus faible en tournant autour de la droite donnée?

Nous verrons que la solution est à chercher, ainsi qu'on le fait d'habitude, parmi les courbes qui ont au plus un point sur toute perpendiculaire à la droite donnée.

Après avoir appliqué nos considérations à des surfaces un peu plus générales que les surfaces de révolution, et au moyen d'un ensemble de transformations qui changent les surfaces quarrables en surfaces quarrables nous donnons, en partant des résultats fondamentaux de Mr. TONELLI [1], d'autres exemples de

---

[1] L. TONELLI: *Sulla quadratura delle superficie* (Atti Acc. Lincei, Rend. 6e Série, t. 3 (1926), pp. 357-517-633).

surfaces quarrables. Parmi celles-ci figurent certaines surfaces rencontrées par Mr. CACCIOPOLI [2] et appelées semi-rectifiables.

2. - Soient, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oz, $\widehat{MN}$ un arc *de courbe de Jordan* non fermé, sans point double, allant M à N et ne rencontrant pas l'axe des z.

En tournant autour de l'axe des z, l'arc $\widehat{MN}$ engendre une surface de révolution S homéomorphe à une couronne circulaire; suivant les idées de Mr. LEBESGUE, nous appellerons aire de S la plus petite de toutes les plus petites limites des aires des surfaces polyédrales homéomorphes à une couronne circulaire et qui tendent vers S. Pour nous cette locution a le sens suivant: la suite de surfaces S_k $(k=1, 2,....)$ tend vers S, lorsque k augmente indéfiniment, s'il est possible de trouver, pour toute valeur de k, une homéomorphie faisant correspondre un point P de S à un point P_k de S_k et inversement et cela de façon que le nombre:

$$\varrho_k = \text{borne sup}\,[\text{long } PP_k]$$

tende vers zéro lorsque k augmente indéfiniment.

Nous allons établir le théorème suivant:

Pour que la surface S soit quarrable il est nécessaire que l'arc MN soit rectifiable.

Soit:

$$x=f(u)\,; \qquad z=g(u) \qquad\qquad (0\leqslant u\leqslant 1\,;\ x>0)$$

l'équation de l'arc $\widehat{MN}$, le point M correspondant à la valeur 0 du paramètre et le point N à la valeur 1. Avec les deux points M et N considérons sur cet arc n points de division $P_i (i=1, 2,...., n)$ qui correspondent aux valeurs u_i du paramètre $(u_{i-1}<u_i)$ et posons $u_0=0$, $u_{n+1}=1$.

Je dis tout d'abord, qu'en désignant par A l'aire de S, on a:

$$(1) \qquad A \geqslant \pi \sum_{i=1}^{n+1} |x_i^2 - x_{i-1}^2|.$$

Soit Oy un axe perpendiculaire au plan xz, l'équation de notre surface sera, en introduisant un angle polaire v dans le plan xz:

$$\begin{cases} x=f(u)\cos v \\ y=f(u)\sin v \\ z=g(u) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\leqslant u\leqslant 1 \\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi \end{pmatrix}.$$

Puisque l'arc $\widehat{MN}$ ne rencontre pas Oz et constitue un ensemble fermé, il est

---

[2] CACCIOPOLI: *Una classe di superficie quadrabili* (Atti Accad. Lincei, Rend. 6e série, t. 7 (1927), p. 393).

à une distance positive de Oz, soit r; désignons de plus par R le maximum de la distance d'un point de cet arc à ce même axe.

Considérons maintenant une suite de surfaces polyédrales S_k ($k=1, 2, ...$) qui tendent vers S, lorsque k augmente indéfiniment et dont les aires A_k tendent vers A. A tout nombre ε positif donné et inférieur à r, mais aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre un nombre K tel que pour $k \geqslant K$, on ait:

$$\varrho_k \leqslant \varepsilon.$$

Dans l'homéomorphie qui fait passer de S à S_k, au cercle u_i qui se projette sur le plan des xy suivant un cercle centré à l'origine et de rayon x_i, correspond une courbe de S_k qui se projette dans la couronne limitée par les deux cercles de rayon $x_i - \varepsilon$ et $x_i + \varepsilon$. La portion de surface polyédrale S_k, qui correspond à la portion de S limitée par les deux cercles de rayons x_i et x_{i-1}, se projettera donc suivant un ensemble contenant au moins la couronne limitée par les deux cercles de rayons:

$$\begin{array}{llll} x_i - \varepsilon & \text{et} & x_{i-1} + \varepsilon & \text{si } x_i - \varepsilon > x_{i-1} + \varepsilon \\ x_{i-1} - \varepsilon & \text{et} & x_i + \varepsilon & \text{si } x_i + \varepsilon < x_{i-1} - \varepsilon \end{array}$$

lorsque

$$\varepsilon < \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right|.$$

L'aire intérieure de cette projection surpassera donc toujours l'aire de cette couronne et, en tout cas, elle ne sera pas négative; cette quantité sera donc toujours supérieure à:

$$\pi \, |x_i^2 - x_{i-1}^2| - 2\pi\varepsilon(x_i + x_{i-1}) - 2\pi\varepsilon^2.$$

Comme A_k n'est pas inférieure à la somme des aires intérieures de ces différentes portions sur le plan de xy, on aura donc, pour $k \geqslant K$:

$$\begin{aligned} A_k &\geqslant \pi \sum_1^{n+1} |x_i^2 - x_{i-1}^2| - 2\pi\varepsilon \sum_1^{n+1} (x_i + x_{i-1}) - 2\pi(n+1)\varepsilon^2 \\ &\geqslant \pi \sum_1^{n+1} |x_i^2 - x_{i-1}^2| - 4\pi\varepsilon R(n+1) - 2\pi\varepsilon^2(n+1). \end{aligned}$$

Or nous pouvons également supposer que K a été choisi assez grand pour que, pour $k \geqslant K$:

$$A_k \leqslant A + \varepsilon$$

de là

$$A \geqslant \pi \sum_1^{n+1} |x_i^2 - x_{i-1}^2| - 2\pi(n+1)\varepsilon[2R + \varepsilon] - \varepsilon$$

ε étant quelconque, l'inégalité (1) s'en déduit par passage à la limite; en la combinant avec $x_i \geqslant r$, nous trouvons:

$$\sum_1^{n+1} |x_i - x_{i-1}| \leqslant \frac{A}{2\pi r}. \tag{2}$$

En second lieu, nous allons montrer que l'on a:

(3) $$A \geqslant 2\pi r \sum_{1}^{n+1} |z_i - z_{i-1}|.$$

Considérons les intervalles (z_{i-1}, z_i) dont la longuer dépasse 2ε, où ε désigne le même nombre que précédemment; pour $k \leqslant K$, et pour les mêmes raisons que précédemment, la section de la surface S_k par un plan de cote z compris dans l'intervalle:

$$z_i + \varepsilon < z < z_{i-1} - \varepsilon \qquad \text{si } z_i + \varepsilon < z_{i-1} - \varepsilon$$

ou

$$z_{i-1} + \varepsilon < z < z_i - \varepsilon \qquad \text{si } z_i - \varepsilon > z_{i-1} + \varepsilon$$

comprend une courbe fermée située à l'extérieur du cercle de rayon $r - \varepsilon$ centré sur oz. Le cercle étant une courbe convexe, la longueur totale $\lambda_k^{(i)}(z)$ de la section de la portion de S_k homéomorphe à la portion de surface de révolution engendrée par l'arc $\widehat{P_{i-1}P_i}$ existera et sera donc an moins égale à $2\pi(r-\varepsilon)$ ([3]). Or on a:

$$A_k \geqslant \int_{z_k^{(0)}}^{z_k^{(1)}} \lambda_k(z)\,dz$$

où, par $z_k^{(0)}$ et $z_k^{(1)}$ on a désigné respectivement les cotes minima et maxima des points de S_k et par $\lambda_k(z)$ la longueur totale de la section de S_k par le plan de cote z.

En vertu de la remarque précédente on a donc, quel que soit i:

$$\int \lambda_k^{(i)}(z)\,dz \geqslant 2\pi(r-\varepsilon)\,\{|z_i - z_{i-1}| - 2\varepsilon\}$$

ceci a en effet été démontré lorsque le second membre est positif, mais c'est évident dans le cas contraire; de plus on a aussi:

$$\int_{z_k^{(0)}}^{z_k^{(1)}} \lambda_k(z)\,dz \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} \int \lambda_k^{(i)}(z)\,dz.$$

Des inégalités précédentes nous tirons:

$$A_k \geqslant 2\pi(r-\varepsilon) \sum_{1}^{n+1} \{|z_i - z_{i+1}| - 2\varepsilon\}$$

en raisonnant comme plus haut on arrive à l'inégalité (3) que nous écrirons maintenant sous la forme:

(4) $$\sum_{1}^{n+1} |z_i - z_{i-1}| \leqslant \frac{A}{2\pi r}.$$

([3]) On peut toujours supposer que les surfaces polyédrales S_k n'ont aucune face parallèle au plan xy, quitte à altérer un peu chacune de ces surfaces.

Or les inégalités (2) et (4), valables quel que soit n, expriment, la première, que la fonction x est à variation bornée, la deuxième que la fonction z l'est également. Mais ces deux conditions expriment que l'arc de courbe $\widehat{MN}$ est rectifiable, ce que nous voulions établir.

3. - Nous plaçant maintenant dans cette hypothèse, nous allons montrer que la surface S est quarrable et calculer son aire.

Soit p un nombre positif, plus grand que 2, mais à cela près, quelconque pour l'instant; au moyen des points d'arguments: $v=j\frac{2\pi}{p}$ $(j=0, 1,...., p-1)$ divisons les cercles u_i en p parties et considérons les $p(n+1)$ trapèzes isoscèles ayant pour sommets les points situés sur les cercles u_{i-1} et u_i et dont les arguments sont $(j-1)\frac{2\pi}{p}$ et $j\frac{2\pi}{p}$; ils forment un polyèdre $S_{p,n}$ inscrit dans S et qui tend vers S lorsque p et n augmentent indéfiniment, la longueur de chacun des arcs (u_{i-1}, u_i) tendant vers zéro.

L'aire de chacun des trapèzes tracés à partir des parallèles u_{i-1} et u_i, est égale à:

$$\sin\frac{\pi}{p}\,h_i(x_{i-1}+x_i)$$

où h_i désigne la hauteur de ce trapèze; et l'aire totale $A_{p,n}$ du polyèdre $S_{p,n}$ vaut:

$$A_{p,n}=p\sin\frac{\pi}{p}\sum_{1}^{n+1}h_i(x_{i-1}+x_i).$$

Désignons encore par s_i la longueur de l'arc (u_{i-1}, u_i) et par c_i sa corde, on a évidemment:

$$h_i\leq c_i\leq s_i$$

de là

$$A_{p,n}\leq p\sin\frac{\pi}{p}\sum_{i=1}^{n+1}s_i(x_{i-1}+x_i)<\pi\sum_{i=1}^{n+1}s_i(x_{i-1}+x_i).$$

Soit encore Ξ_i le maximum de $x(u)$ dans l'intervalle (u_{i-1}, u_i), en définitive on a:

$$A_{p,n}<2\pi\sum_{i=1}^{n+1}s_i\Xi_i.$$

Or, d'après la définition de l'aire:

$$A\leq\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}}A_{p,n}\leq 2\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n+1}s_i\Xi_i=2\pi\int_{\widehat{MN}}xds$$

puisqu'il est entendu que n augmente indéfiniment de façon que chacune des quantités s_i tende vers zéro. Ainsi nous trouvons une borne supérieure de l'aire A de S:

(5) $$A\leq 2\pi\int_{\widehat{MN}}xds.$$

Pour montrer à présent que c'est le signe d'égalité qui a lieu dans (5), nous allons établir une inégalité inverse.

La construction du polyèdre $S_{p,n}$ est aussi une division de la surface en $p \cdot (n+1)$ parties homéomorphes à un carré, nous allons étudier la projection de chacune de ces portions sur le plan du trapèze de $S_{p,n}$ correspondant. Considérons l'une des portions relatives à l'intervalle (u_{i-1}, u_i), elle est limitée par deux arcs de cercles et par deux arcs de la courbe génératrice égaux à $\widehat{P_{i-1}P_i}$. Les deux arcs de cercles qui limitent cette portion se projettent sur le plan du trapèze suivant des arcs d'ellipses sous tendus par les bases du trapèze et, en faisant une figure, on voit facilement que le domaine limité par les deux côtés égaux de ce trapèze et par ces arcs a une aire non inférieure à celle du trapèze.

Ensuite chacun des deux arcs de courbe de longueur s_i qui joignent les sommets de l'un des côtés égaux du trapèze se projette à l'intérieur de l'ellipse ayant pour foyers ces deux sommets et s_i pour grand axe. La projection de la portion en question sur le plan du trapèze correspondant comprend donc un ou deux domaines dont la somme des aires est supérieure à

$$\sin \frac{\pi}{p} h_i(x_{i-1}+x_i) - \frac{\pi}{4} s_i \sqrt{s_i^2 - c_i^2}.$$

Or, après un calcul simple, on voit que:

$$h_i \geqslant c_i \cos \frac{\pi}{p}$$

de sorte que la somme des aires intérieures de projection des différentes portions sur les plans des trapèzes correspondants sera supérieure à:

$$p \sin \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{p} \sum_1^{n+1} c_i(x_{i-1}+x_i) - p \frac{\pi}{4} \sum_1^{n+1} s_i \sqrt{s_i^2 - c_i^2}.$$

Si l'on considère maintenant une suite de surfaces polyédrales S_k qui tendent vers S, on voit, en raisonnant comme au n.° 2, que, dès que k sera suffisamment grand, l'aire de S_k ne sera pas inférieure à la quantité précédente diminuée d'une quantité donnée à l'avance mais aussi faible que l'on veut; de sorte que, quels que soient p et n on a:

$$A \geqslant p \sin \frac{2\pi}{p} \sum_{i=1}^{n+1} c_i \xi_i - p \frac{\pi}{4} \sum_1^{n+1} s_i \sqrt{s_i^2 - c_i^2} \tag{6}$$

où ξ_i désigne le minimum de x dans l'arc (u_{i-1}, u_i).

Lorsque p et n croissent indéfiniment de façon que les s_i tendent vers zéro, on sait que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^{n+1} (s_i - c_i) = 0$$

de là, puisque $\xi_i \leq R$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n+1} (s_i - c_i)\xi_i = 0$$

et, de ces remarques, nous déduisons:

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ n\to\infty}} p \sin\frac{2\pi}{p} \sum_{i=1}^{n+1} c_i\xi_i = \lim_{n\to\infty} 2\pi \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} s_i\xi_i - \sum_{i=1}^{n+1} (s_i - c_i)\xi_i \right\} = \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{1}^{n+1} s_i\xi_i = 2\pi \int_{\widehat{MN}} x ds.$$

Pour la deuxième partie du second membre de (6), nous n'allons plus faire croître n et p indéfiniment indépendamment l'un de l'autre: cela est permis puisque (6) a lieu quels que soient p et n.

Pour simplifier, nous diviserons l'arc $\widehat{MN}$ en $(n+1)$ parties égales et nous prendrons $p = n+1$; on a alors:

$$p\frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n+1} s_i \sqrt{s_i^2 - c_i^2} = \frac{\pi}{4} s \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{\left(\frac{s}{n+1}\right)^2 - c_i^2} \leq \frac{\pi}{4} s \sqrt{\frac{2s}{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{\frac{s}{n+1} - c_i}.$$

Or, d'après une formule connue de la théorie des moyennes, on sait que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{\frac{s}{n+1} - c_i}\right)^2 \leq (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{s}{n+1} - c_i\right)$$

ce qui nous donnera en définitive:

$$p\frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n+1} s_i \sqrt{s_i^2 - c_i^2} \leq \frac{\pi}{4} s\sqrt{2s} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{s}{n+1} - c_i\right)}.$$

Or, lorsque n augmente indéfiniment, la somme qui figure sous le radical tend vers zéro; par suite, nous plaçant dans les hypothèses précédentes $\left(p = n+1,\ s_i = \frac{s}{n+1}\right)$ et faisant croître n indéfiniment, (6) nous donne pour passage à la limite:

$$A \geq 2\pi \int_{\widehat{MN}} x ds.$$

En comparant avec l'inégalité (5), nous en déduisons, ainsi que nous l'avions annoncé:

$$A = 2\pi \int_{\widehat{MN}} x ds. \tag{7}$$

4. - Signalons que le résultat inclus dans la formule (7) est un cas particulier de celui de Mr. T. RADÓ [4] relatif aux surfaces rectifiables.

L'arc $\widehat{MN}$ étant rectifiable, nous pouvons supposer en effet que le paramètre u

---

[4] T. RADÓ: *Über das Flächenmass rektifizierbarer Flächen* (Math. Ann., t. 100 (1928), pp. 445-479).

n'est autre que l'arc de la courbe; alors les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ satisfont à une condition de LIPSCHITZ:

$$\left.\begin{array}{l}|x(u,v)-x(u',v')|\\|y(u,v)-y(u',v')|\end{array}\right\}\leq|u-u'|+R|v-v'|$$
$$|z(u,v)-z(u',v')|\leq|u-u'|$$

ce qui montre que la surface est mise sous forme rectifiable.

D'après Mr. T. RADÓ on peut calculer l'aire de S par la formule classique:

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^s\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\,dudv=2\pi\int_{\widehat{MN}}xds.$$

Enfin si l'on considère une surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe fermée de JORDAN sans point double du plan des xz et située tout entière dans le demi-plan $x>0$, les raisonnements précédents s'appliquent après quelques modifications simples; toutefois nous préciserons que l'on doit approcher cette surface au moyen de surfaces polyédrales homéomorphes à un tore.

5. - Le problème de la surface minima de révolution qui passe par deux cercles donnés de même axe peut alors, en utilisant les résultats précédents, être formulé comme il suit:

Parmi tous les arcs simples de JORDAN qui joignent deux points M et N du plan des xz situés dans le demi-plan $x>0$ et qui ne rencontrent pas Oz, trouver celui qui, par rotation autour de Oz, engendre l'aire la plus faible.

Tout d'abord l'arc cherché, s'il existe, doit être rectifiable, je dis que toute parallèle à Ox ou bien n'a aucun point commun, ou bien a un point commun, ou bien a tout un segment commun avec lui.

Ordonnons en effet les points de l'arc de M à N et soient P et Q deux points de l'arc situés sur une même parallèle à Ox (P précédant Q); le continu:

$$\widehat{MP}+\overline{PQ}+\widehat{QN} \tag{8}$$

constitué par l'arc $\widehat{MP}$, le segment de droite $\overline{PQ}$ et l'arc $\widehat{QN}$ est un arc de JORDAN rectifiable allant de M à N.

D'après la formule (7) qui exprime l'additivité de l'aire, on a:

aire engendrée par $\widehat{MN}=$ *aire engendrée par* $\widehat{MP}+$ *aire engendrée par* $\widehat{PQ}+$ *aire engendrée par* $\widehat{QN}$;

mais, d'après cette même formule, ou, plus simplement, d'après l'inégalité (1) du paragraphe 2, on a aussi:

aire engendrée par $\widehat{PQ}\leq$ *aire engendrée par* $\overline{PQ}$;

l'égalité n'ayant lieu que si l'arc $\widehat{PQ}$ se réduit au segment $\overline{PQ}$.

Soient m et n les projections orthogonales de M et de N sur Oz; de la remarque précédente suit que l'arc $\widehat{MN}$ ne peut avoir de points à l'extérieur du trapèze $MNnm$; car s'il avait un point extérieur à ce trapèze il aurait deux points au moins sur l'une des projetantes Mm ou Nn et l'on pourrait appliquer le résultat précédent; il est vrai que le continu (8) peut avoir des points doubles, mais si cela est on peut extraire de ce continu un arc de JORDAN sans point double allant de M à N, en vertu d'un résultat connu sur les continus irreductibles. L'aire engendrée pour cet arc réduit serait alors plus faible que la somme des aires engendrées par les trois arcs qui composent le continu (8).

Enfin l'arc cherché n'a aucun point au dessus du segment MN (cela veut dire que l'abscisse d'un point de cet arc ne saurait dépasser l'abscisse du point du segment MN de même cote). Si cet arc avait en effet un point au dessus de MN, il existerait tout un arc PQ dont tous les points, sauf P et Q seraient au dessus de ce segment; mais alors le tronc du cône engendré par le segment PQ aurait une aire inférieure à celle engendrée par l'arc PQ en tournant autour de Oz, en vertu d'un théorème connu qui exprime que l'aire d'une surface convexe est inférieure à celle de toute surface qui l'enveloppe [5]. En remplaçant l'arc $\widehat{PQ}$ par le segment $\overline{PQ}$ on obtiendrait donc un arc de JORDAN, allant de M à N et qui, en tournant autour de Oz, engendrerait une surface d'aire moindre que celle engendrée par l'arc de départ; si ce nouvel arc avait des points doubles on pourrait le réduire comme précédemment.

En définitive l'arc cherché est donc tout entier situé dans le trapèze $MNnm$ ou sur son contour; le raisonnement précédent nous montre encore que cet arc est convexe et tourne sa concavité vers les x positifs car, si nous désignons par P et Q deux points de cet arc, les points de l'arc PQ doivent être au dessous de PQ. En vertu d'un théorème de Mr. W. BLASCHKE [6] sur les suites de figures convexes, le problème a donc toujours une solution constituée soit par une figure ne rencontrant pas Oz, soit par une figure ayant des points communs avec Ox; mais, dans ce dernier cas, si l'on admet la formule (7) comme définition de l'aire (car les considérations précédentes ne s'appliquent pas à ce cas) on voit facilement que le minimum ne peut avoir lieu que pour le contour $MmnN$.

6. - Les surfaces de révolution dont nous venons de nous occuper sont des cas particuliers des surfaces représentées en coordonnées rectangulaires par:

$$(S)\left\{\begin{aligned} x&=f(u)\varphi(v)\\ y&=f(u)\psi(v)\\ z&=g(u)\end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix}0\leq u\leq 1\\ 0\leq v\leq 1\end{pmatrix} \tag{9}$$

[5] Quoique ce résultat soit souvent invoqué je n'en connais qu'une démonstration basée sur une évaluation de l'aire d'un polyèdre convexe due à CAUCHY.

[6] W. BLASCHKE: *Kreis und Kugel* (Veit & Comp., Leipzig, 1916, pp. 62-66).

et dont les sections par deux plans parallèles à xy sont des courbes homothétiques entre elles, le centre d'homothétie étant sur Oz. Nous supposerons qu'une telle surface est sans point double et nous admettrons, cette fois-ci, qu'elle est homéomorphe à un carré; c'est-à-dire que les équations:

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} x=\varphi(v) \\ y=\psi(v) \end{cases} \qquad 0\leqslant v\leqslant 1$$

représentent, dans le plan xy, un arc simple; de plus, nous admettrons également que cet arc est à une distance positive de l'origine, tandis que l'arc:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} x=f(u) \\ z=g(u) \end{cases} \qquad 0\leqslant u\leqslant 1$$

du plan des xy est à une distance positive de Oz ($x>0$, par exemple).

Nous allons montrer, dans ces conditions, que, pour que la surface (9) soit quarrable il est nécessaire et suffisant que les arcs (10) et (11) soient rectifiables. (Ici, l'approximation de la surface S doit se faire au moyen de surfaces polyédrales homéomorphes à un carré).

Inscrivons tout d'abord dans l'arc (10) une ligne polygonale à $(n+1)$ côtés et d'équations:

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} x=\varphi_n(v) \\ y=\psi_n(v) \end{cases} \qquad 0\leqslant v\leqslant 1$$

soit L_n sa longueur.

Soient z' et z'' deux côtes distinctes de la surface S (7) ($z'<z''$) et soit S_k une suite de surfaces polyédrales dont les aires A_k tendent vers l'aire A de (S) lorsque k augmente indéfiniment; ε étant un nombre positif donné, on aura donc, à partir d'une certaine valeur de k

$$A_k<A+\varepsilon.$$

Soit $\lambda_k(z)$ la longueur de la section de S_k par un plan de cote z, on a déjà remarqué que:

$$\int\lambda_k(z)dz\leqslant A_k.$$

De plus, comme S_k tend vers S, on aura, à partir d'une certaine valeur de k, et pourvu que ε soit suffisamment petit:

$$\varrho(L_n-\varepsilon)\leqslant\lambda_k(z)$$

où par ϱ on a désigné la plus courte distance de l'arc (11) à l'origine; et cela dans tout l'intervalle: $z'+\varepsilon<z<z''-\varepsilon$.

Dans ces conditions nous concluons:

$$\varrho(L_n-\varepsilon)(z''-z'-2\varepsilon)\leqslant A+\varepsilon$$

(7) Si z est constant le problème n'a pas d'intérêt.

mais, ε étant quelconque, en le faisant tendre vers zéro nous avons:

$$L_n \leqslant \frac{A}{\varrho(z''-z')}.$$

Cela ayant lieu quel que soit n et la ligne polygonale (12) étant inscrite dans l'arc (10), cette inégalité signifie que l'arc (10) est rectifiable et que, pour sa longueur L on a la borne supérieure:

$$L \leqslant \frac{A}{\varrho(z''-z')}.$$

Ce résultat étant acquis, reprenons maintenant le raisonnement précédent mais cette fois-ci avec un peu plus de précision; divisons l'arc de courbe (11) en $(p+1)$ parties au moyen des points de paramètre u_j ($u_{j-1} < u_j$; avec $u_0 = 0$, $u_{p+1} = 1$) et soient z_j les valeurs de z correspondantes. En utilisant la semi-continuité inférieure de la longueur, on trouve après un passage à la limite:

$$\varrho L \left\{ \sum_1^{p+1} |z_j - z_{j-1}| \right\} \leqslant A$$

ou:

$$\sum_1^{p+1} |z_j - z_{j-1}| \leqslant \frac{A}{\varrho L}$$

p étant quelconque, cette inégalité veut dire que la courbe (10) est à variation z bornée, ou, si l'on veut, que la fonction $g(u)$ est à variation bornée.

Revenons à présent à la ligne polygonale (12) inscrite dans l'arc (10) et numérotons de 1 à $n+1$, dans l'ordre où on les parcourt à partir d'une extrémité de (10) les côtés de cette ligne; soit c_i la longueur du côté d'indice i, s_i la longueur de l'arc qu'il sous-tend et h_i la distance de ce côté à l'origine. Au moyen des points de division u_j, utilisés ci-dessus, nous divisons l'arc (11) en $(p+1)$ parties et la surface S en $(n+1) \cdot (p+1)$ portions en utilisant, concuremment avec les points précédents, la ligne (12). Nous allons projeter chacune de ces portions sur le plan des xy.

Soit x_j la valeur de l'abscisse de (11) qui correspond à u_j; les bords de la portion $(u_{j-1}, u_j;\ v_{i-1}, v_i)$ se projettent sur xy suivant deux segments de droite (les projections des courbes $v = v_{i-1}$ et $v = v_i$) et deux arcs semblables à l'arc (v_{j-1}, v_j) de (10).

Cet arc chemine dans l'ellipse qui a ses extrémités pour foyers et s_i pour grand axe; l'aire de cette ellipse est:

$$\frac{\pi}{4} s_i \sqrt{s_i^2 - c_i^2}$$

de sorte que la projection de la portion en question sur xy couvre au moins une aire (formée de un ou deux domaines si elle est positive) égale à:

$$|x_{j-1}^2 - x_j^2| \frac{c_i h_i}{2} - \frac{\pi}{4} s_i \sqrt{s_i^2 - c_i^2}(x_{j-1}^2 + x_j^2).$$

Soit ξ (>0) le minimum de x et Ξ son maximum, cette aire n'est pas inférieure à:

$$\xi\,|x_{j-1}-x_j|\,c_ih_i-\frac{\pi}{2}\Xi^2 s_i\sqrt{s_i^2-c_i^2}.$$

A partir d'une certaine valeur de k, et lorsque p et n sont donnés, l'aire intérieure de la projection sur xy de la portion de S_k, qui correspond à la portion de S précédente, ne sera donc pas inférieure à la moitié de la quantité précédente pour toutes les portions considérées de S_k. Mais la somme de ces aires intérieures ne dépasse pas l'aire A_k de S_k et, pour k assez grand, A_k ne dépassera pas $A+\varepsilon$, ε étant donné, de sorte que:

$$\xi\left(\sum_1^{p+1}|x_{j-1}-x_j|\right)\sum_1^{n+1}\frac{c_ih_i}{2}-\frac{\pi}{4}\Xi^2(p+1)\sum_1^{n+1}s_i\sqrt{s_i^2-c_i^2}\leqslant A+\varepsilon. \tag{13}$$

Soit à présent Θ l'angle sous lequel on voit l'arc (10) de l'origine, on peut choisir n assez grand pour que tout d'abord:

$$\sum_1^{n+1}\frac{c_ih_i}{2}\geqslant\frac{\varrho^2\Theta}{4}$$

et ensuite tel qu'en choisissant les points de division de façon que tous les s_i soient égaux à $\frac{L}{n+1}$, on ait aussi:

$$\left(\frac{\pi}{4}\Xi^2\right)^2 2L^3\sum_1^{n+1}(s_i-c_i)\leqslant\varepsilon^2. \tag{14}$$

En prenant alors $p=n$, l'inégalité (13) s'écrit:

$$\frac{\varrho^2\xi\Theta}{4}\sum_1^{n+1}|x_{j-1}-x_j|-\frac{\pi}{4}\Xi^2L\sqrt{\frac{2L}{n+1}}\sum_1^{n+1}\sqrt{s_i-c_i}\leqslant A+\varepsilon.$$

D'où, en utilisant (14) et la remarque relative aux moyennes ainsi que nous l'avons fait au n.° 3:

$$\frac{\varrho^2\xi\Theta}{4}\sum_1^{n+1}|x_{j-1}-x_j|\leqslant A+2\varepsilon.$$

Mais cette inégalité, valable quelque soit n, exprime que la fonction $x=f(u)$ est à variation bornée et notre résultat est complètement établi.

Pour calculer l'aire il suffira alors de procéder comme nous l'avons fait à propos des surfaces de révolution, en inscrivant des polyèdres dans la surface (S); on peut aussi observer que, si les paramètres u et v sont les arcs de courbes (10) et (11), la surface (S) est mise sous forme rectifiable.

7. - Mr. L. TONELLI [8] a complètement résolu le problème de la quadrature des surfaces de la forme:

$$z=f(x, y) \qquad (0 \leq x \leq 1\,;\; 0 \leq y \leq 1)$$

où la fonction f est supposée définie et continue dans le carré de côté 1 qui vient d'être indiqué. Au moyen d'un ensemble de transformations nous allons déduire du résultat de Mr. L. TONELLI divers exemples de surfaces quarrables qui contiennent des cas particuliers des surfaces précédentes.

Soit (Δ) un domaine de l'espace (ξ, η, ζ); à tout point de ce domaine faisons correspondre un point de l'espace (x, y, z) au moyen de la transformation:

$$\left\{\begin{array}{l} x=x(\xi, \eta, \zeta) \\ y=y(\xi, \eta, \zeta) \\ z=z(\xi, \eta, \zeta) \end{array}\right. \tag{15}$$

chacun des systèmes d'axes étant, dans ces deux espaces, supposé rectangulaire.

Supposons que (15) soit définie dans (Δ) et fasse correspondre à ce domaine un domaine (D), la correspondance étant biunivoque. Je dis alors que si la transformation précédente satisfait à une condition de LIPSCHITZ d'ordre un, à toute surface quarrable de l'espace (ξ, η, ζ) correspond une surface quarrable de l'espace (x, y, z). Soient en effet π et π' deux points de (Δ) et P et P' les points correspondants de (D), en vertu de nos hypothèses, il existe un nombre positif λ tel que, pour que tout couple π et π', on ait:

$$|PP'| \leq \lambda |\pi\pi'| \tag{16}$$

où les deux barres qui enserrent deux points indiquent leur distance.

Soit Σ une surface quarrable de (ξ, η, ζ) et Σ_k $(k=1, 2, ...)$ une suite de surfaces polyédrales qui tendent vers elle tandis que leurs aires a_k tendent vers l'aire a de Σ.

Il est immédiat, d'après l'inégalité précédente (16) que la suite de surface S_k images respectives des surfaces Σ_k, tend vers l'image S de Σ dans l'espace (x, y, z); de plus chaque face de Σ_k se transforme en une surface rectifiable, donc quarrable, et dont l'aire est inférieure à λ^2 fois l'aire de cette face d'après un résultat de Mr. T. RADO [9]. D'autre part toute surface polyédrale étant susceptible d'une

---

[8] L. TONELLI: *Sulla quadratura della superficie.* (Atti Accad. Lincei, Rend. 6ᵉ Série, t. 3 (1926), pp. 357-517-633). Les résultats de Mr. TONELLI ont été étendus au cas où f est définie dans un domaine ouvert par Mr. S. CINQUINI (Atti. Accad. Sci. Torino, t. 68 (1933), pp. 315-325).

[9] T. RADÓ, l. c. [4] (ainsi que le résultat rappelé dans le courant du n.° 4). On peut aussi raisonner comme le fait Mr. LEBESGUE dans sa thèse; au lieu du coefficient λ^2 on trouve le coefficient $\frac{4}{\pi}\lambda^2$.

représentation rectifiable, son image, la surface S_k, est donc, dans sa totalité, susceptible d'une telle représentation et alors son aire est par conséquent la somme des aires des images des différentes faces de Σ_k.

Il suit de là qu'entre l'aire a_k de Σ_k et l'aire A_k de S_k on a:

$$A_k \leqslant \lambda^2 a_k$$

ce qui donne

$$\underline{\lim}\, A_k \leqslant \lambda^2 a.$$

D'après la semi-continuité inférieure de l'aire, cela veut dire que la surface S est quarrable et que son aire A satisfait à l'inégalité:

$$A \leqslant \lambda^2 a$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

Si, de plus, la transformation inverse de (15) satisfait elle aussi à une condition de LIPSCHITZ d'ordre un, c'est-à-dire si l'on peut trouver un nombre $\varkappa$ tel que:

$$|\pi\pi'| \leqslant \varkappa\, |PP'| \tag{17}$$

alors à toute surface quarrable située dans (Δ) correspond une surface quarrable située dans (D) et inversement.

8. - Les systèmes orthogonaux classiques de la géométrie différentielle fournissent des changements variables qui jouissent de la propriété (16), et même de la propriété (17) dans certaines régions de l'espace; on pourra donc déduire des considérations précédents des conditions nécessaires et suffisantes pour la quarrabilité de certaines classes de surfaces.

Nous n'examinerons que les cas les plus simples pour lesquels, au lieu des coordonnées (ξ, η, ζ) nous emploierons celles consacrées par l'usage. Il y aurait lieu, dans chacun des exemples que nous allons citer, de donner une méthode pour le calcul de l'aire, nous n'avons pas essayé de le faire quoique les méthodes employées dans les cas des surfaces: $z = f(x, y)$, semblent pouvoir se généraliser.

1°) *Coordonnées cylindriques.* - En coordonnées (x, y, z) rectangulaires, posons:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \theta \\ y = \varrho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

et considérons les surfaces dont un observateur peut voir tous les points en se déplaçant le long de l'axe des z (surfaces à étoilement cylindrique):

$$\varrho = f(\theta, z)$$

où f désigne une fonction continue définie, par exemple, dans le domaine:

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\,; \qquad z_1 \leqslant z \leqslant z_2.$$

Elles sont quarrables si f est à variation bornée d'après Mr. L. TONELLI (c'est-à-dire si, dans l'espace (ϱ, θ, z) la surface $\varrho = f(\theta, z)$ est quarrable). Si, d'autre part, f admet une borne inférieure positive, alors cette condition suffisante devient également nécessaire car les conditions (16) et (17) sont alors réalisées, comme on le voit facilement, entre les espaces (x, y, z) et (ϱ, θ, z).

2°) *Coordonnées sphériques.* - Posons cette fois:

$$\begin{cases} x = \varrho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \varrho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \varrho \cos\theta \end{cases} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

et considérons les surfaces dont on voit tous les points de l'origine (surfaces étoilées):

$$\varrho = f(\theta, \varphi) \quad (f \text{ continue}\,;\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\,;\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2).$$

La condition (16) est encore réalisée entre les espaces (x, y, z) et $(\varrho, \theta, \varphi)$; quant à la condition (17) elle l'est pour les surfaces de la forme précédente qui ne passent pas par l'origine; les résultats ci-dessus sont encore valables.

Remarquons aussi que le cas traité par Mr. L. TONELLI est un cas limite de celui dont nous nous occupons: c'est le cas où l'on voit tous les points de la surface d'un point situé à l'infini.

3°) Les exemples précédents proviennent tous du cas où les fonctions qui déterminent la transformation (15) sont linéaires par rapport à une même variable, soit ζ.

Soit O l'origine dans l'espace (x, y, z) représentons un vecteur $\overrightarrow{OP}$ de cet espace par $\vec{P}$, notre transformation fait correspondre au point (ξ, η, ζ) le point P tel que:

$$\vec{P} = \vec{M}(\xi, \eta) + \zeta \vec{D}(\xi, \eta)$$

où les deux surfaces $M(\xi, \eta)$ et $D(\xi, \eta)$ sont rectifiables et les conclusions du paragraphe précédent sont valables.

En particulier toute surface convexe est susceptible d'une représentation rectifiable en même temps que la sphère image de ses normales extérieures.

Quand ζ est positif, c'est-à-dire à l'extérieur de cette surface, les conditions (16) et (17) sont réalisées. Les surfaces telles que:

$$\zeta = f(\xi, \eta)$$

ou surfaces à étoilement convexe, contiennent les exemples précédemment étudiés (cas où la surface convexe est un plan (L. TONELLI), ou un cylindre ou une sphère).

4°) Enfin, pour que la surface S qui correspond à Σ soit quarrable, il n'est pas nécessaire que la correspondance entre (Δ) et (D) soit biunivoque. Considérons alors la transformation:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \\ z = \zeta \end{cases}$$

et supposons que les fonctions continues $x(\xi, \eta)$ et $y(\xi, \eta)$ satisfassent à une condition de LIPSCHITZ d'ordre un, alors cette transformation appartient à l'ensemble (15); donc la surface:

$$\begin{cases} x=x(\xi, \eta) \\ y=y(\xi, \eta) \\ z=z(\xi, \eta) \end{cases}$$

est quarrable si la surface

$$\zeta=z(\xi, \eta)$$

l'est dans l'espace (ξ, η, ζ), c'est-à-dire si la fonction $z(\xi, \eta)$ est à variation bornée. Ces surfaces sont les surfaces semi-rectifiables de Mr. CACCIOPOLI (l. c.).

9. - Les transformations (15) sont les plus générales qui transforment les lignes rectifiables de l'espace (ξ, η, ζ) en lignes rectifiables de l'espace (x, y, z), ainsi qu'il ressort du raisonnement fait par Mr. LEBESGUE dans sa thèse à propos des surfaces rectifiables. Il y aurait lieu de rechercher également toutes les transformations qui changent une surface quarrable en surface quarrable. Parmi ces dernières figurent les transformations (15) ainsi que celles qui transforment un polygone plan en une surface quarrable telle que le rapport de son aire à celle du polygone est borné par un nombre qui ne dépend que de la transformation et pas du polygone.

Mais existe-t-il d'ailleurs des transformations qui changent toute surface quarrable en surface quarrable et qui ne font pas partie de l'ensemble (15)?