

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FRANCESCO CECIONI

Un teorema su alcune funzioni analitiche, relative ai campi piani pluriconnessi, usate nella teoria della rappresentazione conforme

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 4, n° 1 (1935), p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN TEOREMA SU ALCUNE FUNZIONI ANALITICHE, RELATIVE AI CAMPI PIANI PLURICONNESSI, USATE NELLA TEORIA DELLA RAPPRESENTAZIONE CONFORME

di FRANCESCO CECIONI (Pisa).

Premesse ed enunciato del teorema.

1. - In una Nota preventiva del 1925 ⁽¹⁾ ho enunciato alcune condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità conforme di due campi piani pluriconnessi l'uno sull'altro, con speciale riguardo ai campi simmetrici, insieme alle corrispondenti condizioni di trasformabilità birazionale reale delle curve algebriche presentanti il caso di HARNACK. Nel preparare la pubblicazione delle relative dimostrazioni ho potuto dare maggiore estensione a quei risultati, facendoli dipendere da un teorema di carattere abbastanza generale, dal quale sembra possano dedursi, con metodo uniforme, vari altri risultati nell'argomento accennato.

Do qui la dimostrazione di tale teorema, rimandando ad altro lavoro la trattazione delle suaccennate applicazioni; mi limiterò qui, al n.º 10, a spiegare il metodo col quale dal teorema in discorso possono dedursi condizioni di trasformabilità conforme di campi piani.

2. - Supporremo che ciascuno dei contorni dei campi piani, che sono oggetto del teorema in questione, sia costituito da un numero finito di archi regolari di linee analitiche. Come è ben noto ⁽²⁾, chiamasi arco regolare di linea analitica un arco rappresentato parametricamente da $z=z(t)$, $a \leq t \leq \beta$, dove $z(t)$ è analitica regolare (olomorfa) nell'intervallo $a \leq t \leq \beta$, e con la derivata ivi diversa da zero. Chiameremo *punti angolari* del contorno quei punti dove confinano due diversi archi di linea analitica; essi sono dunque in numero finito.

Supporremo inoltre, *solo per semplicità di discorso*, che i campi piani che considereremo siano limitati.

Ogni contorno del campo sarà dunque una linea chiusa continua; non è escluso con ciò che esso sia un taglio (nelle applicazioni che abbiamo in vista si presen-

⁽¹⁾ CECIONI: *Rappresentazione conforme e curve algebriche* [Annali delle Università Toscane, Nuova serie, Vol. IX (1925), pp. 181-197].

⁽²⁾ Vedi, ad esempio, BIEBERBACH: *Lehrbuch der Funktionentheorie* (Leipzig, Teubner, 1931, zweite Auflage), t. II, cap. I, pag. 31.

terà proprio questo caso), nè è escluso che solo una parte di un contorno sia un taglio.

Un campo piano con $p+1$ contorni sarà detto $p+1$ volte connesso.

3. - Sia A un campo piano $p+1$ volte connesso (soddisfacente alle condizioni dette al n.° 2); siano L_0, L_1, \dots, L_p i suoi contorni, z la variabile complessa nel suo piano. Prendiamo $p+1$ costanti (reali) $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ ad arbitrio, una per ogni contorno di A , e consideriamo quella funzione armonica V , uniforme e regolare nel campo A , che assume sui contorni L_0, L_1, \dots, L_p rispettivamente i valori costanti $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$. Per le ipotesi fatte sui contorni, questa funzione V è perfettamente determinata, è regolare anche in ogni punto non angolare del contorno, e (almeno pensata solo in A) è continua anche nei punti angolari. Consideriamo la funzione armonica coniugata U , che risulta determinata a meno di una costante additiva. La funzione analitica

$$\Phi(z) = U + iV,$$

polidroma (in generale) in A , è allora regolare (con ogni sua determinazione) in ogni punto interno al campo A e in ogni punto non angolare del contorno, ed è continua anche nei punti angolari (almeno pensata in A).

Chiameremo *funzioni della specie Φ* , o *funzioni Φ , relative al campo A* , le funzioni analitiche così definite⁽³⁾. Risulta dunque determinata, a meno di una costante reale additiva, una funzione di questa specie, quando sono dati i valori costanti $i\lambda_0, i\lambda_1, \dots, i\lambda_p$ della sua parte immaginaria sui contorni, e questi valori possono darsi ad arbitrio. Se essi sono eguali fra loro, la funzione $\Phi(z)$ è costante.

Pensiamo ciascuno dei contorni L_0, L_1, \dots, L_p percorso *nel verso positivo rispetto al campo A* , in quel verso cioè (per fissare le idee) rispetto al quale, sulla pagina positiva del piano, i punti di A vengono lasciati alla sinistra. Quando z percorre la linea L_s , la U aumenta di un periodo reale, e lo stesso periodo ammette la $\Phi(z)$, perchè V è uniforme in A . *Una funzione Φ ammette dunque in A $p+1$ periodi reali corrispondenti ai cammini L_0, L_1, \dots, L_p* , ossia a cammini i quali possano ridursi, rispettivamente, a queste linee L_0, L_1, \dots, L_p per deformazione continua e senza uscire dal campo A ; questi periodi saranno detti, rispettivamente, i *periodi di $\Phi(z)$ relativi alle linee L_0, L_1, \dots, L_p* . Questi pe-

⁽³⁾ Queste funzioni, insieme con altre, furono introdotte dallo SCHOTTKY: *Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXIII (1877), pp. 300-351], § 6, e sono fondamentali e molto usate nella teoria della rappresentazione conforme dei campi piani pluriconnessi. Furono indicate dallo SCHOTTKY col simbolo J . Sulle riemanniane delle curve caratteristiche di A esse sono gli integrali abeliani di prima specie che hanno la parte immaginaria costante su ciascuna linea reale; ma di ciò non ci varremo nel presente lavoro.

riodi non possono essere simultaneamente nulli, a meno che la Φ non sia costante (4); la loro somma è nulla, ed ogni altro periodo della Φ in A è una combinazione lineare omogenea a coefficienti interi di questi periodi.

Indichiamo con $\Phi_s(z)$ quella particolare funzione Φ che ha la parte immaginaria nulla su $L_0, \dots, L_{s-1}, L_{s+1}, \dots, L_p$, ed eguale a πi su L_s . Chiameremo *funzioni Φ normali* queste particolari funzioni $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_p$.

La loro somma è πi (a meno di una costante reale arbitraria), e mediante p di esse si esprime linearmente ogni funzione Φ ; ma queste ultime proprietà non saranno adoperate nel presente lavoro.

Una funzione Φ è determinata, come abbiamo detto, dai valori $i\lambda_0, i\lambda_1, \dots, i\lambda_p$ della sua parte immaginaria al contorno. Sono oggetto del teorema che vogliamo dimostrare quelle particolari funzioni Φ le cui parti immaginarie prendono sul contorno solo *due* valori distinti; per esse, cioè, alcuni dei λ_n hanno tutti un valore α , gli altri hanno tutti un altro valore β , ed è $\alpha \neq \beta$. Tali sono, in particolare, le Φ normali.

4. - Possiamo ora esporre l'enunciato del teorema che dimostriamo in questo lavoro.

TEOREMA. - *Siano A ed A' due campi piani $p+1$ volte connessi, situati sullo stesso piano, e soddisfacenti alle seguenti condizioni:*

I. - *Abbiano un contorno comune; supponiamo sia il contorno esterno L_0 .*

II. - *Si possa stabilire una corrispondenza biunivoca fra i contorni interni di A e quelli di A' , in modo che, chiamando L_h, L'_h ($h=1, 2, \dots, p$) due contorni corrispondenti, per ciascun valore di h accada che, o L_h avvolge il solo contorno L'_h del campo A' , e non ha alcun punto comune con gli altri contorni, oppure viceversa L'_h avvolge il solo contorno L_h del campo A , e non ha alcun punto comune con gli altri contorni. (Vedi il seguente n.º 6).*

III. - *Esistano due funzioni Φ , una relativa al campo A , una ad A' , le cui parti immaginarie prendano, sui contorni del rispettivo campo, solo due valori distinti, le quali funzioni godano di queste due proprietà: le loro parti immaginarie su contorni corrispondenti siano eguali; i loro periodi relativi a contorni corrispondenti siano pure eguali.*

In queste ipotesi i due campi A ed A' coincidono.

(4) Vedi, ad esempio, anche CECIONI: *Sulla rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse su un piano in cui siano eseguiti dei tagli paralleli* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXV (1908), pp. 1-19], p. 7.

5. - Come caso particolare si ha :

Il medesimo teorema vale se al posto della condizione III si sostituisce la seguente, più particolare:

III_a. - *Esistano due funzioni Φ normali corrispondenti, una relativa ad A , una ad A' , che abbiano rispettivamente eguali i periodi relativi a contorni corrispondenti.*

È chiaro che due funzioni Φ normali, una in A l'altra in A' , sono dette *corrispondenti* quando le loro parti immaginarie su contorni corrispondenti sono eguali.

6. - Non saranno inutili alcuni schiarimenti relativi alla II condizione dell'enunciato di sopra.

Si consideri un contorno interno qualsiasi L_h di A ; esso può essere anche un taglio, o può contenere alcune parti che siano tagli: ad esempio, L_h può essere una circonferenza con l'aggiunta di tagli che partano da punti di essa e siano diretti verso l'esterno o verso l'interno. *Se la linea L_h non è addirittura un taglio*, essa determina un campo *limitato* C_h , che non appartiene ad A .

Eguali considerazioni valgono, naturalmente, pei contorni L_h' di A' .

Dire, ad esempio, che L_h *avvolge il solo contorno L_h' di A' , e non ha alcun punto comune con gli altri contorni*, significa che ogni punto di L_h' o è su L_h o è nel campo interno C_h , mentre tutti gli altri contorni sono *esterni* a C_h . L_h ed L_h' possono dunque avere dei punti e dei tratti comuni. Se, in particolare, L_h è un taglio (C_h allora non esiste), la frase detta significa che ogni punto di L_h' appartiene ad L_h , e nessun altro punto degli altri contorni è su L_h ; anche L_h' è allora un taglio, praticato lungo una parte della linea lungo la quale è praticato il taglio L_h . Proprio in queste condizioni saranno i campi che compariranno nelle applicazioni accennate al n.º 1.

Notiamo anche esplicitamente che può avvenire che per alcuni valori dell'indice h L_h avvolga L_h' , per altri L_h' avvolga L_h . Non è escluso naturalmente, nella II ipotesi, che L_h ed L_h' , per qualche valore di h , coincidano; la tesi è appunto che ciò deve accadere per tutti i valori di h .

In seguito alle condizioni poste, detto \bar{L}_h quello dei due contorni L_h , L_h' che avvolge l'altro, i contorni $L_0, \bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_p$ determinano un campo piano \bar{A} di cui essi sono gli unici contorni, che è quindi $p+1$ volte connesso, e che appartiene tanto al campo A che al campo A' ; è anzi la parte comune ai due campi. Anche questo campo \bar{A} soddisfa alle ipotesi generali del n.º 2; la sua considerazione è essenziale nella dimostrazione del teorema in discorso.

Riduzione del teorema ad un lemma.

7. - Chiamando $\Phi(z)$ e $\Phi'(z)$ le due funzioni Φ di cui alla condizione III, relative rispettivamente ad A e ad A' , si consideri nel campo \bar{A} di cui sopra, comune ad A e ad A' , la funzione

$$w(z) = \Phi(z) - \Phi'(z),$$

per determinare completamente la quale supporremo di fissare (ad arbitrio) in un punto di \bar{A} , la determinazione iniziale di Φ e quella di Φ' . Esaminiamo le proprietà di questa funzione.

1^a). *La $w(z)$ è monodroma in \bar{A} .* È evidente, a causa della eguaglianza dei periodi supposta nella ipotesi III.

2^a). *La $w(z)$ è regolare in ogni punto interno ad \bar{A} , o appartenente al contorno, eccetto in un numero finito di punti del contorno, nei quali però la $w(z)$ rimane continua* (almeno nel campo \bar{A}). Questi punti sono quelli che sono punti angolari pel contorno di A o per quello di A' .

Ciò segue subito dalla ipotesi II e dai n.° 2 e 3.

3^a). *La $w(z)$ è reale su alcuni contorni di \bar{A} (almeno su uno); su ogni altro (eventuale) contorno di \bar{A} il coefficiente dell'immaginario di $w(z)$ non cambia mai segno; su alcuni contorni esso è dunque ≥ 0 , sugli altri ≤ 0 .*

Poichè infatti, per la condizione III, le parti immaginarie di Φ e di Φ' prendono su contorni corrispondenti valori eguali, la $w(z)$ è reale su L_0 , e su quei contorni L_h che eventualmente coincidono col contorno corrispondente L_h' .

Ancora per la condizione III, la parte immaginaria della Φ avrà su alcuni dei contorni L_0, L_1, \dots, L_p di A un valore $i\alpha$, sugli altri un valore $i\beta$, con $\alpha \neq \beta$, ad esempio,

$$\alpha < \beta.$$

La parte immaginaria della Φ' ha poi, sui contorni corrispondenti di A' , rispettivamente gli stessi valori.

Per le proprietà delle funzioni armoniche, il coefficiente dell'immaginario della Φ ha, in ogni punto interno ad A , un valore compreso fra α e β e diverso da essi; eguale cosa accade pel coefficiente dell'immaginario della Φ' nei punti interni ad A' .

Consideriamo allora un contorno L_h che non coincida con L_h' ; ad esempio, L_h' avvolga L_h (condizione II); \bar{L}_h coincide perciò con L_h' . Nei punti di \bar{L}_h che sono insieme su L_h e su L_h' , la differenza $w(z) = \Phi - \Phi'$ è reale, cioè il coefficiente dell'immaginario di w è zero. In tutti gli altri punti di $\bar{L}_h \equiv L_h'$ il coefficiente dell'immaginario della Φ' è α o β , ma quello della Φ è compreso fra questi valori α e β , gli estremi esclusi, perchè questi punti sono interni ad A ; perciò il coefficiente dell'immaginario di $w = \Phi - \Phi'$ è, in tutti questi punti, sempre positivo o sempre negativo (e non nullo).

Eguali considerazioni valgono se L_h avvolge L_h' . Quindi anche la 3^a proprietà della funzione w è dimostrata.

Vediamo in particolare, dalle ultime considerazioni, che:

a). Se L_h non coincide con L_h' , la w non è sempre reale su \bar{L}_h .

Ebbene: dimostreremo al numero seguente che, in seguito alle tre proprietà osservate, la $w(z)$ è una costante reale. Allora, per l'osservazione *a)*, ogni contorno L_h coincide col contorno corrispondente L_h' , e perciò i due campi A ed A' coincidono, ed il teorema risulta dimostrato.

Dimostrazione del lemma.

8. - La dimostrazione del teorema in questione è ricondotta dunque a quella del seguente

Lemma. - *Abbiassi, in un campo piano A $p+1$ volte connesso ⁽⁵⁾, una funzione analitica $w(z)$ che goda delle seguenti proprietà:*

1^a). *Sia monodroma in A .*

2^a). *Sia regolare in ogni punto di A , interno o del contorno, eccetto al più in un numero finito di punti del contorno (punti critici), nei quali però la $w(z)$ rimanga continua (almeno in A).*

3^a). *Su alcuni dei contorni di A (uno almeno) la $w(z)$ sia reale. Su ogni altro eventuale contorno il coefficiente dell'immaginario di $w(z)$ non cambi mai segno.*

In queste ipotesi la $w(z)$ è una costante reale.

Quindi gli eventuali contorni, cui si riferisce la seconda parte della proprietà 3^a, mancano necessariamente ⁽⁶⁾.

Applicando questo lemma al campo \bar{A} del numero precedente, la dimostrazione del numero precedente stesso risulta completata.

Divideremo, per chiarezza, la dimostrazione in più parti.

a). Chiamando, come sopra, L_0, L_1, \dots, L_p i contorni del nostro campo piano A , siano

$$(1) \quad L_0, L_1, \dots, L_m, \quad 0 \leq m \leq p,$$

⁽⁵⁾ Soddisfacente, s'intende, alle ipotesi del n.º 2.

⁽⁶⁾ Si noti che se la proprietà 3^a escludesse addirittura la presenza di questi eventuali contorni, il lemma del testo si ridurrebbe ad una proprietà nota. In questa ipotesi infatti la w diviene una di quelle funzioni, introdotte dallo SCHOTTKY nella Memoria cit. alla nota ⁽³⁾, che in altri miei lavori ho chiamato *funzioni K*, e che corrispondono a quelle funzioni razionali sulle curve caratteristiche, che sono reali sui circuiti reali. Ora la w è priva di poli; è dunque una funzione K priva di poli, cioè, come è noto, una costante reale. Vedi, ad esempio, CECIONI: *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann* [Annali delle Università Toscane, Nuova serie, Vol. XII (1928), pp. 27-88], pp. 46-59 e 82-85; cfr. anche CECIONI, loc. cit. alla nota ⁽⁴⁾, pp. 3-4. Il teorema

quelli sui quali la $w(z)$ è reale ⁽⁷⁾; indicheremo con L_q uno qualunque degli altri; dunque i contorni

$$(2) \quad L_q, \quad q = m + 1, \dots, p,$$

sono quelli (eventuali) sui quali la $w(z)$ non è ovunque reale; ad essi si riferisce la seconda parte della 3^a proprietà.

Chiameremo, per brevità di discorso, *contorni di prima specie* i contorni (1), quelli cioè sui quali la $w(z)$ è reale; *contorni di seconda specie* (rispettivamente di *terza specie*) quei contorni L_q indicati nella (2) sui quali il coefficiente dell'immaginario di $w(z)$ è *positivo o nullo* (rispettivamente *negativo o nullo*).

Faremo la dimostrazione per assurdo; ammetteremo cioè che $w(z)$ sia una funzione *non costante* che soddisfi alle proprietà dell'enunciato, e faremo vedere che con ciò si perviene ad un assurdo.

b). Sia U un valore assunto da w sopra uno dei contorni di prima specie, ad esempio su L_0 , e sia diverso dai valori che w assume nei *punti critici* (vedi proprietà 2^a), nei punti angolari del contorno, e nei punti ove la derivata $\frac{dw}{dz}$ si annulla. Ciò è possibile perchè w non è costante. Il valore U è reale. Poichè esso è diverso dai valori di w nei punti critici, ed anche in questi la w è continua, potremo circondare i punti critici con intorni così piccoli che in essi sia $w \neq U$, e vediamo allora che il valore U è assunto dalla funzione w , nel campo A e sul contorno, un numero finito di volte. Diciamo

$$(3) \quad a_1, \quad a_2, \dots, \quad a_n$$

i punti, di A e del contorno, nei quali è

$$w(a_i) = U;$$

per la ipotesi fatta su U , relativa alla derivata $\frac{dw}{dz}$, ciascuno di questi punti (3) è radice semplice dell'equazione $w(z) = U$; diciamo poi, rispettivamente,

$$n_0, \quad n_1, \quad n_2, \quad n_3$$

il numero dei punti (3) che cadono nell'interno di A , sui contorni di *prima specie*, di *seconda specie*, di *terza specie*; sarà, per ipotesi,

$$(4) \quad n_1 \geq 1,$$

e, per quanto sopra,

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

che dimostriamo in questo numero del testo è dunque una generalizzazione del teorema ora ricordato sulle funzioni K .

(7) Potremmo, per quanto abbiamo ricordato nella nota precedente ⁽⁶⁾, supporre $m < p$, escludere cioè addirittura $m = p$; ma è inutile perchè il ragionamento vale anche in questo caso; così risulta di nuovo dimostrato il teorema ricordato alla nota precedente sulle funzioni K .

Esaminiamo ora quante volte vengono assunti dalla funzione $w(z)$, in A o sul contorno, i valori complessi convenientemente vicini ad U . Non sarà opportuno però esaminarli tutti, ma solo quelli che ora diciamo.

Per poter parlare geometricamente, interpretiamo i valori w della funzione $w=w(z)$ su un piano complesso w . Consideriamo in esso il punto U (sull'asse reale), e prendiamo un angolo convesso (arbitrario, ma fisso), che abbia U per vertice, e per bisettrice la normale in U all'asse reale; insieme con questo angolo consideriamo l'opposto al vertice; chiamiamo poi θ_+ (rispettivamente θ_-) quello dei due angoli ora detti che è situato dalla parte delle ordinate positive (rispettivamente negative), e θ l'angolo completo formato da θ_+ e θ_- insieme. Noi consideriamo solo i valori (complessi) convenientemente vicini ad U , compresi nell'angolo θ .

Per la continuità di $w(z)$, i valori convenientemente vicini ad U non possono essere assunti che negli intorni dei punti a_1, a_2, \dots, a_n , indicati in (3); dovremo perciò esaminare questi intorni.

Sia a_i uno qualunque dei punti a_1, a_2, \dots, a_n ; è dunque $w(a_i) = U$; e sia dapprima a_i interno ad A . Poichè, per le ipotesi fatte su U , è $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=a_i} \neq 0$, ogni valore convenientemente vicino ad U sarà preso, nell'intorno di a_i , una sola volta. Quindi, per quanto riguarda i punti a_i interni al campo A , vediamo intanto che ogni valore convenientemente vicino ad U è preso, negli intorni di questi punti, n_0 volte.

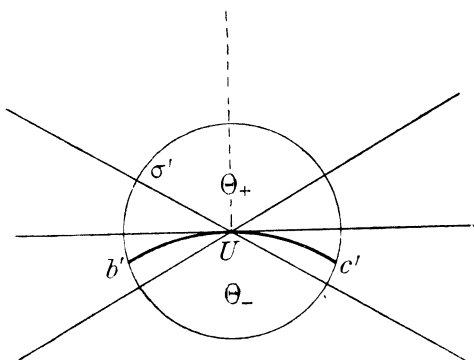


Fig. 1.

Sia ora a_i sul contorno di A . Per le ipotesi fatte su U , la $w(z)$ è regolare in a_i , ha ivi la derivata diversa da zero, ed a_i non è un punto angolare del contorno. Ne viene che la $w=w(z)$ trasforma conformemente e biunivocamente ogni intorno σ di $z=a_i$ (ad esempio un piccolo cerchio col centro in a_i) in un intorno conveniente σ' di $w=U$. Chiamiamo $ba_i c$ il tratto del contorno di A che appartiene all'intorno σ ; esso sarà trasformato dalla $w=w(z)$ in un tratto $b'Uc'$ di linea regolare analitica del piano w tutto appartenente al semipiano delle ordinate positive o nulle, o tutto a quello delle ordinate negative o nulle. Poichè il tratto $b'Uc'$ ha in ogni punto una tangente determinata, ne viene che nel punto U esso ha come tangente l'asse reale ⁽⁸⁾. Considerando allora le due parti nelle quali l'in-

⁽⁸⁾ Il tratto di linea $b'Uc'$ può anche coincidere con un segmento dell'asse reale; ciò avviene, ad esempio, se a_i è su un contorno di prima specie.

torno σ' è diviso dalla linea $b'Uc'$, vediamo che di queste due parti una contiene i punti, convenientemente vicini ad U , dell'angolo θ_+ , l'altra quelli dell'angolo θ_- .

Consideriamo adesso l'intorno di $z = a_i$ nel campo A , cioè la sola parte dell'intorno σ che appartiene al campo A ; essa sarà trasformata in una delle due parti di σ' testè dette, che può essere sia quella che contiene i punti di θ_+ , sia quella che contiene i punti di θ_- . Per alcuni punti a_i accadrà il primo fatto, per altri il secondo.

Indichiamo con k (rispettivamente k') il numero dei punti a_i pei quali accade il primo (rispettivamente il secondo) fatto; sarà naturalmente

$$(5) \quad k + k' = n_1 + n_2 + n_3.$$

Ricordando ciò che abbiamo visto nel caso che a_i sia interno ad A , possiamo dire che: *Ogni valore convenientemente vicino ad U , compreso nell'angolo θ , è preso dalla funzione $w(z)$, nell'interno del campo A , $n_0 + k$ volte, se esso è in θ_+ , $n_0 + k'$ volte, se è in θ_- , e i numeri k e k' soddisfano alla (5).*

c). Si faccia esplicitamente la seguente osservazione, che emerge immediatamente dalle considerazioni raccolte sotto la precedente lettera b): I valori $w \neq U$, convenientemente vicini ad U , e appartenenti all'angolo θ , non sono mai presi dalla funzione $w(z)$ sul contorno di A .

d). Mentre z percorre, totalmente e semplicemente, uno qualunque dei contorni L_h ($h = 0, 1, \dots, p$), il punto w si muove nel suo piano complesso descrivendo una certa linea, che chiameremo γ_h , composta di pezzi analitici, tutta contenuta dentro un conveniente cerchio. Ognuna di queste γ_h sarà detta una *linea di prima, seconda, terza specie*, a seconda della specie del contorno L_h corrispondente. Le linee di prima specie, che sono (vedi a)) $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$, appartengono tutte all'asse reale; ogni linea γ_q di seconda specie sta tutta nel semipiano delle ordinate positive (incluso l'asse reale); ogni linea γ_q di terza specie sta tutta nel semipiano delle ordinate negative (incluso l'asse reale).

Sia ora, dapprima, F un valore complesso qualunque, *non preso da $w(z)$ sul contorno del campo*; consideriamo la funzione

$$w(z) - F$$

ed applichiamo ad essa la formula dell'indicatore logaritmico, nella forma ⁽⁹⁾

$$\sum (\Omega_1 - \Omega_0) = 2\pi(N_0 - N_\infty),$$

⁽⁹⁾ BIANCHI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, Parte I* (Bologna, Zanichelli, 1928, 3ª edizione), p. 179. Per applicare questa formula occorre, dopo scelto F , escludere i punti critici di $w(z)$ mediante intorni convenientemente piccoli; ciò modifica di tanto poco quanto si vuole l'andamento delle linee γ , e quindi non modifica le conclusioni del testo.

dove $\sum (\Omega_1 - \Omega_0)$ è la somma degli incrementi dell'argomento di $w(z) - F$ mentre z percorre le singole linee L_h nel verso positivo, N_0 ed N_∞ rappresentano il numero delle volte (con le rispettive molteplicità) che è nel campo, rispettivamente, $w(z) = F$, $w(z) = \infty$. È qui $N_\infty = 0$; vediamo quindi, esprimendoci geometricamente, che il numero delle volte, che la funzione $w(z)$ prende nel campo il valore F , è dato dal numero dei giri che compie la semiretta Fw , mentre il punto w descrive una dopo l'altra tutte le linee $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$; s'intende che va contato con $+1$ un giro fatto nel verso positivo, con -1 un giro fatto nel verso negativo.

E poichè F è complesso, e le prime m linee $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ sono tutte sull'asse reale a distanza finita, il detto aumento per esse è nullo; *basta quindi far percorrere a w le sole linee γ_q di seconda e di terza specie.*

e). *Supponiamo ora che F sia convenientemente vicino ad U , ed appartenga all'angolo θ_+ , di cui in b).* Consideriamo precisamente un settore circolare Σ , che abbia θ_+ come angolo al centro, ed il raggio convenientemente piccolo in modo che internamente a Σ non vi siano punti delle linee γ_h (vedi c)); e sia F un qualunque punto interno a Σ . Chiamiamo X il punto dove la semiretta Fw incontra il contorno del settore Σ .

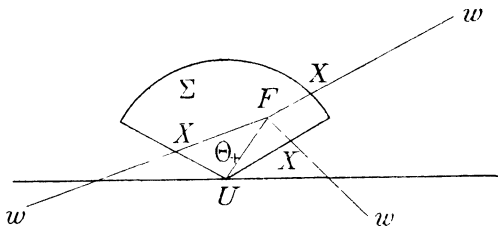


Fig. 2.

Mentre w percorre una linea γ_q di terza specie, situata quindi nel semipiano delle ordinate negative, è chiaro che X non può percorrere tutto il contorno di Σ , perchè la sua ordi-

nata non può superare quella di F , e quindi *l'incremento dell'anomalia della semiretta Fw è nullo.*

Supponiamo ora che w percorra una linea γ_q di seconda specie. Osserviamo anzitutto che in tal caso il punto X cadrà in U allora e solo allora che anche w coincida con U ; infatti w non può essere sul segmento FU , perchè nessun punto delle linee γ_q è interno a Σ , nè sul prolungamento di questo segmento dalla parte di U , perchè la γ_q considerata non penetra nel semipiano delle ordinate negative. Ciò posto, si noti che il numero dei giri che compie la semiretta Fw , ossia FX , contati (per ora) senza curarsi del verso positivo o negativo, non può superare il numero delle volte che X passa per U , cioè il numero delle volte che w coincide con U , ossia *il numero delle volte che il valore U è preso dalla funzione $w(z)$ su L_q .* A maggior ragione sarà inferiore od eguale a tale numero, il numero di giri della Fw contati tenendo conto del verso, come è detto in d).

Sommando i risultati per tutte le linee γ_q (di seconda o di terza specie), vediamo dunque che il numero dei giri che compie la semiretta Fw , quando w percorre una dopo l'altra le ora dette linee, non supera il numero delle volte che

il valore U è preso dalla funzione $w(z)$ sui contorni L_q di seconda specie; non supera cioè n_2 (vedi b)).

Ricordando d), si ha dunque che il numero delle volte, che la funzione $w(z)$ prende nel campo A il considerato valore F (appartenente a θ_+ e convenientemente vicino ad U), è $\leq n_2$. Ma tale numero è $n_0 + k$ (vedi b), enunciato finale); è dunque

$$(6) \quad n_0 + k \leq n_2.$$

f). Se poi F appartiene a θ_- , sempre essendo convenientemente vicino ad U , avremo analogamente

$$(7) \quad n_0 + k' \leq n_3;$$

basta infatti nel ragionamento precedente scambiare le linee γ_q di seconda specie con quelle di terza specie.

Sommando membro a membro le (6) e (7), e ricordando la (5), abbiamo

$$(8) \quad 2n_0 + n_1 \leq 0,$$

e quindi

$$(9) \quad n_0 = 0, \quad n_1 = 0,$$

l'ultima delle quali contraddice alla (4).

Con ciò (vedi a)) l'asserto è dimostrato.

9. - Nello stabilire il teorema precedente è essenziale l'ipotesi $n_1 \geq 1$, l'ipotesi cioè che vi sia almeno un contorno sul quale la $w(z)$ è reale; ma essa viene usata solo all'ultimo momento. Vogliamo supporre ora invece che su nessun contorno la $w(z)$ sia sempre reale, lasciando immutate tutte le altre ipotesi.

In tal caso mostriamo anzitutto che la $w(z)$ non è mai reale nell'interno del campo A . Se infatti in un punto z_0 interno ad A la w fosse reale, essa non sarebbe certo costante (perchè sul contorno assume ora, per ipotesi, valori non reali), ed essendo regolare, sarebbe allora reale anche in infiniti altri punti dell'intorno di z_0 ; potrebbe quindi scegliersi un valore U che fosse preso da $w(z)$ nell'interno del campo, e soddisfacesse alle esclusioni specificate in b). Possono allora ripetersi per questo valore U i ragionamenti fatti al numero precedente per il valore là indicato pure con U , e si giunge così, anche adesso, alle (9), la prima delle quali contraddice all'ipotesi che nell'interno del campo la $w(z)$ prenda il valore U . Dunque nell'interno la $w(z)$ non è mai reale.

Non può darsi allora che la $w(z)$ prenda su qualcuno dei contorni valori col coefficiente dell'immaginario positivo, e su altri contorni valori col coefficiente dell'immaginario negativo; prenderebbe infatti allora nell'interno, per la continuità, anche valori reali.

La stessa conclusione è manifestamente verificata se la $w(z)$ è una costante, la quale, nel caso attuale, deve essere non reale.

Abbiamo quindi il seguente teorema, complementare, in certo senso, del lemma del numero precedente:

Supponiamo che una funzione $w(z)$ soddisfi a tutte le ipotesi del lemma del numero precedente, eccetto che alla 3^a, in luogo della quale supponiamo soddisfatta la seguente:

Non esista alcun contorno di A sul quale la $w(z)$ sia sempre reale. Su ciascun contorno il coefficiente dell'immaginario di $w(z)$ non cambi mai segno.

In queste ipotesi, il coefficiente dell'immaginario di $w(z)$ ha lo stesso segno su tutti i contorni (nei punti ove non è nullo) ed in tutto il campo A , e non si annulla mai nell'interno.

Cenni sulle applicazioni alla teoria della rappresentazione conforme.

10. - Diamo infine un cenno del metodo col quale dal teorema dimostrato in questo lavoro possono dedursi condizioni per la rappresentabilità conforme di due campi piani l'uno sull'altro.

Siano C e C' due campi piani $p+1$ volte connessi; supponiamo che essi, rispettivamente, possano trasformarsi in modo conforme e biunivoco in due altri campi piani A ed A' , e supponiamo che essi soddisfino alle condizioni I, II, III del teorema dimostrato (n.º 4); allora A ed A' coincidono, appunto per il detto teorema, e quindi C e C' sono rappresentabili conformemente e biunivocamente l'uno sull'altro.

E si noti che quando un campo C si trasforma biunivocamente e conformemente in un campo A , le funzioni Φ relative a C si mutano, per la detta trasformazione, nelle funzioni Φ relative ad A . Ne segue che la condizione III può enunciarsi direttamente per i due campi, dati inizialmente, C e C' .

Questa applicazione risulta specialmente conclusiva quando ci si ponga nelle circostanze seguenti.

Esistono vari teoremi che dimostrano la possibilità di rappresentare conformemente e biunivocamente un campo piano su un campo piano *di tipo determinato*, questo tipo essendo tale che ogni campo appartenente ad esso possa essere individuato mediante un certo numero (finito) di parametri; esempi: campi limitati da circonferenze; piani resi pluriconnessi mediante tagli rettilinei, o eseguiti lungo linee determinate; corone circolari con tagli circolari concentrici alle circonferenze limitanti la corona; etc. ⁽¹⁰⁾.

⁽¹⁰⁾ Molti di tali tipi sono enumerati in KOEBE: *Abhandlungen zur Theorie der Konformen Abbildung*, IV [Acta Mathematica, Bd. XLIII (1922), pp. 263-287].

Scegliamo allora i campi A ed A' appartenenti ad uno di questi tipi; ad esempio, per fissare le idee, siano A ed A' corone circolari con tagli, come ora è stato detto. I rapporti dei raggi delle circonferenze e di quelli dei tagli di A (A'), e le differenze fra le anomalie degli estremi dei tagli, saranno numeri determinati dal campo C (C'). Può sempre suppersi verificata per A ed A' la condizione I del nostro teorema. Mettiamo allora le seguenti condizioni:

1^a). I raggi relativi ad A coincidano rispettivamente con quelli relativi ad A' ; si hanno con ciò p eguaglianze.

2^a). Ogni taglio di A contenga il taglio corrispondente di A' , o sia contenuto in esso; si hanno $2p-3$ ineguaglianze attenuate.

Con ciò è verificata, per A ed A' , la condizione II del teorema.

3^a). Si ponga la condizione III del teorema stesso per C e C' ; si hanno p eguaglianze.

Con ciò A ed A' coincidono; le condizioni poste sono quindi sufficienti (e necessarie) per la rappresentabilità biunivoca e conforme di C su C' .

Così può procedersi per qualunque altro tipo nel quale si scelgano A ed A' , ottenendo in tal modo altrettanti teoremi di rappresentabilità conforme.

Ho ottenuto in tal modo dei risultati ⁽¹¹⁾, che mi propongo di esporre in una prossima Memoria, specialmente esaminando il tipo delle corone circolari con tagli ⁽¹²⁾.

È da notarsi che le condizioni necessarie e sufficienti per la trasformabilità biunivoca conforme di C in C' , ottenute nel modo ora accennato, sono costituite da un sistema di eguaglianze (condizioni 1^a e 3^a di sopra), e da un sistema di ineguaglianze attenuate (condizione 2^a), le quali sono poi necessariamente delle eguaglianze in virtù del fatto che col gruppo di esse coesiste il gruppo delle eguaglianze. E ciò è appunto nella natura del teorema oggetto di questo lavoro. Così ad esempio, dall'accenno ora fatto al tipo delle corone circolari con tagli concentrici sono emerse, come condizioni necessarie e sufficienti, $2p$ eguaglianze e $2p-3$ ineguaglianze attenuate; le $2p$ eguaglianze possono anzi ridursi a $2p-1$, ma ciò non può essere dimostrato qui.

Nè ciò contrasta col fatto che i *moduli* ⁽¹³⁾ di un campo piano $p+1$ volte connesso, considerato a meno di una trasformazione conforme, sono $3p-3$, perchè le eguaglianze e diseguaglianze di cui sopra sono fra numeri reali, come pure sono reali i moduli.

Passando alle curve caratteristiche dei campi piani, si hanno condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza birazionale reale di due curve algebriche reali

⁽¹¹⁾ Alcuni si trovano enunciati nella Nota citata in (4).

⁽¹²⁾ Vedi ancora la Nota citata in (4).

⁽¹³⁾ Vedi la mia Memoria citata in (4); cfr. anche l'altra mia Memoria citata in (6), p. 88.

di genere p , presentanti il caso di HARNACK ⁽¹⁴⁾, ed a queste condizioni si applicano le osservazioni testè fatte.

Così ad esempio, le condizioni provenienti dal tipo delle corone circolari tagliate portano, per le curve caratteristiche, condizioni dipendenti da numeri relativi ad un sistema fondamentale di integrali normali di prima specie aventi la parte immaginaria costante su ciascun circuito reale; e queste condizioni consistono in ciò, che certi $2p-1$ numeri relativi all'una curva siano eguali ai corrispondenti numeri relativi all'altra, e certi altri $2p-3$ numeri siano legati ai corrispondenti, relativi all'altra curva, da ineguaglianze attenuate. Si hanno così per ogni curva $4p-4$ parametri, legati quindi da $(4p-4)-(3p-3)=p-1$ relazioni, le quali però sono sconosciute. La natura di esse deve essere dunque tale che le dette ineguaglianze attenuate risultino eguaglianze in forza delle altre eguaglianze supposte.

⁽¹⁴⁾ Per i richiami relativi a quest'argomento può vedersi CECIONI: *Osservazioni sopra alcuni tipi di aree e sulle loro curve caratteristiche nella teoria della rappresentazione conforme* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. LVII (1933), pp. 101-122].