Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Béla De Kerékjártó

Sur le groupe des transformations topologiques du plan

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 3-4 (1934), p. 393-400

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_3-4_393_0>

SUR LE GROUPE DES TRANSFORMATIONS TOPOLOGIQUES DU PLAN

par Béla de Kerékjártó (Szeged).

Le problème de décider si toute transformation topologique du plan conservant le sens d'orientation et n'ayant aucun point invariant peut appartenir à un groupe continu d'ordre un, était en suspens. Dans cette note je montre que la réponse à cette question est négative. Je construis, en effet, une transformation topologique du plan en soi-même sans point invariant et conservant le sens d'orientation qui ne peut pas appartenir à un groupe continu d'ordre un; de plus, elle ne peut pas avoir une racine carrée, c'est-à-dire, il n'y a aucune transformation topologique du plan en soi-même dont le carré est la transformation en question. J'interprèterai encore ces résultats comme des propriétés négatives du groupe continu (d'ordre infini) des transformations topologiques du plan en soi-même, conservant ~~le~~ sens d'orientation.

Pour éclairer mieux le problème, je traiterai d'abord la question analogue pour le cas d'une circonférence. Si une transformation appartient à un groupe continu, ou si elle est le carré d'une transformation, elle doit conserver le sens d'orientation. Si une transformation topologique de la circonférence en elle-même conservant le sens d'orientation admet un point invariant, au moins, il y a un groupe continu d'ordre un qui la contient. Soit en effet AB un arc de la circonférence dont les extrémités sont des points invariants de la transformation et qui ne contient aucun autre point invariant. Si P est un point quelconque de AB, les images successives P^1, P^2, P^3,.... obtenues dans les puissances de la transformation convergent vers une des extrémités de AB, et les images successives inverses P^{-1}, P^{-2},.... (obtenues par les puissances de l'inverse de la transformation donnée), convergent vers l'autre extrémité de AB. Nous déterminons une échelle quelconque $0 \leqq x \leqq 1$ sur l'arc PP^1, et nous la transportons par les puissances positives et négatives de la transformation sur les arcs $P^n\ P^{n+1}$; soit alors Q un point quelconque de l'arc PP^1, x la valeur lui correspondante; pour chaque $n=0, \pm 1, \pm 2,....$, nous ordonnons à Q^n la valeur $x^{(n)}=x+n$. Pour chaque valeur du paramètre t, nous définissons une transformation topologique de l'arc AB en soi-même de la façon suivante; soit Q un point quelconque de l'arc, soit x sa coordonnée; l'image de Q par la transformation S_t soit le point dont la coordonnée est égale à $x+t$. Les transformations S_t $(-\infty < t < +\infty)$ forment un groupe continu d'ordre un. En opérant de la même façon sur chacun des arcs déterminés par les points invariants de la transformation donnée, nous obtenons un groupe d'ordre un de transformations topologiques de la circonférence en elle-même; à la valeur $t=1$ du paramètre correspond la transformation donnée.

Si une transformation topologique de la circonférence en elle-même conservant le sens d'orientation n'admet aucun point invariant, il est possible que la transformation n'appartient à aucun groupe continu d'ordre un. Par exemple, si une puissance de la transformation admet un point invariant sans que cette puissance soit l'identité, la transformation ne peut pas appartenir à un groupe continu d'ordre un. De même, si aucune puissance de la transformation n'admet un point invariant, et les images successives d'un point forment un ensemble nullpart dense sur la circonférence. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation de la circonférence en elle-même conservant le sens d'orientation et n'ayant aucun point invariant appartienne à un groupe continu d'ordre un est que la transformation soit régulière en chaque point de la circonférence, c'est-à-dire que les puissances de la transformation forment une suite uniformément continue en tout point de la circonférence [1].

* * *

Considérons les transformations topologiques du plan conservant le sens d'orientation. Si une transformation admet un point invariant, il est facile à voir que la transformation ne doit pas appartenir à un groupe continu d'ordre un. Considérons par exemple la transformation T définie par les formules suivantes (r, φ coordonnées polaires, $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$)

$$r' = r^2, \qquad \begin{cases} \varphi' = \pi \left[\dfrac{\varphi}{\pi} + 1\right]^2, & \text{pour} \quad -\pi \leqq \varphi \leqq 0, \\ \varphi' = \pi \left[\left(\dfrac{\varphi}{\pi}\right)^2 - 1\right], & \text{pour} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi. \end{cases}$$

La transformation T a le seul point invariant A: $(r=0)$, son carré T^2 encore les deux autres points B: $(r=1, \varphi=0)$ et C: $(r=1, \varphi=\pi)$. Les points B et C sont échangés par la transformation T: $T(B)=C$, et $T(C)=B$. La transformation T n'admet aucune racine carrée. Supposons que S soit une transformation topologique du plan en soi-même tel que $S^2=T$. Désignons par A', B', C', les images des points A, B, C par la transformation S. On obtient alors les relations suivantes: $T(A)=S(A')=A$, $T(B)=S(B')=C$, $T(C)=S(C')=B$; de là $T(B')=C'$, et $T(C')=B'$; et encore $T(A')=A'$, $T^2(B')=B'$, $T^2(C')=C'$. Les points A', B', C' sont des points invariants de T^2, ils doivent être identiques avec les points A,

---

[1] Cf. KERÉKJÁRTÓ: *On a geometrical theory of continuous groups.* I. *Families of path-curves of continuous one-parameter groups of the plane*, Annals of Math., 27 (1925), pp. 105-117, surtout pp. 106-107; KERÉKJÁRTÓ: *Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen*, Acta litt. ac scient. (Szeged), 6 (1934), pp. 235-262, § 1, 4 (pp. 243-245).

B, C (sauf leur ordre). En tous cas A' est identique avec A. Si $S(B)=B$ et $S(C)=C$, ou bien $S(B)=C$ et $S(C)=B$, on a toutefois $T(B)=B$ et $T(C)=C$; c'est une contradiction. Il résulte que la transformation T n'admet pas de racine carrée, et par conséquent, elle ne peut pas appartenir à un groupe continu d'ordre un, parce que toute transformation d'un groupe continu d'ordre un possède une racine carrée ([2]).

* * *

Considérons maintenant une transformation topologique T du plan en soi-même conservant le sens d'orientation et n'ayant aucun point invariant.

J'introduis dans le plan une distance elliptique, par exemple de la façon suivante: je représente le plan sur une sphère par une projection stéréographique, et j'entends par la distance de deux points du plan la distance sphérique des points leur correspondants sur la sphère.

Désignons par P^n l'image du point P par la n-ième puissance T^n de la transformation T $(n=0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Je dis que la transformation T est *régulière* au point P, si pour chaque $\varepsilon>0$, il y a un $\delta>0$ tel que pour tout point Q dont la distance de P est inférieure à δ, et pour tout $n=0, \pm 1, \pm 2, ...$ les distances (elliptiques) (P^n, Q^n) sont inférieures à ε. Les points pour lesquels la condition de régularité n'est pas vérifiée, seront appelés des points *singuliers* de T.

Supposons que T appartient à un groupe continu G d'ordre un de transformations topologiques du plan en soi-même. J'entends par une *trajectoire* (passant par le point P) l'ensemble des images d'un point P par toutes les transformations du groupe G. Deux trajectoires quelconques n'ont pas de point commun.

Si P n'est pas invariant dans aucune transformation du groupe, excepté l'identité, la trajectoire par P est une ligne simple (image topologique de la droite infinie). Si P est invariant dans une transformation du groupe, sans être invariant dans toutes les transformations du groupe, la trajectoire passant par P est une courbe simple et fermée (courbe de Jordan) ([3]).

De la dernière proposition, on conclut immédiatement qu'aucune transformation du groupe G, excepté l'identité, ne peut admettre un point invariant. Autrement la trajectoire fermée, engendrée par un point invariant d'une transformation de G, serait transformée en elle-même par la transformation T; dans son intérieur, la transformation T aurait donc un point invariant d'après un théorème connu de M. Brouwer ([4]); c'est une contradiction de nos hypothèses sur T.

La famille des trajectoires est localement régulière en tout point du plan; cela veut dire qu'autour d'un point quelconque, on peut déterminer un « rectangle »

([2]) Voir, par exemple, E. Cartan, Mémorial des sciences math., 42, p. 10.

([3]) Pour les démonstrations de ces propositions voir par exemple mon mémoire cité, note ([1]), p. 106 et 107.

([4]) Voir, par exemple, B. v. Kerékjártó: *Vorlesungen über Topologie*, p. 191.

limité par deux arcs de trajectoires et deux arcs « transversales », et le transformer topologiquement en un rectangle métrique de telle façon que les arcs de trajectoires situés dans le rectangle curviligne soient transformés en des segments droits parallèles. (J'ai démontré cette propriété dans le mémoire cité, Annals of Math., 27, p. 108, en faisant usage d'un théorème démontré dans les *Vorlesungen über Topologie*, p. 249).

M. HAMBURGER a démontré que, étant donné une famille de lignes sur la sphère qui est partout régulière, à l'exception d'un seul point N, toutes les lignes de la famille sont des courbes simples et fermées passantes par le point N (5).

En projetant stéréographiquement la famille des trajectoires de G sur la sphère, on obtient donc une famille de courbes simples et fermées, dont chacune passe par le centre N de la projection.

On entend par une *ligne simple et ouverte* une image topologique d'une droite telle que, à toute suite de points sur la droite qui tend vers l'infini correspond une suite de points tendant vers l'infini sur la ligne. Une ligne simple et ouverte sera transformée par une projection stéréographique en une courbe simple et fermée passante par le centre N de la projection.

Nous avons obtenu le résultat suivant:

Si un groupe continu G d'ordre un de transformations topologiques du plan en soi-même contient une transformation T sans point invariant, toutes les trajectoires du groupe sont des lignes simples et ouvertes.

Je vais démontrer la proposition suivante:

Si P est un point singulier de la transformation T, tous les points de la trajectoire passant par P sont des points singuliers de T.

Soit, en effet, P_1 un point quelconque de la trajectoire, et soit T_1 la transformation de G qui transforme P en P_1. Comme la notion de point singulier sera conservée par une homéomorphie quelconque, le point $P_1 = T_1(P)$ sera un point singulier de la transformation $T_1^{-1}TT_1$; cette transformation est identique à T, parce que les transformations d'un groupe d'ordre un sont échangeables (6).

Le résultat que nous venons d'obtenir est énoncé dans le théorème suivant:

Si une transformation T sans point invariant appartient à un groupe continu d'ordre un de transformations topologiques du plan en soi-même, les points singuliers de T forment des lignes simples et ouvertes, sans points communs deux à deux.

* * *

Je vais construire une tranformation du plan dont les points singuliers ne jouissent pas de la propriété énoncée dans le théorème ci-dessus.

---

(5) Sitz.-ber. preuss. Akad. d. Wiss. Berlin, 21 (1922), pp. 258-262; voir aussi KERÉKJÁRTÓ: *Vorlesungen über Topologie*, p. 260.

(6) Voir, par exemple, CARTAN, Mémorial des sciences math., 42, p. 11.

Considérons d'abord la transformation t définie par les formules

$$x'=x+1-2y, \qquad y'=+y^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{pour } 0 \leqq y \leqq 1;$$

(voir fig. 1). Les points singuliers de cette transformation sont évidemment les points $y=0$, $y=1$, $-\infty<x<+\infty$.

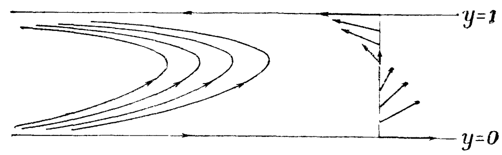

Fig. 1.

A l'aide de cette transformation t, je définis une transformation τ par les formules suivantes (voir fig. 2):

1) dans le domaine Δ déterminé par les lignes $y=1$, et $y=\frac{\sin^2 \pi x}{2}$, soit $\tau=s^{-1}ts$, où s signifie la transformation suivante de la bande $0 \leqq y \leqq 1$ sur le domaine Δ:

$$s: \quad y'=1+(y-1)\frac{1+\cos^2 \pi x}{2}, \qquad x'=x;$$

2) dans les domaines bornés, déterminés par les lignes $y=0$ et $y=\frac{\sin^2 \pi x}{2}$, soit τ: $x'=x+1$, $y'=y$;

3) pour les points $y>1$, soit τ: $x'=x-1$, $y'=y$;

4) pour les points $y<0$, j'étends la transformation par une symétrie par rapport à l'axe $y=0$.

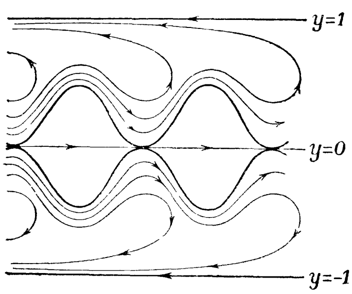

Fig. 2.

Les points singuliers de la transformation τ sont tous les points des lignes $y=\pm 1$, et $y=\pm\frac{\sin^2 \pi x}{2}$ et seulement ceux-ci. Ce sont quatre lignes simples et ouvertes; mais les deux lignes $y=\frac{\sin^2 \pi x}{2}$ et $y=-\frac{\sin^2 \pi x}{2}$ ont des points communs. Par conséquent, la condition du théorème ci-dessus n'est pas vérifiée, et alors *la transformation τ ne peut pas appartenir à un groupe continu d'ordre un* (7).

La transformation τ n'admet aucune racine carrée. Supposons le contraire, soit σ une transformation topologique du plan telle que $\sigma^2=\tau$. La transformation σ ne peut avoir aucun point invariant. L'ensemble des points singuliers de σ est identique à l'ensemble des points singuliers de τ. Il est d'abord évident que tout point singulier de τ est un point singulier de σ. D'autre part le raisonnement suivant nous montre que tout point régulier de τ est un point régulier de σ. Comme σ

(7) Les conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles une transformation topologique du plan peut être immergée en un groupe continu d'ordre un, seront traitées dans un autre travail.

est uniformément continue sur le plan elliptique, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il y a un $\varepsilon' > 0$ tel que pour deux points quelconques A et B dont la distance est inférieure à ε', les images $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont en distance $< \varepsilon$. Soit P un point régulier de τ; soit $\delta > 0$ déterminé de telle façon que pour tout point Q en distance $< \delta$ de P, et pour tout n, la distance des points $\tau^n(P)$ et $\tau^n(Q)$ soit inférieure à ε'. Donc pour chaque n, la distance des points $\sigma(\tau^n(P))$ et $\sigma(\tau^n(Q))$ est inférieure à ε, si Q est un point quelconque en distance $< \delta$ de P. Ensomme pour chaque point Q de cette sorte, et pour tout $k = 2n$ et $k = 2n + 1$, la distance des points $\sigma^k(P)$ et $\sigma^k(Q)$ est inférieure à ε; c'est-à-dire la transformation σ est régulière au point P.

L'ensemble des points singuliers de τ est formé par les lignes $y = \pm 1$, et $y = \pm \frac{1}{2} \sin^2 \pi x$. Étant cet ensemble l'ensemble des points singuliers de σ, il sera transformé par σ en soi-même; par conséquent, la couple des lignes $y = \pm \frac{1}{2} \sin^2 \pi x$ est invariant dans σ, de même l'ensemble des points $y = 0$, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nous désignons l'image du point $(x,y) = (n,0)$ par $(\sigma(n),0)$; pour tout $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\sigma(n)$ est un nombre entier. Le domaine borné déterminé par les arcs $y = \pm \frac{1}{2} \sin^2 \pi x$, $n \leqq x \leqq n+1$ sera transformé par σ dans le domaine déterminé par les arcs $y = \pm \frac{1}{2} \sin^2 \pi x$, $k \leqq x \leqq k+1$, où le nombre entier $k = \sigma(n)$ et $k+1 = \sigma(n+1)$, ou $k = \sigma(n+1)$ et $k+1 = \sigma(n)$. La différence $\sigma(n+1) - \sigma(n) = \pm 1$ a le même signe pour toute valeur de n.

Supposons d'abord $\sigma(n+1) = \sigma(n) + 1$, il résulte $\sigma(n) = \sigma(0) + n$, et alors $\tau(0) = \sigma(\sigma(0)) = 2\sigma(0)$; comme $\tau(0) = 1$ et $\sigma(0)$ est un nombre entier, c'est une contradiction. Supposons ensuite que $\sigma(n+1) = \sigma(n) - 1$; il résulte $\sigma(n) = \sigma(0) - n$, d'où $\tau(0) = \sigma(\sigma(0)) = 0$; comme $\tau(0) = 1$, c'est une contradiction.

De la sorte, nous avons démontré qu'il n'existe aucune transformation topologique du plan en soi-même dont le carré est la transformation τ.

* * *

Considérons *le groupe G des transformations topologiques du plan en soi-même conservant le sens d'orientation.* Le groupe G peut être considéré comme un *espace métrique*, en définissant une distance de la façon suivante. A chaque transformation S nous faisons correspondre la valeur $|S|$ définie comme la limite supérieure des distances elliptiques $(P, S(P))$ où $S(P)$ signifie l'image du point P variable sur le plan. Evidemment $|S| = |S^{-1}|$. Nous entendons par la distance des transformations S et T la valeur $(S, T) = |ST^{-1}|$. Evidemment $(S, T) = (T, S)$; $(S, T) = 0$ si $S = T$ et alors seulement; $(S, T) > 0$, si $S \neq T$. Enfin pour trois transformations quelconques S, T, R, on a la relation $(S, T) + (T, R) \geqq (S, R)$.

Le groupe G est continu. Désignons par I la transformation identique. Si (S, I) est inférieur à ε, aussi (S^{-1}, I) est inférieur à ε, car $(S, I) = |S| = (S^{-1}, I)$. Si $|S| < \varepsilon$ et $|T| < \varepsilon$, alors $|ST| < 2\varepsilon$; en effet $|ST| = (S, T^{-1}) \leqq (S, I) + (I, T^{-1}) = |S| + |T| < 2\varepsilon$. De là il résulte immédiatement que S^{-1} et ST varient continuement avec S et T. Ensuite *le groupe est d'un seul tenant*; pour deux transformations quelconques S et T il y a un ensemble (S_λ) de transformations du groupe dépendant continuement du paramètre λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ tel que $S_0 = S$ et $S_1 = T$. Ce que les transformations S_λ dépendent continuement du paramétre λ veut dire que la distance des transformations S_λ et $S_{\lambda'}$ est aussi petite que l'on veut, si $|\lambda - \lambda'|$ est suffissamment petit. Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème de deformation dû à M. TIETZE, que voici: soit S une transformation topologique du plan en soi-même conservant le sens d'orientation; il y a un ensemble (S_λ) de transformations topologiques du plan en soi-même dépendant continuement d'un paramètre λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, tel que l'identité I et la transformation S appartiennent à cet ensemble [8].

Le groupe G est séparable. Voici deux définitions de la séparabilité, équivalentes pour les espaces métriques [9]: 1) Il y a un sous-ensemble dénombrable M tel que tout élément de l'espace donné est la limite d'une suite d'éléments (distincts ou non) appartenant à M. 2) Il existe une famille dénombrable de sphéroïdes [10] dans l'espace donné telle que quelque soit l'élément S de l'espace, on puisse extraire de la famille une suite de sphéroïdes auxquelles S est intérieur et dont les rayons tendent vers 0.

De l'équivalence de ces deux définitions pour les espaces métriques, il résulte la proposition suivante: Soit D un espace métrique séparable et soit D_1 un sous-ensemble de D; il existe un sous-ensemble dénombrable M_1 de D_1 tel que tout élément de D_1 soit la limite d'une suite d'éléments (distincts ou non) appartenant à M_1.

Le groupe G est un sous-ensemble de l'ensemble E de toutes les transformations univoques et continues du plan elliptique en soi-même. En définissant des distances en E de la même façon que nous l'avons fait dans G, on voit que E est un espace métrique. La séparabilité de G est donc une conséquence de la séparabilité de E, d'après la proposition ci-dessus.

Or la séparabilité de E peut être établie de la façon suivante. Nous construisons sur le plan elliptique une suite de triangulations successives ξ_1, ξ_2,.... dont les sommets sont des points rationnels, composé chacune d'un nombre fini de triangles tels que les arêtes de ξ_n soient de longueur $< 1/n$. A chaque triangulation ξ_n nous

---

(8) Pour une démonstration de ce théorème voir KERÉKJÁRTÓ: *Vorlesungen über Topologie*, pp. 186-190, surtout pp. 189-190. La démonstration du théorème d'après lequel une transformation topologique d'une sphére en elle-même conservant le sens peut être déformée en l'identité prouve immédiatement qu'une transformation topologique de la sphère conservant le sens et laissant un point A invariant peut être deformée en l'identité en conservant le point invariant A.

(9) Voir M. FRÉCHET: *Les espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 188.

(10) On entend par une sphéroïde de centre P et de rayon r l'ensemble des éléments de l'espace dont la distance de P est inférieure à r.

faisons correspondre les transformations simpliciales (ou barycentriques) ([11]) qui transforment les sommets de ξ_n en des points rationnels. L'ensemble de ces transformations est dénombrable. Soit S une transformation univoque et continue du plan en soi-même. Pour chaque n, nous construisons une approximation simpliciale de S de la façon suivante: à chaque sommet A de la triangulation ξ_n nous faisons correspondre un point rationnel A' dont la distance de l'image $S(A)$ est inférieure à $1/n$; soit S_n la transformation simpliciale qui fait correspondre aux sommets A les points A'. Les distances (S, S_n) tendent vers 0 avec $1/n$.

Nous avons vu que *les transformations topologiques du plan en soi-même conservant le sens d'orientation forment un groupe G continu métrique et séparable.*

Le groupe G n'est pas localement compact. Un voisinage arbitrairement petit de l'identité contient un sous-groupe continu d'ordre un. Il y a des sous-groupes d'ordre un dont l'ensemble a la puissance du continu tels que les produits des transformations prises de ces sous-groupes n'épuisent pas un voisinage de l'identité. Ces propositions résultent immédiatement, en considérant les groupes continus d'ordre un définis par les formules:

$$y'=y; \qquad \frac{x'-na}{x'-(n+1)a}=\lambda\frac{x-na}{x-(n+1)a}, \qquad na<x<(n+1)a; \qquad n=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$$

où λ est le paramètre du groupe et a est un nombre réel quelconque.

Dans un voisinage arbitrairement petit de l'identité il y a deux transformations dont les carrés sont identiques. Soit par exemple S^2 une translation arbitrairement petite, définie par les formules $x'=x+2\varepsilon$, $y'=y$. Soit S la translation définie par les formules $x'=x+\varepsilon$, $y'=y$; et soit T la transformation: $x'=x+\varepsilon$; $y'=y+\varepsilon\sin\frac{\pi}{\varepsilon}x$. On voit que $T^2=S^2$.

Il y a un voisinage de l'identité qui ne contient aucune transformation involutive. Toute transformation involutive du plan conservant le sens est homéomorphe d'une rotation d'angle π; il y a alors deux points en distance 1 qui se correspondent.

Il y a, par conséquent, un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe continu et fermé d'ordre un.

Les exemples ci-dessus montrent enfin que dans un voisinage quelconque de l'identité, il y a des transformations qui n'admettent pas de racine carrée et qui n'appartiennent donc à aucun sous-groupe continu d'ordre un du groupe G.

([11]) Voir L. E. J. BROUWER: *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathem. Annalen, 71 (1911), pp. 97-115.