ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GUIDO ASCOLI

Sopra un nuovo algoritmo per la rappresentazione delle funzioni di variabile reale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 3-4 (1934), p. 243-253

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_3-4_243_0>

SOPRA UN NUOVO ALGORITMO PER LA RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI VARIABILE REALE

di GUIDO ASCOLI (Pisa).

§ 1. - Introduzione.

1. - L'algoritmo accennato nel titolo della presente Memoria, applicabile ad ogni funzione $f(x)$ definita in un intervallo $a \vdash\!\dashv b$ e ivi limitata, può definirsi nel modo seguente.

Si dica $\bar{f}(x)$, per ogni x dell'intervallo, il limite superiore di $f(\xi)$ in $a \vdash\!\dashv x$; la $\bar{f}(x)$ sarà finita, mai decrescente e sarà inoltre

$$\bar{f}(x) \geqslant f(x), \qquad \bar{f}(a) = f(a).$$

Con locuzione opportuna, la $\bar{f}(x)$ potrà dirsi la *minima maggiorante crescente* (in senso esteso) di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$.

Si ponga allora

$$f_1(x) = \bar{f}(x) - f(x);$$

la $f_1(x)$ sarà positiva o nulla, e sarà $f_1(x) = 0$. Su di essa potremo operare come sulla $f(x)$, considerando cioè la sua minima maggiorante crescente $\bar{f}_1(x)$ e la differenza

$$f_2(x) = \bar{f}_1(x) - f_1(x);$$

e così potrà seguitarsi indefinitamente, ottenendo una successione di funzioni $f_n(x)$ non negative, nulle per $x = a$, con la legge di formazione

$$f_{r+1}(x) = \bar{f}_r(x) - f_r(x). \tag{1}$$

Si ricava allora, per successive sostituzioni, la formula

$$f(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x) - \ldots + (-1)^{n-1}\bar{f}_{n-1}(x) + (-1)^n f_n(x);$$

e questa conduce a domandarsi per quali funzioni $f(x)$ avverrà che per ogni x nell'intervallo sia

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0, \tag{2}$$

nel qual caso varrà il notevole sviluppo

$$f(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x) - \ldots + (-1)^{n-1}\bar{f}_{n-1}(x) + (-1)^n \bar{f}_n(x) + \ldots \tag{3}$$

Alla risposta si è guidati dalle seguenti osservazioni. Per costruzione, le $\bar{f}_n(x)$ sono funzioni non negative, non decrescenti; inoltre, come si vedrà tra poco, è

$$\bar{f}_{n+1}(x) \leq \bar{f}_n(x).$$

Ne segue che lo sviluppo (3) è, nell'ipotesi (2), uniformemente convergente; infatti per il resto R_n dopo n termini si ha

$$|R_n| \leq \bar{f}_n(x) \leq \bar{f}_n(b)$$

che per la supposta convergenza (anche per $x=b$) tende a zero con $1/n$. E poichè allora, a destra e a sinistra di ogni punto x_0 dell'intervallo, i termini della serie, come funzioni monotone, hanno limiti determinati e finiti, lo stesso avverrà per la somma $f(x)$, cioè $f(x)$ avrà al più discontinuità ordinarie.

Primo intento della Memoria sarà quello di invertire il precedente risultato, dimostrando, insomma, il teorema:

A). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè lo sviluppo* (3) *di una funzione $f(x)$ limitata in $a \vdash\!\dashv b$ per successive minime maggioranti crescenti sia valido in tutto l'intervallo* (*anzi, perchè la serie del secondo membro vi converga*) *è che la $f(x)$ abbia al più discontinuità ordinarie.*

Un secondo risultato, che potremo sin d'ora ritenere dimostrato, è il seguente:

B). *Se lo sviluppo è valido, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la $f(x)$ sia continua in un punto x_0 è che siano continui in x_0 tutti i termini dello sviluppo.*

Si vede infatti subito che se $f(x)$ è continua in x_0, tale è anche $\bar{f}(x)$, quindi $f_1(x)$, quindi $\bar{f}_1(x)$, e così via. Viceversa, se la $\bar{f}(x)$ e le $\bar{f}_r(x)$ sono continue in x_0, tale è anche la $f(x)$ per la convergenza uniforme della serie in questione.

Un terzo risultato si collega al caso in cui lo sviluppo (3) risulta assolutamente convergente. Raccogliendo allora insieme i termini positivi e i negativi si ottiene $f(x)$ come differenza di due funzioni non decrescenti; essa è dunque a variazione limitata. Ora, la cosa è invertibile e ammette anche un notevole complemento, dando luogo al teorema seguente:

C). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè lo sviluppo* (3) *sia assolutamente convergente è che la $f(x)$ sia in $a \vdash\!\dashv b$ a variazione limitata. In tale ipotesi si ha poi:*

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{f}(x) + \bar{f}_2(x) + \bar{f}_4(x) + \dots &= f(a) + Pf(x) \\ \bar{f}_1(x) + \bar{f}_3(x) + \bar{f}_5(x) + \dots &= Nf(x) \end{aligned} \right. \tag{4}$$

dove $Pf(x)$ e $Nf(x)$ sono le variazioni, positiva e negativa, di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv x$. In altre parole, *associando nello sviluppo i termini di posto dispari e quelli di posto pari si ottiene la $f(x)$ nella forma canonica di Jordan.*

L'ultima circostanza permette di considerare la (3) come un'estensione della decomposizione di Jordan, valida per tutte le funzioni con sole discontinuità ordinarie, anche se non a variazione limitata.

§ 2. - Prime proprietà delle f_n, $\bar{f}_n$.

2. - È chiaro anzitutto che:

a) Se $f(x) \geqslant g(x)$ *sarà* $\bar{f}(x) \geqslant \bar{g}(x)$.

Ne segue subito:

b) È sempre $\bar{f}_{n+1}(x) \leqslant \bar{f}_n(x)$.

Si ha infatti $f_{n+1}(x) \leqslant \bar{f}_n(x)$, da cui, applicando il teorema *a*) e notando che la minima maggiorante crescente di $\bar{f}_n(x)$ è la $\bar{f}_n(x)$ stessa, si ottiene la tesi.

c) È sempre $f_{n+2}(x) \leqslant f_n(x)$.

Difatti $f_{n+2}(x) = \bar{f}_{n+1}(x) - f_{n+1}(x) = [\bar{f}_{n+1}(x) - \bar{f}_n(x)] + f_n(x)$ donde, per *b*), la tesi.

Da queste proposizioni segue che le successioni $\bar{f}_n(x)$, $f_{2n}(x)$, $f_{2n+1}(x)$ non crescono mai, ed essendo i loro elementi non negativi concludiamo che esse tendono a tre funzioni determinate, non negative. Il teorema *A*) sarà dimostrato ove sia provato che esse sono identicamente nulle se $f(x)$ ha solo discontinuità ordinarie. Ciò faremo nei paragrafi seguenti, prima per le funzioni continue e poi nel caso generale.

§ 3. - Il teorema *A*) per le funzioni continue.

3. - Premettiamo il seguente

Lemma. - *Se le funzioni* $\varphi_n(x)$, *continue (o anche solo superiormente semicontinue) in* $a \vdash\!\dashv b$ *tendono senza mai crescere alla funzione (superiormente semicontinua)* $\Phi(x)$, *il massimo di* $\varphi_n(x)$ *tenderà al massimo di* $\Phi(x)$.

Sia l_n il massimo di $\varphi_n(x)$ nell'intervallo sicchè sia sempre $\varphi_n(x) \leqslant l_n$. Ne seguirà, essendo $\Phi(x) \leqslant \varphi_n(x)$,

$$l_n \geqslant \Phi(x).$$

Poichè inoltre da $\varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x)$ segue $l_n \geqslant l_{n+1}$, si vede che gli l_n hanno un limite finito λ, ed è

$$\Phi(x) \leqslant \lambda \leqslant l_n. \qquad (a)$$

Consideriamo ora l'insieme I_n dei punti di $a \vdash\!\dashv b$ per i quali è $\varphi_n(x) \geqslant \lambda$; esso esiste perchè tra i valori di $\varphi_n(x)$ si trova $l_n \geqslant \lambda$; ed è chiuso, poichè $\varphi_n(x)$ è superiormente semicontinua. Poichè chiaramente I_n contiene I_{n+1}, esiste almeno un punto ξ comune a tutti gli I_n, tale cioè che si ha per ogni n

$$\varphi_n(\xi) \geqslant \lambda.$$

e quindi

$$\Phi(\xi) \geqslant \lambda. \qquad (b)$$

Da (*a*), (*b*) segue

$$\Phi(\xi) = \lambda$$

e da (a) si ricava allora che λ, limite dei massimi l_n, è il massimo di $\Phi(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$, c. d. d. [1].

Con le notazioni del n.° 1 il lemma dimostrato può enunciarsi nella relazione

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_n(x) = \overline{\Phi}(x)$$

che si ottiene applicando il teorema stesso ad una parte qualunque $a \vdash\!\dashv x$ di $a \vdash\!\dashv b$.

4. - Sia ora $f(x)$ continua in $a \vdash\!\dashv b$; come si è già osservato, riescono allora continue tutte le $f_n(x)$ e $\overline{f}_n(x)$ da essa dedotte col procedimento del n.° 1, e le successioni $f_{2n-1}(x)$, $f_{2n}(x)$, $\overline{f}_n(x)$ tendono, senza mai crescere, a tre funzioni non negative, superiormente semicontinue. Sia per esempio

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n-1}(x) = \varphi(x)\,;$$

verificandosi le condizioni del lemma sarà, con i soliti simboli,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_{2n-1}(x) = \overline{\varphi}(x),$$

e sottraendo

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n}(x) = \varphi_1(x),$$

da cui, ancora per il lemma,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_{2n}(x) = \overline{\varphi}_1(x).$$

Ma le successioni $\overline{f}_{2n-1}(x)$, $\overline{f}_{2n}(x)$ hanno un unico limite, che è quello delle $\overline{f}_n(x)$; deve dunque essere

$$\overline{\varphi}_1(x) = \varphi(x). \tag{5}$$

Dimostreremo ora che dalla (5) e dal fatto che le $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ sono superiormente semicontinue segue identicamente

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi_1(x) = 0$$

e quindi la voluta relazione (2), per il caso in esame.

Sia infatti in qualche punto $\varphi(x) > 0$, sicchè il massimo di $\varphi(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$ sia positivo. L'insieme dei punti ove $\varphi(x)$ assume questo valore massimo è chiuso, quindi esiste in esso un primo punto ξ, che non è a; per esso si ha dunque

$$\overline{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi), \qquad \varphi_1(\xi) = 0$$

mentre per $a \leqslant x < \xi$ è $\varphi(x) < \varphi(\xi)$ e quindi $\overline{\varphi}(x) < \varphi(\xi)$.

---

[1] Questo teorema dà, per $\Phi(x) = 0$, il corollario: *Se le funzioni $\varphi_n(x)$, superiormente semicontinue in $a \vdash\!\dashv b$, tendono a zero senza mai crescere, la convergenza è uniforme.* Applicando questo a funzioni della forma $f_n(x) - f(x)$, ove f, f_n siano continue, si ottiene un classico teorema di DINI; e per f_n superiormente semicontinua, f continua, una sua facile estensione. Cfr. CARATHÉODORY: *Reelle Funktionen.* (Leipzig, 1918), pag. 176, Satz 4.

Si ha ora $\varphi_1(x) = \overline{\varphi}(x) - \varphi(x) \leqq \overline{\varphi}(x)$, sicchè per $a \leqq x < \xi$ è $\varphi_1(x) < \overline{\varphi}(\xi)$. Per $x = \xi$ è invece $\varphi_1(x) = 0$, dunque il massimo di $\varphi_1(x)$ in $a \vdash\!\dashv \xi$, cioè $\overline{\varphi}_1(\xi)$ è minore di $\overline{\varphi}(\xi)$. Ciò è contro la (5) e dimostra che è effettivamente, in ogni punto dell'intervallo, $\varphi(x) = 0$. Ne segue $\overline{\varphi}(x) = 0$, $\varphi_1(x) = 0$, e il teorema è dimostrato.

§ 4. - Il teorema A) nel caso generale.

5. - Ci occuperemo ora del caso in cui $f(x)$ possegga al più discontinuità ordinarie, o, come diremo brevemente, sia una *funzione* (S). Una tale funzione è limitata in $a \vdash\!\dashv b$ perchè è limitata nell'intorno di ogni suo punto, e si dimostra anche facilmente che l'insieme dei suoi punti di discontinuità è finito o numerabile [2].

Se la $f(x)$ è funzione (S), tale essendo in ogni caso la $\overline{f}(x)$, anche la $f_1(x)$ è funzione (S), e così la $f_2(x)$, $f_3(x)$,...., $f_n(x)$,.... Ed esse avranno al più gli stessi punti di discontinuità della $f(x)$, perchè si è visto che ove $f(x)$ è continua tale è anche $\overline{f}(x)$.

6. - Ricondurremo il caso generale delle funzioni (S) a quello delle funzioni continue mediante un procedimento che, potendo servire in molte questioni analoghe, ci sembra degno di nota.

Dato in un intervallo $a \vdash\!\dashv b$ un insieme finito o numerabile di punti, c_1, c_2,...., c_n,.... è possibile in infiniti modi costruire una funzione

$$X = X(x)$$

definita in $a \vdash\!\dashv b$, crescente, continua in ogni punto diverso dai c_i e avente in ciascuno dei c_i, a destra e a sinistra, una discontinuità di prima specie. Basta infatti fissare i salti, positivi e di somma finita, e aggiungere ad una funzione continua e crescente in $a \vdash\!\dashv b$ la così detta *funzione dei salti* [3]. Per fissar le idee, assumeremo in c_i salti eguali a ε_i, con $\sum \varepsilon_i$ finita, e porremo

$$(6) \qquad \begin{cases} X = x + 2 \sum\limits_{c_i < x} \varepsilon_i & \text{per } x \text{ diverso dai } c_i \\ X = c_n + 2 \sum\limits_{c_i < c_n} \varepsilon_i + \varepsilon_n = C_n & \text{per } x = c_n ; \end{cases}$$

la verifica è del resto assai facile.

([2]) Cfr. TONELLI (L.): *Discontinuità di 1ª specie e gruppi di punti.* (Rend. Istit. Lombardo, IIª, XLI, 1908), pag. 773.

([3]) LEBESGUE (H.): *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* (Paris, 1904), pag. 58.

Mediante le (6) l'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ viene rappresentato su un certo intervallo $A \vdash\!\dashv B$ da cui siano esclusi certi intorni destri e sinistri dei C_n, e cioè gli intervalli semiaperti $C_n - \varepsilon_n \vdash C_n$ che diremo I_n' e $C_n \dashv C_n + \varepsilon_n$ che diremo I_n''; uno solo di essi dovrà essere considerato se c_n coincida con a o con b.

Ciò posto, essendo data in $a \vdash\!\dashv b$ una funzione (S), $f(x)$, avente le sue discontinuità nei punti c_n, la trasformazione (6) la muterà in una funzione di X, $F(X)$, definita nella detta parte di $A \vdash\!\dashv B$, e cioè fuori degli intervalli I_n, I_n'. La $F(X)$ è continua in ogni punto del suo campo di esistenza salvo nei punti C_n che vi compariscono ormai come punti isolati; e al tendere di X a $C_n - \varepsilon_n$, a sinistra, o a $C_n + \varepsilon_n$, a destra, essa tende ai limiti determinati $f(c_n - 0)$, $f(c_n + 0)$. Se perciò si pone

$$F(C_n - \varepsilon_n) = f(c_n - 0), \qquad F(C_n + \varepsilon_n) = f(c_n + 0) \tag{7}$$

e si collegano i valori assegnati agli estremi degli I_n', I_n'' mediante arbitrarie funzioni continue e monotone (per esempio lineari), la $F(X)$ potrà ritenersi definita e continua in tutto $A \vdash\!\dashv B$.

Si vede allora subito che il massimo dei valori di $F(X)$ in un intervallo $P \vdash\!\dashv Q$, dove P e Q corrispondono ai punti p e q di $a \vdash\!\dashv b$, è eguale al limite superiore di $f(x)$ in $p \vdash\!\dashv q$; infatti i valori di $F(x)$ in $P \vdash\!\dashv Q$ hanno la forma $f(x)$, o $f(x \pm 0)$, variando x in $p \vdash\!\dashv q$, o sono intermedi tra questi. In particolare, dunque, sarà per ogni coppia di punti corrispondenti x, X

$$\overline{F}(X) = \overline{f}(x),$$

e quindi, per gli stessi valori

$$F_1(X) = f_1(x).$$

Ma vediamo di più che $F_1(X)$ risulta dedotta da $f_1(x)$ come $F(X)$ di $f(x)$. Intanto, con un passaggio al limite per $x \to c_n \pm 0$ si ha

$$\overline{F}(C_n \pm \varepsilon_n) = \overline{f}(c_n \pm 0), \qquad F_1(C_n \pm \varepsilon_n) = f_1(c_n \pm 0)$$

che corrispondono alle (7), e basterà ora vedere che negli I_n', I_n'' la $F_1(X)$ risulta continua e monotona. La continuità è evidente; si osservi poi, riferendosi ad esempio all'intervallo I_n', che essendo

$$F(C_n - \varepsilon_n) = f(c_n - 0), \qquad F(C_n) = f(c_n), \qquad \overline{F}(C_n - \varepsilon_n) = \overline{f}(c_n - 0)$$

possono presentarsi solo i seguenti casi:

a) $\overline{F}(C_n - \varepsilon_n) \geqslant F(C_n - \varepsilon_n) \geqslant F(C_n)$;

b) $\overline{F}(C_n - \varepsilon_n) \geqslant F(C_n) \geqslant F(C_n - \varepsilon_n)$;

c) $F(C_n) \geqslant \overline{F}(C_n - \varepsilon_n) \geqslant F(C_n - \varepsilon_n)$.

Nel caso *a*) $F(X)$ è non crescente in I_n, $\overline{F}(X)$ costante, quindi $F_1(X)$ non decrescente. Nel caso *b*) $F(X)$ è non decrescente, $\overline{F}(X)$ costante, quindi $F_1(X)$ non crescente. Nel caso *c*), infine, $F(X)$ è non decrescente, $\overline{F}(X)$ è prima costante, poi eguale a $F(X)$, sicchè $F_1(X)$ è prima non crescente e poi nulla. In tutti i casi è dimostrato l'asserto.

Dopo ciò è chiaro che alla $F_1(X)$ si potranno applicare le considerazioni svolte per la $f(x)$ e concludere, in generale, che per ogni punto X fuori degli I_n', I_n'' si ha

$$F_m(X) = f_m(x),$$

mentre negli I_n, I_n' la $F_m(X)$ è continua e monotona. E avendosi allora per la funzione continua $F(X)$ (n.° 4)

$$\lim_{n \to \infty} F_n(X) = 0$$

sarà anche, per ogni x in $a \vdash\!\dashv b$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$$

Il teorema A) è così completamente dimostrato.

§ 5. - Il teorema C) per le funzioni continue.

7. - Se la $f(x)$ è continua, si può fare sulla struttura della $\bar{f}(x)$ la seguente osservazione. Esistono certamente nell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ punti in cui è $\bar{f}(x) = f(x)$ (almeno il punto a, o un punto in cui $f(x)$ assume il valore massimo), ed essi formano un insieme chiuso I perchè $\bar{f}(x) - f(x)$ è continua. Aggreghiamo ad esso anche il punto b, e consideriamo l'insieme, finito o numerabile, degli intervalli i_1, i_2,.... contigui ad I. In uno qualunque $p \frown q$ di questi intervalli la $\bar{f}(x)$ è costante; se vi fosse infatti un punto ξ interno a $p \frown q$ in cui fosse $\bar{f}(\xi) > \bar{f}(p)$, cioè se il massimo di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv \xi$ superasse quello in $a \vdash\!\dashv p$, sarebbe $\bar{f}(\xi)$ il massimo di $f(x)$ in $p \vdash\!\dashv \xi$ e quindi esisterebbe in questo intervallo uno $\xi' > p$ tale che $f(\xi') = \bar{f}(\xi)$, e quindi anche $\bar{f}(\xi') = \bar{f}(\xi)$. Ma allora $\bar{f}(\xi') = f(\xi')$, cioè ξ' apparterrebbe ad I, contro l'ipotesi che tra p e q non vi siano punti di I.

8. - Supporremo ora che $f(x)$ sia anche a variazione limitata; tali saranno ancora, oltre la $\bar{f}(x)$ e le $\bar{f}_n(x)$, anche le $f_n(x)$. Con i simboli P, N premessi a una qualunque di queste funzioni indicheremo in seguito la variazione positiva e la variazione negativa della funzione nell'intervallo $a \vdash\!\dashv x$; e per brevità scriveremo semplicemente Pf, Nf e simili quando ci si riferisca all'intervallo intero, cioè a $x = b$. S'intende però che ogni risultato ottenuto per $a \vdash\!\dashv b$ è senz'altro applicabile ad ogni intervallo parziale $a \vdash\!\dashv x$.

Ciò posto vogliamo dimostrare le relazioni

$$Pf_1 = Nf, \qquad Nf_1 = Pf - P\bar{f} \tag{8}$$

le quali, tenuto conto che $N\bar{f} = 0$, poichè $\bar{f}$ non è mai decrescente, possono enunciarsi: *la variazione positiva (o negativa) di $f_1(x)$ è la differenza tra le variazioni negative (o positive) di $f(x)$ e $\bar{f}(x)$.*

Cominciamo per questo a valutare Pf_1 e Nf_1. In ciascuno degli intervalli i_n considerati nel numero precedente la $f_1(x)$ ha la forma $c_n - f(x)$, con c_n costante, sicchè la variazione positiva di $f_1(x)$ in i_n coinciderà con la variazione negativa di $f(x)$ in i_n, che indicheremo con ν_n. Sarà perciò

$$(a) \qquad Pf_1 \geqslant \sum \nu_n.$$

D'altra parte, consideriamo una qualunque divisione dell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ in un numero finito di parti; tra gli i_n ve ne sarà un numero finito che contengono punti di divisione, e siano essi, per esempio $i_1, i_2, \ldots i_s$; inseriamo allora nella divisione gli estremi di questi intervalli. La variazione positiva di $f(x)$ relativa alla divisione (somma degli incrementi positivi) non diminuisce certo per questa inserzione; essa è ora formata dei termini relativi a $i_1, i_2, \ldots i_s$, non superiori alle relative variazioni, già dimostrate eguali a $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_s$, e da termini nulli perchè gli estremi degli i_n e quei punti di divisione che non appartengono a nessun i_n sono punti di I e in essi è quindi $f_1(x) = 0$. Ne concludiamo che la variazione positiva relativa alla data divisione è $\leqslant \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s \leqslant \sum \nu_n$; ed è per conseguenza

$$(b) \qquad Pf_1 \leqslant \sum \nu_n.$$

Da (a), (b) segue

$$(9) \qquad Pf_1 = \sum \nu_n.$$

In modo analogo si proverà che

$$(10) \qquad Nf_1 = \sum \pi_n$$

essendo π_n la variazione positiva di $f(x)$ in i_n.

Passando ora alla $\bar{f}(x)$ si osservi che ogni suo incremento non supera la corrispondente variazione positiva della $f(x)$. Chè infatti, dato un intervallo $p \vdash\!\dashv q$, ove non sia $\bar{f}(p) = \bar{f}(q)$, caso evidente, la differenza $\bar{f}(q) - \bar{f}(p)$ è al massimo eguale a $f(\xi) - f(p)$ dove ξ è un punto di $p \vdash\!\dashv q$ in cui x assuma il valore massimo $\bar{f}(q)$. Se allora si considerano gli intervalli $i_1, i_2, \ldots i_n$ e le parti residue dell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$, e a ciascuna di queste si applica l'osservazione precedente, sommando si trova

$$P\bar{f} \leqslant Pf - (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n)$$

poichè negli i_r la variazione di $\bar{f}$ è nulla. Di qui, al limite per $n \to \infty$, tenuto conto della (10)

$$(c) \qquad P\bar{f} \leqslant Pf - \sum \pi_r, \qquad Pf \geqslant P\bar{f} + Nf_1.$$

D'altra parte, poichè la variazione della somma non supera la somma delle variazioni, da $f = \bar{f} - f_1$ otteniamo

$$(d) \qquad Pf \leqslant P\bar{f} + Nf_1.$$

Da (*c*), (*d*) segue finalmente

$$Pf = P\bar{f} + Nf_1$$

cioè la seconda delle (8).

In modo analogo, ma più semplicemente, si ha la prima. Si ha per il significato stesso delle ν_r, e per la (9),

$$Nf \geqslant \sum \nu_r, \qquad Nf \geqslant Pf_1$$

e d'altra parte, da $f = \bar{f} - f_1$, prendendo le variazioni negative e ricordando che $N\bar{f}$ è nulla,

$$Nf \leqslant Pf_1 .$$

Dal confronto segue la tesi.

9. - Se nei risultati precedenti si sostituisce a b un punto qualunque x dell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$, si ha

$$Pf_1(x) = Nf(x), \qquad Nf_1(x) = Pf(x) - P\bar{f}(x)$$

e applicando a $f_n(x)$

$$Pf_{n+1}(x) = Nf_n(x), \qquad Nf_{n+1}(x) = Pf_n(x) - P\bar{f}_n(x).$$

Da ciò segue che nella successione

$$Pf(x), \quad Pf_1(x), \ldots, \quad Pf_n(x), \quad Pf_{n+1}(x), \ldots$$

due termini consecutivi sono sempre variazione positiva e negativa di una medesima funzione ($f(x)$ o $f_r(x)$). Si vede poi anche che dal secondo termine in poi essa non è mai crescente, perchè si ha

$$Pf_n(x) - Pf_{n+1}(x) = Pf_n(x) - Nf_n(x) = f_n(x) - f_n(a) = f_n(x) \geqslant 0.$$

E si ha infine di qui

$$\left\{ \begin{aligned} & Pf_n(x) - Pf_{n+2}(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) = \bar{f}_n(x) \\ & Pf(x) - Pf_2(x) = [Pf(x) - Pf_1(x)] + [Pf_1(x) - Pf_2(x)] = \\ & \qquad = f(x) - f(a) + f_1(x) = \bar{f}(x) - f(a). \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Dalle (11) risulta ora, sommando opportunamente,

$$\begin{aligned} Pf(x) - Pf_{2n}(x) &= \bar{f}(x) - f(a) + \bar{f}_2(x) + \bar{f}_4(x) + \ldots + \bar{f}_{2n-2}(x) \\ Pf_1(x) - Pf_{2n+1}(x) &= \bar{f}_1(x) + \bar{f}_3(x) + \bar{f}_5(x) + \ldots + \bar{f}_{2n-1}(x) \, ; \end{aligned}$$

se dimostreremo quindi che è

$$\lim_{n \to \infty} Pf_n(x) = 0 \tag{12}$$

il teorema *C*) potrà dirsi dimostrato, almeno per le $f(x)$ continue. Passeremo ora a dimostrare la (12); si osservi però intanto che il limite in questione esiste, giacchè le $Pf_n(x)$ non crescono mai e sono non negative, ed è una funzione $\omega(x)$, anch'essa certamente non negativa e non decrescente, nulla per $x=a$.

10. - Occorre qui richiamare una proposizione, da me data in altro lavoro, in corso di stampa nel *Bollettino dell' Un. Mat. Italiana,* con cui si assegna una proprietà caratteristica di due funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$, mai decrescenti in un intervallo $a \vdash\!\dashv b$, le quali siano variazione positiva e variazione negativa di una stessa funzione a variazione limitata in $a \vdash\!\dashv b$. La proprietà è la seguente: *preso un* $\varepsilon>0$ *arbitrario, si può dividere l'intervallo in un numero finito di intervalli parziali in modo che, detti* $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ *gli incrementi di* $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ *in uno qualunque di questi,* e $\min(\Delta\alpha, \Delta\beta)$ *il minore tra* $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$, *sia*

$$\sum \min(\Delta\alpha, \Delta\beta) < \varepsilon \quad [4].$$

Applicheremo questo teorema alla funzione $f_1(x)$; preso dunque un $\varepsilon>0$ arbitrario, per una conveniente divisione dell'intervallo sarà

$$\sum \min(\Delta Pf_1, \Delta Pf_2) < \varepsilon. \tag{13}$$

Ora noi diciamo che è sempre

$$\Delta Pf_{n+2} \leqslant \Delta Pf_n;$$

si ha infatti dalle (11)

$$\Delta Pf_n - \Delta Pf_{n+2} = \Delta \bar{f}_n \geqslant 0.$$

Ne segue che insieme alla (13) vale più generalmente l'altra

$$\sum \min(\Delta Pf_{2n-1}, \Delta Pf_{2n}) < \varepsilon$$

e al limite per $n \to \infty$

$$\sum \min(\Delta\omega, \Delta\omega) < \varepsilon$$

cioè

$$\sum \Delta\omega < \varepsilon, \qquad \omega(b) - \omega(a) < \varepsilon,$$

donde, per essere $\omega(a)=0$ e per l'arbitrarietà di ε, segue

$$\omega(b)=0$$

e quindi $\omega(x)$ identicamente nulla, c. d. d.

§ 6. - Il teorema *C*) nel caso generale.

11. - Il procedimento che ci ha servito ad estendere il teorema *A*) alle funzioni con sole discontinuità ordinarie, o funzioni (*S*), si presta ottimamente anche nel

[4] Nella Nota in questione (*Sulle funzioni a variazione limitata*) ho dato anche per le stesse funzioni un'altra proprietà caratteristica, espressa mediante un integrale di HELLINGER. Anch'essa potrebbe qui servire allo scopo.

caso attuale. Riprendiamo perciò senz'altro le notazioni del § 4 e dimostriamo che *la variazione totale* VF *di* $F(X)$ *in* $A \vdash\!\dashv B$ *è eguale alla variazione totale* Vf *di* $f(x)$ *in* $a \vdash\!\dashv b$.

Si consideri infatti una divisione arbitraria di $a \vdash\!\dashv b$ in un numero finito di parti, e la corrispondente divisione di $A \vdash\!\dashv B$; è chiaro che le somme dei valori assoluti degli incrementi per le due divisioni sono formate degli stessi termini, quindi coincidono. Ne segue che VF è almeno eguale a Vf:

$$VF \geqslant Vf. \tag{a}$$

D'altra parte, si prenda una divisione arbitraria di $A \vdash\!\dashv B$, per la quale, in generale, si dovrà ammettere che vi compariscano anche punti degli I_n' I_n''. La relativa $\sum |\Delta F|$ non diminuirà se si inseriscono nella divisione gli estremi di questi intervalli; nè muterà poi se si sopprimono i punti interni agli intervalli medesimi, perchè negli I_n' e I_n'' la $F(X)$ è monotona. Giungiamo così a una divisione formata di punti X_i corrispondenti a certi punti x_i di $a \vdash\!\dashv b$, e di punti della forma $C_n + \varepsilon_n$ o $C_n - \varepsilon_n$. Ora questa divisione si può considerare come il limite di una divisione formata con soli punti del tipo X_i (basta approssimare ogni c_n con una opportuna successione, a destra o a sinistra, e prendere poi i corrispondenti in $A \vdash\!\dashv B$) e poichè per questa divisione la $\sum |\Delta F|$ coincide con la corrispondente $\sum |\Delta f|$ e non supera quindi la Vf, si conclude senz'altro che la variazione VF non può superare la Vf:

$$VF \leqslant Vf. \tag{b}$$

Da (*a*), (*b*), segue la tesi:

$$VF = Vf.$$

Se ora ricordiamo le relazioni tra una funzione e le sue variazioni, positiva, negativa e totale

$$Pf + Nf = Vf, \qquad Pf - Nf = f(b) - f(a)$$

con le analoghe per la $F(X)$, possiamo concludere che sono anche eguali per la $f(x)$ ed $F(X)$ le variazioni positive e negative; e sostituendo a b e B due qualunque valori corrispondenti abbiamo

$$PF(X) = Pf(x), \qquad NF(X) = Nf(x).$$

Dopo ciò, valendo per la funzione continua e a variazione limitata $F(X)$ le formule

$$\overline{F}(X) + \overline{F}_2(X) + \overline{F}_4(X) + \dots = F(A) + PF(X)$$
$$\overline{F}_1(X) + \overline{F}_3(X) + \overline{F}_5(X) + \dots = NF(X),$$

basterà supporre preso per X il corrispondente di un qualunque valore x di $a \vdash\!\dashv b$ per ottenere le analoghe formule per la $f(x)$. Il teorema C) risulta così completamente dimostrato.