ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Sulle proprietà delle estremanti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 2 (1934), p. 213-237
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_2_213_0>

SULLE PROPRIETÀ DELLE ESTREMANTI

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Questa Memoria è dedicata allo studio di quelle proprietà delle curve piane $y=y_0(x)$, estremanti l'integrale

$$(1) \qquad \int_a^b f(x, y, y')dx,$$

che si riferiscono alla derivabilità della $y_0(x)$ ed alla equazione di EULERO.

È noto (¹) che tali proprietà, per le curve in forma parametrica estremanti l'integrale corrispondente ad (1) che per esse si considera, si possono ottenere tutte con lo studio della variazione prima dell'integrale estremato; è noto (²) altresì che, nel caso delle curve in forma ordinaria ($y=y(x)$) e dell'integrale (1), avviene altrettanto se la funzione $y_0(x)$ estremante è supposta *lipschitziana*, vale a dire, a rapporto incrementale limitato, oppure se, sulla funzione integranda $f(x, y, y')$, si ammettono particolari ipotesi relative al suo comportamento al tendere di y' all'infinito. Senza queste ipotesi, non sembra che, per una funzione estremante $y_0(x)$ supposta soltanto assolutamente continua (oltre ad esser tale da rendere integrabile la $f(x, y_0(x), y_0'(x))$), si possa procedere mediante la variazione prima dell'integrale (1).

Le ipotesi alle quali qui si è accennato sono fissate in un teorema dei nostri *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (³), che ha larghe applicazioni. Ad esso sfuggono però quelle funzioni integrande che, al tendere all'infinito di y', tendono all'infinito di ordine infinito, oppure di ordine minore di 1, ed anche quelle che non tendono affatto costantemente all'infinito.

Nel primo capitolo del presente lavoro, daremo una proposizione assai generale, che comprende, come caso particolare, il teorema a cui abbiamo alluso e che s'applica anche a molte di quelle funzioni $f(x, y, y')$ che abbiamo or ora indicate. Poi passeremo allo studio delle *estremaloidi*, giungendo così, in particolare, alle proprietà delle curve estremanti.

(¹) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II.

(²) Loc. cit. in (¹).

(³) Vol. II, pag. 321.

Nei capitoli 2° e 3°, tali proprietà verranno ottenute indipendentemente dalla variazione prima dell'integrale (1); e precisamente, nel capitolo 2°, mediante lo studio di quelle curve che chiameremo *pseudoestremaloidi*, e, nel capitolo 3°, per mezzo di un procedimento già seguito nei citati *Fondamenti*, che qui ci condurrà a risultati più precisi e di più vaste applicazioni.

CAPITOLO I.

Variazione prima ed estremaloidi.

1. - Sia A un *campo* del piano (x, y), vale a dire, un insieme di punti di tale piano contenente tutti i suoi punti di accumulazione (posti al finito), e supponiamo definita, per tutti i punti (x, y) di A e per tutti i valori finiti (reali) di y', una funzione (reale) $f(x, y, y')$, la quale, per gli (x, y) e y' detti, sia sempre finita e continua insieme con le sue derivate parziali $f_y(x, y, y')$ e $f_{y'}(x, y, y')$.

Chiamata *curva ordinaria* C una curva rappresentabile nella forma

$$C: \quad y=y(x), \qquad a\leq x\leq b,$$

con $y(x)$ funzione assolutamente continua, e tale che ogni suo punto appartenga al campo A e che per essa risulti integrabile (nel senso del LEBESGUE), in tutto (a, b), la funzione $f(x, y(x), y'(x))$, consideriamo l'integrale

$$I_C=\int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

e dimostriamo la seguente proposizione:

Se, in corrispondenza ad ogni campo limitato A', appartenente ad A, si possono determinare quattro numeri, maggiori di zero, M, N_1, N_2, N_3, in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A', per ogni y' finito e per ogni φ tale che $|\varphi|<M$ e che $(x, y+\varphi)$ sia un punto di A,

$$|f_y(x, y+\varphi, y')|\leq N_1|y'|+N_2|f(x, y, y')|+N_3; \tag{2}$$

se C_0 è una curva ordinaria minimante per I_C in una classe K di curve ordinarie C;

ogni arco $\overline{C}_0$ della C_0 i cui punti, ad eccezione al più di quelli terminali, siano interni al campo A e di indifferenza rispetto ad A ed a K, è un'estremaloide relativa alla funzione $f(x, y, y')$ e (perciò) annulla identicamente la variazione prima smorzata $\overline{\delta} I_{C_0}$ [4].

---

[4] Ci atteniamo alla terminologia adottata nei citati *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Nel Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. XXXIX, n.° 11 (novem-

Sia

$$y = y_0(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

la rappresentazione analitica dell'arco $\overline{C}_0$ e supponiamo, *in un primo tempo,* che tutti i punti di questo arco (punti terminali compresi) siano interni al campo A, ed inoltre che per un ϱ, maggiore di zero, minore della minima distanza dei punti di $\overline{C}_0$ dalla frontiera di A, e sufficientemente piccolo, sostituendo a $\overline{C}_0$ una qualunque curva ordinaria C avente gli stessi punti terminali ed appartenente all'intorno (ϱ) di $\overline{C}_0$ non si esca dalla classe K.

Scegliamo per campo A' l'insieme di tutti i punti di A che distano di non più di 1 dalla curva C_0, e siano M, N_1, N_2, N_3 i quattro numeri, di cui si parla nell'enunciato della nostra proposizione, che corrispondono a questo A'. Possiamo supporre che il numero ϱ, già indicato, risulti $< M$.

Osserviamo subito che, per la (2), dalla integrabilità di $f(x, y_0(x), y_0'(x))$ segue quella di $f_y(x, y_0(x), y_0'(x))$.

Indichiamo con E_n l'insieme di tutti gli x di (a, b) in cui la derivata $y_0'(x)$ esiste finita e tale che $|y_0'(x)| \leqslant n$, dove n è un qualsiasi numero intero positivo. Per $n \to \infty$, la misura $m(E_n)$ di E_n tende a $b - a$. Se dunque n_0 è un valore di n tale che

$$m(E_{n_0}) > (b-a) : 2,$$

ne risulta

$$m(E_n) > (b-a) : 2$$

per tutti gli $n \geqslant n_0$.

È poi noto che la *densità* di E_n è uguale ad 1 su quasi-tutto E_n; è noto, inoltre, che, se poniamo

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_n(x) = f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)), & \text{in } E_n, \\ \varphi_n(x) = 0, & \text{fuori di } E_n, \end{cases}$$

l'integrale

$$(4) \qquad \int_a^x \varphi_n(x)\,dx$$

ammette, in quasi-tutto (a, b), derivata finita ed uguale a $\varphi_n(x)$.

Pertanto, se indichiamo con $\overline{E}_n$ l'insieme di tutti i punti di E_n in cui questo insieme ha densità 1 ed in cui l'integrale (4) ammette per derivata $\varphi_n(x)$, risulta

$$m(\overline{E}_n) = m(E_n)$$

e quindi, per tutti gli $n \geqslant n_0$,

$$m(\overline{E}_n) > (b-a) : 2.$$

---

bre 1933), p. 868, E. J. McShane annuncia un teorema, che sarà da Lui dimostrato altrove, il quale, sotto condizioni un po' più restrittive di quelle da noi poste, contiene il risultato che ora vogliamo provare, ed anche quello della nostra proposizione del n.° 12.

Fissiamo un valore di n maggiore di n_0 e siano x_1 e x_2 due qualsiasi punti di $\bar{E}_n$, con $x_1 < x_2$. Possiamo scegliere un numero $\bar{\delta}$ tale che $0 < \bar{\delta} < (x_2 - x_1) : 2$, e tale pure che, per ogni δ soddisfacente alla limitazione $0 < \delta \leq \bar{\delta}$, le misure delle parti di $\bar{E}_n$ contenute in $(x_1, x_1 + \delta)$ e in $(x_2 - \delta, x_2)$ risultino ambedue $> \delta : 2$. Allora, ad ogni x_1' tale che $x_1 < x_1' < x_1 + (\bar{\delta} : 2)$, corrisponde un massimo valore x_2' tale che $x_2 - \bar{\delta} < x_2' < x_2$ e soddisfacente alla condizione che la parte $e_{n,1}$ di $\bar{E}_n$ contenuta in (x_1, x_1') e quella $e_{n,2}$ di $\bar{E}_n$ contenuta in (x_2', x_2) abbiano uguale misura *positiva*:

$$m(e_{n,1}) = m(e_{n,2}) > 0. \tag{5}$$

Ciò posto, definiamo la funzione $i_n(x)$ ponendo

$$\left\{ \begin{array}{lll} i_n(x) = 1, & \text{nei punti di } e_{n,1}, \\ i_n(x) = -1, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ e_{n,2}, \\ i_n(x) = 0, & \text{altrove,} \end{array} \right. \tag{6}$$

e la funzione $\omega_n(x)$ ponendo

$$\omega_n(x) = \int_{a_0}^{x} i_n(x)\,dx, \tag{7}$$

dove supponiamo di indicare con (a_0, b_0) l'intervallo proiezione ortogonale della curva C_0 sull'asse delle x (donde $a_0 \leq a < b \leq b_0$). Avremo così

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_n(x) = 0, \quad \text{in } (a_0, x_1) \text{ e} & \text{in } (x_2, b), \\ \omega_n(x) = m(e_{n,1}) = m(e_{n,2}) & \text{in } (x_1', x_2'), \\ |\omega_n(x)| < b_0 - a_0 & \text{in tutto } (a_0, b_0) \end{array} \right. \tag{8}$$

e

$$|\omega_n'(x)| \leq 1 \tag{9}$$

in quasi-tutto (a_0, b_0), con

$$\omega_n'(x) = 0 \tag{10}$$

quasi-dappertutto fuori di $e_{n,1} + e_{n,2}$.

Consideriamo allora la curva

$$C_{n,t}: \quad y = y_{n,t}(x) \equiv y_0(x) + t\omega_n(x), \qquad a_0 \leq x \leq b_0.$$

Per tutti i t minori in valore assoluto di un certo $\bar{t}$, la $C_{n,t}$ è una curva ordinaria appartenente alla classe K ed al campo A'. Ed infatti, la $y_{n,t}(x)$ risulta assolutamente continua in tutto (a_0, b_0) e per t sufficientemente piccolo la $C_{n,t}$ appartiene al campo A' e quindi anche ad A. Inoltre, avendosi, in quasi-tutto $\bar{E}_n$,

$$|y'_{n,t}(x)| \leq |y_0'(x)| + |t\omega_n'(x)| \leq n + |t|,$$

e, quasi-dappertutto fuori di $\overline{E}_n$,

$$f(x, y_{n,t}(x), y'_{n,t}(x)) = f(x, y_0(x) + t\omega_n(x), y_0'(x)),$$

ne viene che la $f(x, y_{n,t}(x), y'_{n,t}(x))$ è integrabile su $\overline{E}_n$, e che, in quasi-tutto il complementare $C(\overline{E}_n)$ di $\overline{E}_n$ rispetto ad (a_0, b_0), è, se t è sufficientemente piccolo,

$$f(x, y_{n,t}, y'_{n,t}) = f(x, y_0, y_0') + t\omega_n f_y(x, y_0 + t\theta_{n,t}\omega_n, y_0'),$$

donde, in virtù della (2),

$$|f(x, y_{n,t}, y'_{n,t})| \leqslant N_1 |y_0'| + (N_2 + 1)|f(x, y_0, y_0')| + N_3.$$

La $f(x, y_{n,t}, y'_{n,t})$ risulta, pertanto, integrabile anche su $C(\overline{E}_n)$ e quindi su tutto (a_0, b_0), e la $C_{n,t}$ è una curva ordinaria. La sua appartenenza alla classe K è poi assicurata, se $|t|$ è sufficientemente piccolo, da quanto più sopra abbiamo ammesso.

Per ogni t tale che $|t| < \bar{t}$ dovrà perciò aversi

$$(11) \qquad I_{C_{n,t}} - I_{C_0} \geqslant 0.$$

Ma è

$$\begin{aligned} I_{C_{n,t}} - I_{C_0} &= \int_{a_0}^{b_0} \{ f(x, y_{n,t}, y'_{n,t}) - f(x, y_0, y_0') \} dx = \\ &= t \int_{x_1}^{x_2} \{ \omega_n f_y(x, y_0 + t\theta\omega_n, y_0' + t\theta\omega_n') + \\ &\quad + \omega_n' f_{y'}(x, y_0 + t\theta\omega_n, y_0' + t\theta\omega_n') \} dx, \end{aligned}$$

ed essendo, quasi-dappertutto fuori di $e_{n,1} + e_{n,2}$, $\omega_n'(x) = 0$, si ha, in quasi-tutto (x_1, x_2), se $\bar{t}$ è sufficientemente piccolo,

$$(12) \qquad \begin{aligned} &|\omega_n f_y(x, y_0 + t\theta\omega_n, y_0' + t\theta\omega_n') + \omega_n' f_{y'}(x, y_0 + t\theta\omega_n, y_0' + t\theta\omega_n')| < \\ &\qquad < (b_0 - a_0)\{ N_1 |y_0'| + N_2 |f(x, y_0, y_0')| + N_3 + \Phi \} + \Phi, \end{aligned}$$

dove Φ indica il massimo modulo delle derivate parziali f_y e $f_{y'}$ per tutti gli (x, y) di A' e per tutti gli y' tali che $|y'| \leqslant n + \bar{t}$. E siccome il secondo membro della (12) è integrabile in tutto (a_0, b_0), da un noto teorema d'integrazione per serie segue che esiste finito il limite di $\{ I_{C_{n,t}} - I_{C_0} \} : t$ per $t \to 0$, e che è

$$\lim_{t \to 0} [\{ I_{C_{n,t}} - I_{C_0} \} : t] = \int_{x_1}^{x_2} \{ \omega_n f_y(x, y_0, y_0') + \omega_n' f_{y'}(x, y_0, y_0') \} dx$$

e perciò, tenendo conto della (11),

$$\int_{x_1}^{x_2} \{ \omega_n f_y(x, y_0, y_0') + \omega_n' f_{y'}(x, y_0, y_0') \} dx = 0.$$

Integrando per parti il primo termine dell'espressione sotto il segno d'integrale, otteniamo, tenendo conto delle (8),

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega_n' \left\{ f_{y'}(x, y_0, y_0') - \int_a^x f_y(x, y_0, y_0')dx \right\} dx = 0,$$

ossia, per le (6) e (7),

$$(13) \qquad \int_{e_{n,1}} \left\{ f_{y'}(x, y_0, y_0') - \int_a^x f_y(x, y_0, y_0')dx \right\} dx = \\ = \int_{e_{n,2}} \left\{ f_{y'}(x, y_0, y_0') - \int_a^x f_y(x, y_0, y_0')dx \right\} dx.$$

Ora è

$$\frac{1}{m(e_{n,1})} \int_{e_{n,1}} \left\{ f_{y'}(x, y_0, y_0') - \int_a^x f_y(x, y_0, y_0')dx \right\} dx = \\ = \frac{x_1' - x_1}{m(e_{n,1})} \cdot \frac{1}{x_1' - x_1} \int_{x_1}^{x_1'} \varphi_n(x)dx - \frac{1}{m(e_{n,1})} \int_{e_{n,1}} \left\{ \int_a^x f_y dx \right\} dx,$$

ed essendo x_1 un punto di $\overline{E}_n$ è, per $x_1' \to x_1$,

$$\frac{x_1' - x_1}{m(e_{n,1})} \to 1, \qquad \frac{1}{x_1' - x_1} \int_{x_1}^{x_1'} \varphi_n(x)dx \to \varphi_n(x_1) = f_{y'}(x_1, y_0(x_1), y_0'(x_1)),$$

$$\frac{1}{m(e_{n,1})} \int_{e_{n,1}} \left\{ \int_a^x f_y dx \right\} dx \to \int_a^{x_1} f_y dx,$$

e perciò

$$(14) \qquad \frac{1}{m(e_{n,1})} \int_{e_{n,1}} \left\{ f_{y'} - \int_a^x f_y dx \right\} dx \to f_{y'}(x_1, y_0(x_1), y_0'(x_1)) - \int_a^{x_1} f_y(x, y_0, y_0')dx.$$

Analogamente, per $x_2' \to x_2$, si ha

$$(15) \qquad \frac{1}{m(e_{n,2})} \int_{e_{n,2}} \left\{ f_{y'} - \int_a^x f_y dx \right\} dx \to f_{y'}(x_2, y_0(x_2), y_0'(x_2)) - \int_a^{x_2} f_y(x, y_0, y_0')dx.$$

E siccome vale la (5) e perciò

$$x_2 - x_2' = \frac{x_2 - x_2'}{m(e_{n,2})} \cdot \frac{m(e_{n,1})}{x_1' - x_1} (x_1' - x_1),$$

per essere x_1 e x_2 due punti di $\overline{E}_n$, quando x_1' tende a x_1 anche x_2' tende a x_2. Da (13), (14) e (15) segue pertanto

$$f_{y'}(x_1, y_0(x_1), y_0'(x_1)) - \int_a^{x_1} f_y(x, y_0, y_0')dx = f_{y'}(x_2, y_0(x_2), y_0'(x_2)) - \int_a^{x_2} f_y(x, y_0, y_0')dx.$$

Ma x_1 e x_2 sono due punti qualsiasi di $\overline{E}_n$ e l'uguaglianza ora scritta prova che è in tutti i punti x di $\overline{E}_n$, vale a dire per quasi tutti gli x di E_n,

$$f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \int_a^x f_y(x, y_0, y_0')dx = c_n,$$

essendo c_n una costante. E se osserviamo che l'insieme E_n è tutto contenuto in E_{n+1}, e che ambedue questi insiemi, per $n > n_0$, hanno misura maggiore di $(b-a):2$, possiamo affermare che è $c_n = c_{n+1}$, vale a dire che, in quasi tutto l'intervallo (a, b), è

$$f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \int_a^x f_y(x, y_0, y_0')dx = c \text{ (cost.)}. \tag{16}$$

Ottenuto questo risultato, liberiamoci dall'ipotesi ammessa, all'inizio del nostro ragionamento, sull'arco $\overline{C}_0$. Osserviamo, a tal fine, che, preso un qualsiasi punto x_0 interno ad (a, b), possiamo determinare un intervallo (α, β) tale che $a < \alpha < x_0 < \beta < b$, e sufficientemente piccolo, in modo che, per l'arco γ_0 di $\overline{C}_0$ avente (α, β) per proiezione ortogonale sull'asse delle x, risulti senz'altro verificata l'ipotesi in questione. Ciò è conseguenza dell'aver supposto, nell'enunciato del nostro teorema, che tutti i punti di $\overline{C}_0$, ad eccezione al più di quelli terminali, siano interni al campo A e di indifferenza rispetto ad A ed a K.

Allora, se è $a < a' < b' < b$, tutti i punti di (a', b') possono (in virtù del noto teorema di PINCHERLE-BOREL sugli insiemi di intervalli) ricoprirsi mediante un numero finito di intervalli del tipo (α, β): (α_1, β_1), (α_2, β_2),...., (α_p, β_p), ed in modo che ogni punto di (a', b') sia *interno* ad almeno uno di questi (α_r, β_r). In ciascuno di questi (α_r, β_r) varrà la (16), con una propria costante, vale a dire sarà

$$f_{y'} - \int_a^x f_y dx = c_r.$$

Sia $(\alpha_{r'}, \beta_{r'})$ l'intervallo (α_r, β_r) di indice minore che contiene nel suo interno a'. Se $(\alpha_{r''}, \beta_{r''})$ è un altro intervallo dello stesso gruppo che contiene nel suo interno $\beta_{r'}$, $(\alpha_{r'}, \beta_{r'})$ e $(\alpha_{r''}, \beta_{r''})$ dovranno avere un segmento (non nullo) in comune, e su di esso dovrà essere quasi dappertutto

$$f_{y'} - \int_a^x f_y dx = c_{r'}, \qquad f_{y'} - \int_a^x f_y dx = c_{r''}.$$

Sarà perciò necessariamente $c_{r'} = c_{r''}$. Per la stessa ragione, se $(\alpha_{r'''}, \beta_{r'''})$ è un intervallo dello stesso gruppo contenente $\beta_{r''}$ nel suo interno, dovrà essere $c_{r'} = c_{r''} = c_{r'''}$. Così proseguendo, poichè gli (α_r, β_r) sono in numero finito, ed ogni punto di (a', b') è interno ad almeno uno di essi, vediamo che la (16) vale, per uno stesso valore c' della costante c, su quasi tutto (a', b'). Ma se è $a < a'' < a'$,

$b' < b'' < b$, i valori c' e c'' della costante c relativamente ai due intervalli (a', b') e (a'', b'') devono essere uguali e possiamo concludere che la (16) vale, per uno stesso valore della costante c, su quasi tutto (a, b).

Dalla stessa (16) segue che $f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ coincide quasi dappertutto su (a, b) con una funzione continua in tutto (a, b); la $f_{y'}(x, y_0, y_0')$ è pertanto integrabile su (a, b).

Integrando la (16) su (a, b), da a ad x, e poi derivando, si ha l'esistenza e la finitezza della derivata

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f_{y'}(x, y_0, y_0')dx$$

e la validità, in tutto (a, b), dell'uguaglianza

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f_{y'}(x, y_0, y_0')dx - \int_a^x f_y(x, y_0, y_0')dx = c, \tag{17}$$

nella quale la derivata rispetto ad x deve intendersi come derivata a destra per $x = a$ e come derivata a sinistra per $x = b$.

Ciò prova che l'arco $\overline{C}_0$ è un'*estremaloide* relativa alla funzione $f(x, y, y')$ e quindi ([5]) che su di esso è identicamente nulla la variazione prima smorzata dell'integrale I_C:

$$\delta I_{\overline{C}_0} \equiv 0.$$

Osservazione I. - È evidente che il risultato stabilito per l'arco $\overline{C}_0$ sussiste anche se, nell'enunciato del nostro teorema, invece della disuguaglianza (2), si ammette che valga, quasi dappertutto su (a, b), la

$$|f_y(x, y_0(x) + \varphi, y_0'(x))| \leq N_1 |y_0'(x)| + N_2 |f(x, y_0(x), y_0'(x))| + \psi(x),$$

dove $\psi(x)$ è una funzione integrabile in (a, b), e intendendo che questa disuguaglianza sia verificata per tutti i φ tali che $|\varphi| < M$ e per i quali il punto $(x, y_0(x) + \varphi)$ appartiene ad A.

Osservazione II. - È pure evidente che la conclusione del teorema sussiste indipendentemente dalla disuguaglianza (2) per tutti gli archi $\overline{C}_0$ (soddisfacenti alle condizioni indicate) sui quali la $y_0(x)$ è lipschitziana.

2. - La condizione del teorema del n.° 1, relativa alla (2), è soddisfatta *se, in corrispondenza ad ogni campo limitato A', appartenente ad A, si possono determinare cinque costanti α, m, m_1, M, M_1, in modo che sia $\alpha > 0$, $m > 0$, $M > 0$ e che si abbia, per tutti i punti (x, y) di A' e per ogni y' finito,*

$$|f(x, y, y')| \geq m|y'|^\alpha + m_1,$$
$$|f_y(x, y, y')| \leq M|y'|^\alpha + M_1.$$

([5]) Loc. cit. in ([1]), p. 329.

3. - *Se, in ogni campo limitato A', appartenente ad A, $|f_{y'}(x, y, y')|$ tende uniformemente a $+\infty$ per $y' \to +\infty$, allora ogni estremaloide relativa alla funzione $f(x, y, y')$, e appartenente ad A, è a rapporto incrementale superiormente limitato.*

Sia

$$y = y(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

un'estremaloide relativa alla funzione $f(x, y, y')$ e appartenente al campo A, vale a dire, una curva del campo A tale che la $y(x)$ sia assolutamente continua in (a, b), che $f_y(x, y(x), y'(x))$ e $f_{y'}(x, y(x), y'(x))$ risultino integrabili, pure in (a, b), e che, in tutto questo intervallo, valga sempre l'uguaglianza

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f_{y'}(x, y(x), y'(x))dx - \int_a^x f_y(x, y(x), y'(x))dx = c \text{ (cost.)},$$

nella quale la derivata rispetto ad x va intesa come derivata a destra per $x = a$ e come derivata a sinistra per $x = b$.

In quasi tutto (a, b), è allora

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = c + \int_a^x f_y(x, y(x), y'(x))dx. \tag{18}$$

Posto

$$N = |c| + \int_a^b |f_y(x, y(x), y'(x))|dx,$$

sia Y' un numero tale che, per ogni $y' \geqslant Y'$, risulti, in tutti i punti (x, y) di A',

$$|f_{y'}(x, y, y')| > N + 1.$$

Siccome dalla (18) segue, in quasi tutto (a, b),

$$|f_{y'}(x, y(x), y'(x))| \leqslant N,$$

ne viene, in quasi tutto (a, b), $y'(x) < Y'$; e per essere

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(x)dx,$$

se x_1 e x_2 sono due punti qualsiasi di (a, b), risulta

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y'(x)dx < Y',$$

che è precisamente quanto dovevamo dimostrare.

4. - Analogamente si dimostra che, *se, in ogni campo limitato A', appartenente ad A, $|f_{y'}(x, y, y')|$ tende uniformemente a $+\infty$ per $y' \to -\infty$, allora*

ogni estremaloide relativa alla funzione $f(x, y, y')$ *e appartenente ad* A, *è a rapporto incrementale inferiormente limitato.*

5. - *Se la funzione* $f(x, y, y')$ *è indipendente da* y *e se, in ogni campo limitato* A', *appartenente ad* A, $f_{y'}(x, y')$ *tende uniformemente, per* $y' \to +\infty$, *ad un limite* l, *indipendente da* x, *e per ogni* y' *finito maggiore di un* Y', *indipendente da* x, *è* $f_{y'}(x, y') \neq l$, *allora ogni estremaloide relativa alla funzione* $f(x, y')$ *e appartenente ad* A, *è a rapporto incrementale superiormente limitato.*

Se è $l = \pm\infty$, ciò è conseguenza del n.° 3. Supponiamo dunque che l sia finito. Dovendo valere la (18) in quasi tutto l'intervallo (a, b) proiezione ortogonale sull'asse delle x dell'estremaloide $y = y(x)$ considerata, si avrà, in quasi tutto l'intervallo detto,

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = c.$$

Se è $c = l$, risulta, in quasi tutto (a, b), $y'(x) \leqq Y'$; se è $c \neq l$, potendosi determinare un numero Y'' tale che, per ogni $y' \geqq Y''$ sia, in tutti i punti (x, y) di A',

$$|f_{y'}(x, y') - l| < |c - l|,$$

si ha, in quasi tutto (a, b), $y'(x) < Y''$. In ambedue i casi si conclude, come si è fatto nel n.° 3, che il rapporto incrementale della $y(x)$ resta inferiore ad un numero fisso.

6. - Analogamente si prova che, *se la* $f(x, y, y')$ *è indipendente da* y *e se, in ogni campo limitato* A' *appartenente ad* A, $f_{y'}(x, y')$ *tende uniformemente, per* $y' \to -\infty$, *ad un limite* l, *indipendente da* x *e, per ogni* y' *finito minore di un* Y', *indipendente da* x, *è* $f_{y'}(x, y') \neq l$, *allora ogni estremaloide relativa alla* $f(x, y, y')$ *e appartenente ad* A, *è a rapporto incrementale inferiormente limitato.*

7. - Dai numeri precedenti segue immediatamente che:

Se, per $y' \to +\infty$, *è verificata la condizione del teorema del n.° 3 oppure quella del n.° 5; se, per* $y' \to -\infty$, *è verificata la condizione del n.° 4 oppure quella del n.° 6; allora ogni estremaloide relativa alla funzione* $f(x, y, y')$, *e appartenente ad* A, *è lipschitziana.*

Se ora rammentiamo ([6]) che, quando l'integrale I_C è quasi-regolare normale, su ogni estremaloide relativa alla $f(x, y, y')$ la tangente esiste sempre ed essa sempre varia con continuità, possiamo affermare che:

([6]) Loc. cit. in ([1]), p. 321. L'integrale I_C è *quasi-regolare normale* se la $f_{y'}(x, y, y')$ è, in ogni punto (x, y) del campo A, una funzione sempre crescente, oppure sempre decrescente della y'.

Supposto l'integrale I_C quasi-regolare normale e supposte verificate le condizioni della proposizione or ora stabilita, ogni estremaloide relativa alla $f(x, y, y')$, e appartenente ad A, ha derivata sempre finita e continua ed è un'estremale.

8. - Per giungere ai risultati, che ci proponiamo di stabilire nei n.^{i} 9 e 10, ci occorre il seguente lemma:

Se, per ogni x tale che $a \leqslant x < b$, la funzione $y(x)$ è finita e assolutamente continua e verifica, per quasi tutti gli x indicati, la disuguaglianza

$$(19) \qquad y'(x) \leqslant y(x)\varphi(x) + c, \qquad (\text{oppure } y'(x) \geqslant y(x)\varphi(x) + c),$$

dove c è una costante e $\varphi(x)$ è una funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) in (a, b'), per ogni b' tale che $a < b' < b$, e soddisfacente inoltre alla condizione che l'integrale $\int_a^{b'} \varphi(x)dx$ resti limitato;

allora la $y(x)$ resta superiormente (oppure, rispettivamente, inferiormente) limitata.

Se fosse sempre, per tutti gli x indicati, $y(x) \leqslant 1$ (oppure, rispettivamente, $y(x) \geqslant -1$), la proposizione sarebbe già dimostrata. Supponiamo dunque che, per un x_1 tale che $a < x_1 < b$, risulti $y(x_1) > 1$ (oppure, rispettivamente, $y(x_1) < -1$). Indicato con x_0 il minore degli x di (a, x_1) tale che, in tutto (x_0, x_1) sia $y(x) \geqslant 1$ (oppure, rispettivamente, $y(x) \leqslant -1$) — onde sarà $y(x_0) = 1$ (oppure, rispettivamente, $y(x_0) = -1$) oppure $x_0 = a$, $y(x_0) = y(a) \mp 0$ — avremo, in tutto (x_0, x_1),

$$\frac{y'(x)}{y(x)} \leqslant \varphi(x) + \frac{c}{y(x)}$$

ed anche

$$\lg \frac{y(x)}{y(x_0)} \leqslant \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx + |c|(x - x_0) < \Phi + |c|(b - a),$$

dove abbiamo indicato con Φ il doppio di un numero fisso di cui $\left|\int_a^{b'} \varphi(x)dx\right|$ resta sempre inferiore. Ponendo

$$e^{\Phi + |c|(b-a)} = \Psi,$$

avremo perciò

$$y(x_1) < \Psi y(x_0), \qquad (\text{oppure, rispettivamente, } y(x_1) > \Psi y(x_0)).$$

Dunque, in ogni punto x tale che $a \leqslant x < b$ ed in cui è $y(x) > 1$ (oppure, rispettivamente, $y(x) < -1$), vale la disuguaglianza

$$y(x) < \Psi(1 + |y(a)|), \qquad (\text{oppure, rispettivamente, } y(x) > -\Psi(1 + |y(a)|))$$

la quale prova il lemma enunciato.

Analogamente si ha:

Se, per ogni x *tale che* $a<x\leq b$, *la funzione* $y(x)$ *è finita e assolutamente continua e verifica, per quasi tutti gli* x *indicati, la disuguaglianza*

$$(20)\qquad y'(x)\leq y(x)\varphi(x)+c,\qquad (\text{oppure } y'(x)\geq y(x)\varphi(x)+c),$$

dove c *è una costante e* $\varphi(x)$ *è una funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) in* (a', b), *per ogni* a' *tale che* $a<a'<b$, *e soddisfacente inoltre alla condizione che l'integrale* $\int_{a'}^{b}\varphi(x)dx$ *resti limitato; allora la* $y(x)$ *resta inferiormente (oppure, rispettivamente, superiormente) limitata.*

9. - Supporremo, nel presente numero, che la $f(x, y, y')$ ammetta, finite e continue, per ogni (x, y) di A e per tutti i valori finiti di y', anche le derivate parziali $f_{y'x}$, $f_{y'y}$, $f_{y'y'}$.

Ciò posto, dimostriamo che:

Se l'integrale I_C *è quasi-regolare normale;*

se esistono quattro costanti Y', K_1, K_2, K_3, *tali che, per tutti i punti* (x, y) *di un'estremaloide* C_0 $[y=y_0(x),\ a\leq x\leq b]$ *relativa alla* $f(x, y, y')$ *e appartenente al campo* A, *e per tutti gli* $y'\geq Y'$ (*oppure* $y'\leq Y'$) *sia* $f_{y'y'}(x, y, y')\neq 0$ *ed anche*

$$(21)\qquad \frac{f_y-f_{y'x}-y'f_{y'y}}{f_{y'y'}}\leq|y'|\{K_1|y'|+K_2|f(x, y, y')|\}+K_3,$$

e se di più, nel caso di $K_2>0$, *la* $f(x, y, y')$ *è integrabile sulla* C_0;

allora, su tutta la C_0, *ad eccezione al più del suo primo (oppure, rispettivamente, secondo) punto terminale, è* $y_0'(x)<+\infty$ (*oppure, rispettivamente,* $y_0'(x)>-\infty$).

Siccome l'integrale I_C è supposto quasi-regolare normale, sull'estremaloide C_0 (come già abbiamo rammentato) esiste sempre e sempre varia con continuità la tangente. Inoltre [7], detto Ω l'insieme dei punti dell'intervallo (a, b) in cui la $y_0'(x)$ è infinita, Ω risulta essere *chiuso* e di misura nulla. Detto Ω^+ (oppure, rispettivamente, Ω^-) l'insieme dei punti di Ω in cui è $y_0'(x)=+\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(x)=-\infty$) anche Ω^+ (e così Ω^-) è chiuso e di misura nulla. Se perciò Ω^+ (oppure, rispettivamente, Ω^-) contenesse un punto distinto da a (oppure, rispettivamente, da b), esisterebbe in (a, b) almeno un intervallo contiguo a Ω^+ (oppure, rispettivamente, Ω^-), (c, d) con $y_0'(d)=+\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(c)=-\infty$). Ma, in tal caso, scelto un punto c' interno a (c, d), in modo da aversi, in tutto (c', d) (oppure, rispettivamente, (c, c')), $y_0'(x)>|Y'|$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(x)<-|Y'|$), dal fatto che, escluso d (oppure, rispet-

[7] Loc. cit. in [1], p. 321.

tivamente, c), in (c', d) (oppure, rispettivamente, (c, c')) varrebbe l'equazione delle estremali nella forma

$$y'' = \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}},$$

e dalla (21), seguirebbe, in tutto (c', d) (oppure, rispettivamente, (c, c')), escluso d (oppure, rispettivamente, c), se è $K_2 \leqslant 0$,

$$y_0'' \leqslant y_0' \{ K_1 y_0' \} + K_3,$$

e, se è $K_2 > 0$,

$$y_0'' \leqslant y_0' \{ K_1 y_0' + K_2 | f(x, y_0, y_0') | \} + K_3$$

(oppure, rispettivamente, $y_0'' \leqslant y_0' \{ K_1 y_0' - K_2 | f(x, y_0, y_0') | \} + K_3$) e quindi, per il n.° 8, la $y_0'(x)$ risulterebbe superiormente (oppure, rispettivamente, inferiormente) limitata, e non potrebbe essere $y_0'(d) = +\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(c) = -\infty$).

Dunque, in tutto (a, b), ad eccezione al più di a (oppure, rispettivamente, b), è $y_0'(x) < +\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(x) > -\infty$).

Si vede facilmente che, *se nel teorema ora dimostrato si sostituisce la* (21) *con la*

(22) $$\frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}} \geqslant -|y'| \{ K_1 |y'| + K_2 | f(x, y, y') | \} + K_3,$$

la conclusione si muta in quest'altra: *che su tutta la C_0, ad eccezione al più del suo secondo* (*oppure, rispettivamente, primo*) *punto terminale, è $y_0'(x) < +\infty$* (*oppure, rispettivamente, $y_0'(x) > -\infty$*).

Osservazione. - I risultati stabiliti in questo numero sussistono anche se, nelle disuguaglianze (21) e (22), all'espressione $K_1 |y'| + K_2 | f(x, y, y') |$ si sostituisce l'altra

$$K_1 |y'| + K_2 | f(x, y, y') | + \psi(x),$$

$\psi(x)$ essendo una funzione integrabile in (a, b).

10. - Se la funzione $f(x, y, y')$ ha la forma particolare

(23) $$f(x, y, y') \equiv \varphi(x, y) \sqrt{1 + y'^2},$$

con $\varphi(x, y)$ funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine, in tutto il campo A, i primi membri delle (21) e (22) prendono la forma

$$\frac{1}{\varphi} (\varphi_y - y' \varphi_x)(1 + y'^2)$$

e, da quanto si è stabilito nel n.° precedente, segue:

Se C_0 è un'estremaloide relativa alla funzione (23) *ed appartenente al campo A, e se su di essa è sempre*

$$\varphi(x, y) > 0, \qquad \varphi_x(x, y) \geqslant 0, \qquad (\text{oppure } \varphi_x(x, y) \leqslant 0),$$

allora su tutta la C_0, ad eccezione al più del primo (oppure, rispettivamente, secondo) punto terminale, la $y_0'(x)$ è finita.

Ed invero, qui è sempre

$$f_{y'y'} \equiv \varphi(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} \neq 0,$$

e, per tutti gli $y' \geqslant 0$ (oppure, rispettivamente, $y' \leqslant 0$) è

$$\frac{1}{\varphi}(\varphi_y - y'\varphi_x)(1+y'^2) \leqslant \frac{1}{\varphi}\varphi_y(1+y'^2),$$

onde la (21) risulta soddisfatta per tutti gli $y' \geqslant 0$ (oppure, rispettivamente, $y' \leqslant 0$), ponendo $K_2 = 0$, $K_1 = K_3 =$ al massimo valore di $\varphi_y : \varphi$ sulla C_0, e pertanto, per la prima proposizione del n.° 9, è $y_0'(x) < +\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(x) > -\infty$) su tutta la C_0, ad eccezione al più del primo (oppure, rispettivamente, secondo) punto terminale.

Per tutti gli $y' \leqslant 0$ (oppure, rispettivamente, $y' \geqslant 0$) è poi

$$\frac{1}{\varphi}(\varphi_y - y'\varphi_x)(1+y'^2) \geqslant \frac{1}{\varphi}\varphi_y(1+y'^2),$$

onde la (22) risulta soddisfatta per tutti gli $y' \leqslant 0$ (oppure, rispettivamente, $y' \geqslant 0$) ponendo $K_2 = 0$, $-K_1 = K_3 =$ al minimo valore di $\varphi_y : \varphi$ sulla C_0, e pertanto, in virtù del n.° 9, è $y_0'(x) > -\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(x) < +\infty$), su tutta la C_0, ad eccezione al più del primo (oppure, rispettivamente, secondo) punto terminale.

Dalla proposizione ora dimostrata segue pure che, *se è ancora valida la* (23), *con $\varphi(x, y) > 0$ su tutta l'estremaloide C_0, e se questa estremaloide si può spezzare in due archi, sul primo dei quali* ([8]) *sia sempre $\varphi_x(x, y) \geqslant 0$ e sul secondo $\varphi_x(x, y) \leqslant 0$, allora la $y_0'(x)$ risulta finita in tutti i punti della C_0, eccettuati al più i suoi punti terminali.*

CAPITOLO II.

Le pseudoestremaloidi.

11. - Nel presente capitolo, ammetteremo che la funzione $f(x, y, y')$ sia, in tutti i punti (x, y) del campo A e per tutti i valori finiti di y', finita e continua insieme con le sue derivate parziali $f_x(x, y, y')$ e $f_{y'}(x, y, y')$ ([9]).

Diremo che una curva

$$y = y(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

appartenente al campo A, è una *pseudoestremaloide* relativa alla funzione

---

([8]) Vale a dire, su quello che contiene il primo punto terminale della C_0.

([9]) Non facciamo dunque nessuna ipotesi sull'esistenza della derivata parziale f_y.

$f(x, y, y')$, se la $y(x)$ è assolutamente continua in (a, b), se la $f_x(x, y(x), y'(x))$ e l'espressione $f(x, y(x), y'(x)) - y'(x) f_{y'}(x, y(x), y'(x))$ risultano integrabili in (a, b), e se, infine, in tutto tale intervallo, vale l'uguaglianza

$$(24) \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x \{f(x, y(x), y'(x)) - y'(x) f_{y'}(x, y(x), y'(x))\}\, dx - \\ - \int_a^x f_x(x, y(x), y'(x))dx = c \ \text{(cost.)},$$

nella quale la derivata rispetto ad x del primo integrale va intesa come derivata a destra per $x=a$ e come derivata a sinistra per $x=b$.

12. - Con queste premesse, dimostriamo la seguente proposizione:

Se, in corrispondenza ad ogni campo limitato A', appartenente ad A, si possono determinare quattro numeri, maggiori di zero, M, N_1, N_2, N_3, in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A', per ogni y' finito e per ogni φ tale che $|\varphi| < M$ e che $(x+\varphi, y)$ sia un punto di A,

$$(25) \qquad |f_x(x+\varphi, y, y')| \leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y')| + N_3\,;$$

se C_0 è una curva ordinaria minimizzante per I_C in una classe K di curve ordinarie C;

ogni arco $\overline{C}_0$ della C_0 i cui punti, ad eccezione al più di quelli terminali, siano interni al campo A e di indifferenza rispetto ad A ed a K, è una pseudoestremaloide relativa alla funzione $f(x, y, y')$ (10).

Sia
$$y = y_0(x), \qquad a \leq x \leq b,$$
la rappresentazione analitica dell'arco $\overline{C}_0$ e procediamo come abbiamo fatto nella dimostrazione del teorema del n.° 1, ammettendo, *in un primo tempo*, la stessa ipotesi ivi ammessa e conservando le medesime notazioni, con l'avvertenza di sostituire alla disuguaglianza (2) la (25), alla derivata parziale f_y la f_x, e, nella definizione della $\varphi_n(x)$, alla $f_{y'}$ la $f - y' f_{y'}$.

Mediante la funzione $\omega_n(x)$, definita per mezzo delle (6) e (7), costruiamo la curva $C_{n,t}$, di cui indicheremo con (ξ, η) il punto corrente, ponendo

$$(26) \qquad C_{n,t}: \begin{cases} \xi = x + t\omega_n(x) \\ \eta = y_0(x) \end{cases} \qquad a_0 \leq x \leq b_0.$$

Per tutti i t minori in valore assoluto di un certo $\bar{t}$, che supporremo maggiore di zero e minore di $1:2$, la curva $C_{n,t}$ appartiene al campo A'. Per tutti gli stessi t, essa è anche rappresentabile nella forma

$$\eta = \eta_{n,t}(\xi), \qquad a_0 \leq \xi \leq b_0,$$

(10) V. quanto abbiamo detto in (4).

con $\eta_{n,t}(\xi)$ funzione assolutamente continua. Ed infatti, la prima delle (26) definisce ξ come funzione assolutamente continua di x con, quasi dappertutto su (a_0, b_0),

$$\frac{d\xi}{dx}=1+t\omega_n'(x)$$

e

$$\frac{1}{2}<\frac{d\xi}{dx}<\frac{3}{2}.$$

Dunque la $\xi(x)$ è funzione sempre crescente della x, con rapporto incrementale sempre compreso fra $1:2$ e $3:2$, e la sua funzione inversa $x(\xi)$ risulta perciò anch'essa sempre crescente e assolutamente continua, con

$$\frac{2}{3}<\frac{dx}{d\xi}<2.$$

Pertanto la

$$\eta=y_0(x(\xi))\equiv\eta_{n,t}(\xi)$$

risulta funzione assolutamente continua di ξ in tutto (a_0, b_0), ed è, quasi dappertutto,

$$\frac{d\eta_{n,t}}{d\xi}=y_0'(x(\xi))\,\frac{1}{1+t\omega_n'(x(\xi))}.$$

Mostriamo che la funzione $f(\xi, \eta_{n,t}(\xi), \eta'_{n,t}(\xi))$ è integrabile in (a_0, b_0). Consideriamo, a tal uopo, la funzione della variabile x:

$$f\left(\xi(x),\, y_0(x),\, \frac{y_0'(x)}{1+t\omega_n'(x)}\right)(1+t\omega_n'(x))\equiv\Phi(x).$$

Quasi dappertutto in $\overline{E}_n$ è

$$\left|\frac{y_0'(x)}{1+t\omega_n'(x)}\right|\leq 2n,\qquad |1+t\omega_n'(x)|<\frac{3}{2},$$

e perciò la $\Phi(x)$ resta in modulo inferiore ad un numero fisso in quasi tutto $\overline{E}_n$, e risulta pertanto integrabile su tale insieme.

Quasi dappertutto fuori di $\overline{E}_n$ è $\omega_n'(x)=0$, e perciò, se $|t|$ è sufficientemente piccolo,

$$f\left(\xi(x),\, y_0(x),\, \frac{y_0'(x)}{1+t\omega_n'(x)}\right)=f(\xi(x),\, y_0(x),\, y_0'(x))=$$
$$=f(x,\, y_0(x),\, y_0'(x))+t\omega_n(x)f_x(x+t\theta_{n,t}\omega_n,\, y_0(x),\, y_0'(x)),$$

e, in virtù della (25),

$$\left|f\left(\xi(x),\, y_0(x),\, \frac{y_0'(x)}{1+t\omega_n'(x)}\right)\right|\leq N_1|y_0'|+(N_2+1)|f(x, y_0, y_0')|+N_3.$$

La $\Phi(x)$ risulta così integrabile su $C(\overline{E}_n)$ e quindi su tutto (a_0, b_0) e, per un noto teorema di integrazione per sostituzione, si ha

$$\int_{a_0}^{b_0} f\left(\xi(x),\, y_0(x),\, \frac{y_0'(x)}{1+t\omega_n'(x)}\right)(1+t\omega_n'(x))\,dx=\int_{a_0}^{b_0} f(\xi,\, \eta_{n,t}(\xi),\, \eta'_{n,t}(\xi))\,d\xi,$$

donde, in particolare, l'integrabilità della $f(\xi, \eta_{n,t}(\xi), \eta'_{n,t}(\xi))$ su (a_0, b_0).

La $C_{n,t}$ è dunque, per tutti i t tali che $|t|<\bar{t}$, con $\bar{t}$ sufficientemente piccolo, una curva ordinaria, ed anche una curva della classe K. Deve quindi aversi, per $|t|<\bar{t}$,

$$I_{C_{n,t}}-I_{C_0}\geqq 0.$$

Ma è

$$I_{C_{n,t}}-I_{C_0}=\int_{a_0}^{b_0} f(\xi,\eta_{n,t}(\xi),\eta'_{n,t}(\xi))d\xi-\int_{a_0}^{b_0} f(x,y_0(x),y_0'(x))dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left\{f\left(x+t\omega_n(x),y_0(x),\frac{y_0'(x)}{1+t\omega_n'(x)}\right)(1+t\omega_n'(x))-f(x,y_0(x),y_0'(x))\right\}dx=$$

$$=t\int_{x_1}^{x_2}\left\{\omega_n f_x\left(x+t\theta\omega_n,y_0,y_0'-\frac{t\theta\omega_n'y_0'}{1+t\omega_n'}\right)-\right.$$

$$-\frac{\omega_n'y_0'}{1+t\omega_n'}f_{y'}\left(x+t\theta\omega_n,y_0,y_0'-\frac{t\theta\omega_n'y_0'}{1+t\omega_n'}\right)+$$

$$\left.+\omega_n'f\left(x+t\omega_n,y_0,\frac{y_0'}{1+t\omega_n'}\right)\right\}dx,$$

donde, analogamente a quanto si è veduto nel n.° 1,

$$\lim_{t\to 0}[\{I_{C_{n,t}}-I_{C_0}\}:t]=\int_{x_1}^{x_2}\{\omega_n f_x(x,y_0,y_0')+\omega_n'[f(x,y_0,y_0')-y_0'f_{y'}(x,y_0,y_0')]\}dx$$

e quindi

$$\int_{x_1}^{x_2}\{\omega_n f_x(x,y_0,y_0')+\omega_n'[f(x,y_0,y_0')-y_0'f_{y'}(x,y_0,y_0')]\}dx=0,$$

ed anche, integrando per parti,

$$\int_{x_1}^{x_2}\omega_n'\left\{f(x,y_0,y_0')-y_0'f_{y'}(x,y_0,y_0')-\int_a^x f_x(x,y_0,y_0')dx\right\}dx=0,$$

da cui

$$\int_{e_{n,1}}\left\{f(x,y_0,y_0')-y_0'f_{y'}(x,y_0,y_0')-\int_a^x f_x(x,y_0,y_0')dx\right\}dx=\int_{e_{n,2}}\{\ldots\}dx.$$

Ragionando ora analogamente a quanto si è già fatto nel n.° 1, si giunge alla uguaglianza

$$f(x_1,y_0(x_1),y_0'(x_1))-y_0'(x_1)f_{y'}(x_1,y_0(x_1),y_0'(x_1))-\int_a^{x_1} f_x(x,y_0,y_0')dx=$$

$$=f(x_2,y_0(x_2),y_0'(x_2))-y_0'(x_2)f_{y'}(x_2,y_0(x_2),y_0'(x_2))-\int_a^{x_2} f_x(x,y_0,y_0')dx,$$

dalla quale poi si deduce che è, quasi dappertutto in (a,b),

$$(27)\quad f(x,y_0(x),y_0'(x))-y_0'(x)f_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))-\int_a^x f_x(x,y_0,y_0')dx=c\ \text{(cost.)},$$

e che tale uguaglianza vale indipendentemente dall'ipotesi supplementare ammessa nel principio della dimostrazione. Dalla (27) segue, infine, per considerazioni analoghe a quelle svolte al termine della dimostrazione del n.° 1, che sull'arco $\overline{C}_0$ vale la (24), e cioè che l'arco $\overline{C}_0$ è una pseudoestremaloide relativa alla $f(x, y, y')$.

Osservazione I. - Il risultato stabilito per l'arco $\overline{C}_0$ sussiste anche se nell'enunciato del teorema, invece della disuguaglianza (25), si ammette che valga, quasi dappertutto su (a, b), la

$$|f_x(x+\varphi, y_0(x), y_0'(x))| \leq N_1 |y_0'(x)| + N_2 |f(x, y_0(x), y_0'(x))| + \psi(x),$$

dove $\psi(x)$ è una funzione integrabile in (a, b), e intendendo che questa disuguaglianza sia verificata per tutti quei φ tali che $|\varphi| < M$ e per i quali il punto $(x+\varphi, y_0(x))$ appartiene ad A.

Osservazione II. - La conclusione del teorema sussiste indipendentemente dalla disuguaglianza (25) per tutti quegli archi $\overline{C}_0$ (soddisfacenti alle condizioni indicate), sui quali la $y_0(x)$ è lipschitziana.

Osservazione III. - Nel teorema qui dimostrato, l'ipotesi che tutti i punti dell'arco $\overline{C}_0$, ad eccezione al più di quelli terminali, siano interni al campo A, può essere sostituita con la seguente: *che ogni punto di $\overline{C}_0$, ad eccezione al più di quelli terminali, sia centro di un cerchio (di raggio non nullo) tale che quelli dei suoi punti che appartengono al minimo rettangolo, a lati paralleli agli assi x e y, contenente $\overline{C}_0$, appartengano pure al campo A.*

Osservazione IV. - La condizione del teorema relativa alla (25) è soddisfatta *se, in corrispondenza ad ogni campo limitato A', appartenente ad A, si possono determinare cinque costanti, α, m, m_1, M, M_1, in modo che sia $\alpha > 0$, $m > 0$, $M > 0$, e che si abbia, per tutti i punti (x, y) di A e per ogni y' finito,*

$$|f(x, y, y')| \geq m |y'|^\alpha + m_1,$$
$$|f_x(x, y, y')| \leq M |y'|^\alpha + M_1.$$

13. - Analogamente a quanto si è dimostrato nei n.[i] 3 e 4, si prova che:

Se, in ogni campo limitato A', appartenente ad A, $|f - y'f_{y'}|$ tende uniformemente a $+\infty$ per $y' \to +\infty$, allora ogni pseudoestremaloide relativa alla funzione $f(x, y, y')$ e appartenente ad A, è a rapporto incrementale superiormente limitato.

Se, invece, in A', $|f - y'f_{y'}|$ tende uniformemente a $+\infty$ per $y' \to -\infty$, ogni pseudoestremaloide relativa alla $f(x, y, y')$ e appartenente ad A, è a rapporto incrementale inferiormente limitato.

14. - Conformemente a quanto si è provato nei n.[i] 5 e 6, si ha poi che:

Se la $f(x, y, y')$ è indipendente dalla x, e se, in ogni campo limitato A', appartenente ad A, $f - y'f_{y'}$ tende uniformemente, per $y' \to +\infty$, ad un limite l, indipendente da y, e per ogni y' finito maggiore di un Y', indipendente *da y, è $f-y'f_{y'}\neq l$, allora ogni pseudoestremaloide relativa alla $f(y, y')$ e appartenente ad A, è a rapporto incrementale superiormente limitato.*

Se, invece, in A, $f-y'f_{y'}$ tende uniformemente ad un limite l, indipendente da y, per $y'\to-\infty$, e per ogni y' finito minore di un Y', indipendente da y, è $f-y'f_{y'}\neq l$, ogni pseudoestremaloide relativa alla $f(y,y')$ e appartenente ad A, è a rapporto incrementale inferiormente limitato.

15. - Supponiamo che la $f(x, y, y')$ ammetta anche, continua, la $f_y(x, y, y')$ in tutti i punti (x, y) di A e per tutti gli y' finiti. Allora:

Se alle ipotesi poste nel teorema del n.º 12 si aggiunge l'altra che, per $y'\to+\infty$, sia verificata la condizione considerata nel n.º 13 oppure quella del n.º 14, e così pure, per $y'\to-\infty$, ognuno degli archi $\overline{C}_0$ del teorema citato è un'estremaloide a rapporto incrementale limitato.

Ed infatti, in virtù dei risultati dei n.i 12, 13 e 14, ognuno degli archi $\overline{C}_0$ è a rapporto incrementale limitato e dall'osservazione II del n.º 1 segue che $\overline{C}_0$ è un'estremaloide.

16. - Se in un punto (x, y) del campo A è $|f_{y'}(x, y, y')|\to+\infty$, per $y'\to+\infty$, preso ad arbitrio un numero $M>0$, si può determinare un Y' tale che, per ogni $y'\geqslant Y'$ sia sempre $f_{y'}(x, y, y')>M$, oppure sempre $f_{y'}(x, y, y')<-M$, e pertanto

$$f(x, y, y')=f(x, y, Y')+\int_{Y'}^{y'} f_{y'}(x, y, y')dy'>f(x, y, Y')+M(y'-Y')$$

oppure, rispettivamente,

$$f(x, y, y')<f(x, y, Y')-M(y'-Y');$$

e perciò, per y' sufficientemente grande,

$$\frac{f(x,y,y')}{y'}>\frac{M}{2}, \qquad \text{oppure} \quad \frac{f(x,y,y')}{y'}<-\frac{M}{2},$$

e quindi, in ogni caso,

$$\left|\frac{f(x,y,y')}{y'}\right|\to+\infty \tag{28}$$

per $y'\to+\infty$. Ed analogamente per $y'\to-\infty$, se per $y'\to-\infty$ è $|f_{y'}(x,y,y')|\to+\infty$.

Viceversa, *se l'integrale I_C è quasi-regolare* ([11]) *e, in un punto (x, y) di A, per $y'\to+\infty$ (oppure $y'\to-\infty$) vale la* (28), *allora vale anche la* $|f_{y'}(x, y, y')|\to+\infty$. Ed infatti, per essere I_C quasi-regolare, la $f_{y'}$, come fun-

([11]) L'integrale I_C è *quasi-regolare* se la $f_{y'}(x, y, y')$ è in ogni punto (x, y) del campo A, una funzione della y' sempre non decrescente oppure sempre non crescente.

zione di y', è monotona e per $y' \to +\infty$ ammette limite, finito o no. Se questo limite fosse finito, chiamatolo l, si avrebbe, per ogni $y' \geqslant$ di un certo Y',

$$\left|\frac{f(x,y,y')}{y'}\right| \leqslant \left|\frac{f(x,y,Y')}{y'}\right| + (|l|+1)\left(1+\left|\frac{Y'}{y'}\right|\right)$$

e non potrebbe valere la (28). Analogamente, per $y' \to -\infty$.

Se l'integrale I_C è quasi-regolare e, in un punto (x, y) di A, per $y' \to +\infty$ (oppure per $y' \to -\infty$), vale la (28), *allora vale anche la* $|f - y'f_{y'}| \to +\infty$. Ed invero, se è $y' > Y' > 0$,

$$\{f(x,y,y') - y'f_{y'}(x,y,y')\} - \{f(x,y,Y') - Y'f_{y'}(x,y,Y')\} =$$
$$= Y'\{f_{y'}(x,y,Y') - f_{y'}(x,y,\tilde{y}')\} + y'\{f_{y'}(x,y,\tilde{y}') - f_{y'}(x,y,y')\},$$

con $f_{y'}(x,y,\tilde{y}')$ compreso fra $f_{y'}(x,y,y')$ e $f_{y'}(x,y,Y')$. Supponendo, per fissare le idee, I_C quasi-regolare positivo, si ha

$$f_{y'}(x,y,Y') \leqslant f_{y'}(x,y,\tilde{y}') \leqslant f_{y'}(x,y,y')$$

onde

(29) $$\{f(x,y,y') - y'f_{y'}(x,y,y')\} - \{f(x,y,Y') - Y'f_{y'}(x,y,Y')\} \leqslant$$
$$\leqslant Y'\{f_{y'}(x,y,Y') - f_{y'}(x,y,y')\}$$

e siccome, per quanto si è provato più sopra, è $f_{y'}(x,y,y') \to +\infty$ per $y' \to +\infty$, ne viene il risultato annunciato.

Si ragiona nello stesso modo se è $y' < Y' < 0$, con $y' \to -\infty$ ([12]).

Osservazione. - Se, ad ogni parte limitata A' del campo A, corrispondono tre numeri a, m_1, m_2, con $a > 1$, $m_1 > 0$, in modo che sia, per ogni (x, y) di A' e per ogni y' finito,

$$f(x,y,y') \geqslant m_1 |y'|^a + m_2,$$

la condizione (28) è verificata per $|y'| \to +\infty$; ed è verificata uniformemente in tutto A'.

CAPITOLO III.

Le estremanti degli integrali quasi-regolari normali.

17. - Vogliamo ora occuparci delle proprietà delle estremanti degli integrali quasi-regolari normali, indipendentemente dalle ipotesi espresse dalle disuguaglianze (2) e (25). Ammetteremo, a questo scopo, e in tutto il presente capitolo, che la funzione $f(x, y, y')$ e la sua derivata parziale $f_{y'}(x, y, y')$ abbiano, finite e

---

([12]) Osserviamo che dalla $|f - y'f_{y'}| \to +\infty$, per $y' \to +\infty$ (oppure $y' \to -\infty$), non segue affatto la (28) anche supponendo che I_C sia quasi-regolare. Per convincersene, basta considerare la funzione $f(x,y,y')$ uguale a $\frac{1}{2}(y'-1)$ per $y' \leqslant 1$ e uguale a $y' - \sqrt{y'}$ per $y' \geqslant 1$.

continue, tutte le loro derivate parziali dei primi due ordini, in ogni punto (x, y) di A e per ogni valore finito di y'.

Con queste ipotesi, possiamo dimostrare il seguente teorema:

Se I_C è un integrale quasi-regolare normale;

se C_0 è una curva ordinaria minimante per I_C in una classe K di curve ordinarie C;

se $\overline{C}_0$ $[y=y_0(x),\ a \leqslant x \leqslant b]$ è un arco della C_0 avente tutti i suoi punti, ad eccezione al più di quelli terminali, interni al campo A e di indifferenza rispetto ad A ed a K;

allora:

1°) *in ogni punto di $\overline{C}_0$ esiste sempre la tangente (tangente a destra nel primo punto terminale e tangente a sinistra nel secondo) ed essa varia sempre con continuità;*

2°) *eccettuati i punti di (a, b) appartenenti ad un insieme Ω chiuso e di misura nulla (che può anche non esistere), in tutti gli altri la $y_0'(x)$ è finita e continua, ed è verificata l'equazione di Eulero*

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0. \tag{30}$$

Che la tangente (nel senso indicato, per i punti terminali) esista sempre su $\overline{C}_0$ risulta da quanto è stato stabilito nei citati *Fondamenti....* (Vol. II, pag. 368). Inoltre, sempre da quanto fu stabilito nel luogo ora indicato, risulta anche che, se x_0 è un punto di (a, b) in cui la $y_0'(x)$ è finita ed in cui è, di più, $f_{y'y'}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) \neq 0$, il punto $(x_0, y_0(x_0))$ della $\overline{C}_0$ è *interno* ad un arco di tale curva che è un'*estremale*, oppure è il primo o il secondo punto terminale di un simile arco, se è $x_0=a$ o $x_0=b$, rispettivamente. Pertanto, la $y_0'(x)$ è continua per $x=x_0$.

Sia ora $\bar{x}$ un punto di (a, b) in cui la $y_0'(x)$ risulta finita, ed è

$$f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y_0'(\bar{x})) = 0.$$

Supponiamo, se è possibile, che in $\bar{x}$ la $y_0'(x)$ non sia continua. Allora, detti m e M rispettivamente il minimo ed il massimo limite dei valori di $y_0'(x)$ per $x \to \bar{x}$ (minimo e massimo limite che potranno anche essere infiniti), avremo $m < M$. Scegliamo un μ in modo che si abbia $m < \mu < M$ e $f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), \mu) \neq 0$; fissiamo poi due numeri maggiori di zero, δ e η, in modo che, per tutti gli x di (a, b) soddisfacenti alla disuguaglianza $|x-\bar{x}| < \delta$ e per tutti i μ' tali che $|\mu' - \mu| < \eta$, sia sempre

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), \mu') \neq 0.$$

Potremo sempre trovare, vicini ad $\bar{x}$ quanto vogliamo, due punti x' e x'' in maniera che risulti

$$y_0'(x') < \mu < y_0'(x''),$$

e quindi anche (compreso fra x' e x'') un x_1 con

$$y_0'(x_1)=\mu.$$

Allora, per quanto si è già detto, il punto $(x_1, y_0(x_1))$ è *interno* ad un arco a di $\overline{C}_0$, tutto contenuto fra le rette $x=\bar{x}-\delta$ e $x=\bar{x}+\delta$, che è un'estremale. Ma se δ è stato preso sufficientemente piccolo, su tutto l'arco a è

$$|y_0'(x)-y_0'(x_1)|<\frac{\eta}{2} \quad (^{13})$$

ed il massimo di tali archi a deve necessariamente contenere il punto $(\bar{x}, y_0(\bar{x}))$ come punto interno se è $a<\bar{x}<b$, come primo o secondo punto terminale se è $\bar{x}=a$ o $\bar{x}=b$, rispettivamente. Dunque, anche nel punto $\bar{x}$ la $y_0'(x)$ risulta continua, e $(\bar{x}, y_0(\bar{x}))$ è un punto interno o primo o secondo punto terminale di un arco di estremale, a seconda che è $a<\bar{x}<b$ o $\bar{x}=a$ o $\bar{x}=b$.

Restano a considerarsi i punti di (a, b) in cui la $y_0'(x)$ è infinita. *Indicheremo con Ω l'insieme di questi punti.* Dopo quanto si è già veduto, Ω risulta chiuso; e risulta pure di misura nulla, perchè la $y_0(x)$ è funzione assolutamente continua. Proviamo che anche nei punti della $\overline{C}_0$ corrispondente ad Ω la tangente varia con continuità. Sia ω un punto di Ω e, per fissare le idee, supponiamo che si abbia $y_0'(\omega)=+\infty$. Detto m il minimo limite dei valori di $y_0'(x)$ per $x\to\omega$, se la tangente a $\overline{C}_0$ non variasse con continuità nel punto $(\omega, y_0(\omega))$ dovrebbe essere $m<+\infty$. Se così fosse, fissato un numero finito $\mu>m$ e tale che $f_{y'y'}(\omega, y_0(\omega), \mu)\neq 0$, ripetendo il ragionamento fatto più sopra si giungerebbe alla conclusione che $y_0'(\omega)$ dovrebbe essere finito. Con ciò la proposizione enunciata è provata.

18. - *Per l'arco $\overline{C}_0$ considerato nel teorema del numero precedente valgono i risultati stabiliti per le estremaloidi nei n.i 3, 4, 5, 6, 7, purchè si aggiunga la condizione che la $f_y(x, y_0(x), y_0'(x))$ risulti integrabile su (a, b); valgono pure i risultati stabiliti per le estremaloidi nei n.i 9 e 10; valgono, infine, anche i risultati dati per le pseudoestremaloidi nei n.i 13 e 14, purchè si aggiunga la condizione che la $f_x(x, y_0(x), y_0'(x))$ risulti integrabile su (a, b).*

Supponiamo verificata la condizione posta nel teorema del n.° 3 con l'aggiunta dell'integrabilità di $f_y(x, y_0(x), y_0'(x))$ su (a, b). Allora, per ogni intervallo di (a, b) contiguo all'insieme Ω definito nel numero precedente, l'arco corrispondente di $\overline{C}_0$ risulta un'estremaloide e su di essa, per il n.° 3, la $y_0'(x)$ resta superiormente limitata. Nei punti terminali di tale arco (esclusi eventualmente quelli coincidenti coi punti terminali di $\overline{C}_0$) è dunque $y_0'(x)=-\infty$. Ma ogni punto

---

(13) Loc. cit. in (1), n.° 108.

di Ω, che non sia un estremo di un intervallo contiguo, è punto di accumulazione di tali estremi; e per la continuità della tangente su tutto $\overline{C}_0$, ne viene che, in ogni punto di Ω, è $y_0'(x) = -\infty$, e la $y_0(x)$ è a rapporto incrementale superiormente limitato su tutto $\overline{C}_0$.

Analogamente per i risultati corrispondenti a quelli dei n.i 4, 5, 6, 7.

Per provare i risultati corrispondenti a quelli dei n.i 9 e 10, basta ripetere per l'arco $\overline{C}_0$ i ragionamenti fatti nei numeri detti per le estremaloidi.

Per quanto, infine, riguarda i risultati corrispondenti a quelli dei n.i 13 e 14, basta osservare che, per l'ammessa integrabilità di $f_x(x, y_0(x), y_0'(x))$ su (a, b), ogni intervallo contiguo a Ω dà su $\overline{C}_0$ un arco che è una pseudoestremaloide.

19. - *Se, sull'arco $\overline{C}_0$ considerato nel teorema del n.° 17, è quasi dappertutto*

$$f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) \geqslant \varphi(x), \qquad (\text{oppure } f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) \leqslant \varphi(x)) \tag{31}$$

con $\varphi(x)$ funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) in (a, b), e se, inoltre, $|f_{y'}(x, y, y')|$, in tutti i punti (x, y) di $\overline{C}_0$, tende uniformemente a $+\infty$ per $|y'| \to +\infty$, allora la $y_0'(x)$ può essere infinita soltanto nei punti terminali di $\overline{C}_0$, e si ha $y_0'(a) < +\infty$, $y_0'(b) > -\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(a) > -\infty$, $y_0'(b) < +\infty$).

Sia, infatti, (c, d) un intervallo di (a, b) contiguo all'insieme Ω definito nel n.° 17, e indichiamo con (x_1, x_2) un intervallo *interno* a (c, d). In (x_1, x_2) la $y_0'(x)$ è sempre finita e continua e l'arco corrispondente su $\overline{C}_0$ è perciò un'estremale. È pertanto

$$\int_{x_1}^{x_2} f_y(x, y_0, y_0')dx = f_{y'}(x_2, y_0(x_2), y_0'(x_2)) - f_{y'}(x_1, y_0(x_1), y_0'(x_1)). \tag{32}$$

Osserviamo ora che, se l'insieme Ω esiste effettivamente, per le condizioni qui poste, per essere $\overline{C}_0$ un arco di curva minimante come è detto nell'enunciato del teorema del n.° 17, e per essere I_C un integrale quasi-regolare normale, questo integrale deve risultare *quasi-regolare positivo* e pertanto nei punti di $\overline{C}_0$ deve essere

$$f_{y'}(x, y, y') \to +\infty, \qquad \text{per } y' \to +\infty,$$
$$f_{y'}(x, y, y') \to -\infty, \qquad \text{per } y' \to -\infty.$$

Se quindi, nella (32), facciamo tendere x_1 a c, vediamo che, per la (31), il primo membro dell'uguaglianza o resta finito o tende a $+\infty$ (oppure, rispettivamente, a $-\infty$), e vediamo perciò che $y_0'(x_1)$ non può tendere a $+\infty$ (oppure, rispettivamente, a $-\infty$). Dunque o è $y_0'(c) = -\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(c) = +\infty$) oppure c non appartiene ad Ω, il che può avvenire soltanto se è $c = a$, con a non appartenente ad Ω. Analogamente, facendo tendere x_2 a d, otteniamo $y_0'(d) > -\infty$

(oppure, rispettivamente, $y_0'(d) < +\infty$). Da ciò risulta che non possono esistere punti isolati di Ω *interni* ad (a, b) e che Ω non può neppure avere dei punti di accumulazione, data la continuità della variazione della tangente su $\overline{C}_0$. Se ne conclude che ad Ω possono tutt'al più appartenere soltanto a e b, e che si ha $y_0'(a) < +\infty$, $y_0'(b) > -\infty$ (oppure, rispettivamente, $y_0'(a) > -\infty$, $y_0'(b) < +\infty$).

20. - *Se, sull'arco $\overline{C}_0$ considerato nel teorema del n.° 17, è quasi dappertutto*

$$f_x(x, y_0(x), y_0'(x)) \geqq \varphi(x), \qquad (\text{oppure } f_x(x, y_0(x), y_0'(x)) \leqq \varphi(x)) \tag{33}$$

con $\varphi(x)$ funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) in (a, b), e se, inoltre, $|f-y'f_{y'}|$, in tutti i punti (x, y) di $\overline{C}_0$, tende uniformemente a $+\infty$ per $|y'| \to +\infty$, allora la $y_0'(x)$ è, in (a, b), ovunque finita, eccettuato al più l'estremo a (oppure, rispettivamente, b).

Si consideri, anche qui, un intervallo (x_1, x_2) *interno* ad un intervallo (c, d), di (a, b), contiguo all'insieme Ω del n.° 17. Per quanto si è stabilito nel n.° 12 (osservazione II), l'arco di $\overline{C}_0$ corrispondente a (x_1, x_2) è una pseudoestremaloide e può scriversi

$$\int_{x_1}^{x_2} f_x(x, y_0, y_0')dx = [f-y'f_{y'}]_{x_2} - [f-y'f_{y'}]_{x_1}, \tag{34}$$

dove, per semplicità di scrittura, è

$$[f-y'f_{y'}]_{x_i} = f(x_i, y_0(x_i), y_0'(x_i)) - y_0'(x_i) f_{y'}(x_i, y_0(x_i), y_0'(x_i)).$$

Se Ω esiste effettivamente, per le ragioni già esposte al numero precedente l'integrale I_C risulta *quasi-regolare positivo*, e dalla (29) segue che, per $y' > 0$, l'espressione $f-y'f_{y'}$, come funzione della sola y', è *non crescente*; ed analogamente si prova che la medesima espressione, per $y' < 0$ è *non decrescente.* Deve dunque essere, in ogni punto (x, y) di $\overline{C}_0$, in virtù dell'ipotesi ammessa nell'enunciato,

$$f-y'f_{y'} \to -\infty, \tag{35}$$

per $|y'| \to +\infty$.

Allora, facendo tendere, nella (34), x_2 a d (oppure, rispettivamente, x_1 a c), vediamo che d (oppure, rispettivamente, c) non può appartenere ad Ω, perchè se vi appartenesse, si avrebbe per il primo membro il limite $-\infty$ (oppure, rispettivamente, $+\infty$) in contrasto con la (33). Dunque deve essere $d=b$ (oppure, rispettivamente, $c=a$) con b (oppure, rispettivamente, a) *non* appartenente ad Ω. E siccome ciò vale per ogni intervallo contiguo ad Ω, ne risulta che Ω può contenere al più il solo punto a (oppure, rispettivamente, b).

21. - Termineremo mostrando, con un esempio, che l'insieme Ω, considerato nel teorema del n.° 17, può esistere effettivamente anche nel caso di un integrale $I_{\mathcal{C}}$ regolare [14].

Consideriamo, nel piano (x, y), i due punti $P_1 \equiv (0, p)$ e $P_2 \equiv (1, p)$. Se p è positivo e sufficientemente grande, esiste nel piano (x, y) un arco Γ di catenaria, avente i punti terminali in P_1 e P_2, il quale dà il minimo per l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} y\,ds$$

(dove ds rappresenta il differenziale della lunghezza dell'arco della $\mathcal{C}$), nella classe di tutte le curve continue e rettificabili che congiungono P_1 e P_2 e che giacciono nel semipiano $y \geqslant 0$. Indichiamo con R il rettangolo avente per vertici opposti il punto P_2 ed il punto $(0, \delta)$, con δ positivo e minore della minima ordinata y di Γ, e fissiamo, nel piano (x, y), un nuovo sistema di assi cartesiani ortogonali (ξ, η) aventi la stessa origine degli assi x e y, e scelti in modo che l'asse della η risulti parallelo alla tangente all'arco Γ nel punto P_2.

Siano ξ_1 e ξ_2 i valori di ξ corrispondenti a P_1 e P_2 (e supponiamo $\xi_1 < \xi_2$), e

$$y = a\xi + b\eta$$

la y di un generico punto del nostro piano, avente per coordinate, nel nuovo sistema, ξ e η.

L'arco Γ, riferito al nuovo sistema di assi, ammetterà un'equazione

$$\eta = \eta_0(\xi),$$

con $\eta_0(\xi)$ funzione assolutamente continua; ed è evidente che, fra tutte le curve del nostro piano congiungenti P_1 e P_2, tutte giacenti nel rettangolo R e rappresentabili, se riferite agli assi ξ e η, con un'equazione $\eta = \eta(\xi)$, dove $\eta(\xi)$ è funzione assolutamente continua, Γ dà il minimo per l'integrale

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} (a\xi + b\eta)\sqrt{1 + \eta'^2}\,d\xi, \tag{36}$$

il quale, nel rettangolo R è un *integrale regolare.*

Per la curva minimante Γ, la $\eta_0'(\xi)$ risulta finita e continua per ogni ξ tale che $\xi_1 \leqslant \xi < \xi_2$; risulta invece infinita per $\xi = \xi_2$. Dunque, per questa curva minimante, l'insieme Ω di cui si parla nell'enunciato del teorema del n.° 17, esiste effettivamente. Osserviamo che Γ, nel sistema di riferimento (ξ, η), è un'estremaloide relativa all'integrale (36).

---

[14] L'integrale $I_{\mathcal{C}}$ è *regolare*, se, in ogni punto (x, y) del campo A, è sempre $f_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$, per tutti i valori finiti di y'.