Giacomo Albanese

Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche (memoria seconda)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 2 (1934), p. 149-182
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_2_149_0>

CORRISPONDENZE ALGEBRICHE FRA I PUNTI DI DUE SUPERFICIE ALGEBRICHE

(MEMORIA SECONDA)

di GIACOMO ALBANESE (Pisa).

In questa memoria continuo lo studio delle corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche F ed F', iniziato nella memoria I, collo stesso titolo e pubblicata nel fascicolo precedente di questi stessi Annali [1]. Nella memoria I ho trattato il caso generale di due superficie F ed F' distinte o coincidenti; ora voglio occuparmi più particolarmente del caso di F ed F' coincidenti.

Superate le difficoltà relative all'introduzione del concetto di corrispondenza a valenza zero, è facile introdurre e studiare il concetto di corrispondenza a valenza intera qualunque. Valgono teoremi analoghi al caso delle curve che nel § 2 applico ad estendere un principio di corrispondenza sulle superficie, dovuto allo ZEUTHEN. Dimostro che il caso trattato dallo ZEUTHEN corrisponde a quello di corrispondenza a valenza positiva o nulla e faccio vedere che, *nelle stesse ipotesi dello Zeuthen*, il principio vale anche nel caso di corrispondenza a valenza negativa. Qualche applicazione mostra l'utilità dall'estensione.

Nel § 3 passo alla rappresentazione trascendente di una corrispondenza T qualunque, estendendo per quanto è possibile il noto procedimento dell'HURWITZ per le curve. Ne seguono una notevole successione di proprietà sulla trasformazione che T opera sugli integrali e sui cicli della superficie e da cui traggo fra l'altro l'importante teorema:

Sopra ogni superficie a moduli generali qualunque trasformazione T è una corrispondenza a valenza.

Un particolare modo di costruire un sistema completo di cicli tridimensionali indipendenti della superficie F, intimamente legato ai sistemi algebrici di curve esistenti su F e l'estensione alle superficie di un notevole criterio topologico (dovuto per le curve a ROSATI e CHISINI) per giudicare se le curve di un sistema algebrico appartengono o no ad uno stesso sistema lineare; mi permette di trat-

---

[1] ALBANESE: *Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche.* Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Vol. III, fasc. I, 1934, pp. 1-26. Citerò questa memoria con: M. I. Vedasi anche la nota con lo stesso titolo, pubblicata nel Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Anno XI, n.° 3, Giugno 1932.

tare rapidamente e per via geometrica della trasformazione che T opera sui cicli tridimensionali della superficie. Dal nuovo procedimento si possono ottenere gran parte dei risultati precedenti, e un nuovo modo di legare, per via puramente algebrica, ad ogni trasformazione T, certe matrici caratteristiche, la cui importanza apparirà in uno studio successivo.

Chiude il lavoro la dimostrazione del teorema: *la totalità delle corrispondenze di una superficie F ammette una base e il numero base non supera il doppio del quadrato dell'irregolarità della superficie.* La base esiste anche per le corrispondenze fra due distinte superficie F ed F' e il numero base non supera il doppio del quadrato dell'irregolarità di quella delle due superficie che ha irregolarità minore.

§ 1.

Corrispondenze a valenza.

1. - Conserveremo per quanto è possibile tutte le notazioni della memoria I. Sia F una superficie algebrica, irriducibile e d'irregolarità q.

Diremo che una corrispondenza T fra i punti di F, è a valenza γ *intera* positiva, negativa o nulla quando detto $\{A\}$ un sistema continuo di curve di F, composto d'∞^q sistemi lineari e $[A']$ il sistema delle curve corrispondenti; le curve $\gamma A+A'$, al variare comunque di A in $\{A\}$, appartengono costantemente ad uno stesso sistema lineare $|\gamma A+A'|$. Sicchè dette A ed A_1 due *qualunque* curve di $\{A\}$, si dovrà avere la relazione caratteristica:

$$\gamma A+A'\equiv\gamma A_1+A_1'. \tag{1}$$

La definizione si giustifica osservando:

1°) se la proprietà si verifica per un particolare sistema $\{A\}$, composto come si è detto d'∞^q sistemi lineari, essa si verifica per qualunque altro sistema continuo $\{B\}$ (sia o no composto da ∞^q sistemi lineari).

Dette infatti B e B_1 due qualunque curve di $\{B\}$, per le ipotesi fatte esisterà sempre in $\{A\}$ una curva A_1, tale che sia:

$$B_1\equiv B+A-A_1,$$

dette perciò B' e B_1' le omologhe di B e B_1, si avrà:

$$B_1'\equiv B'+A'-A_1'. \tag{2}$$

D'altra parte moltiplicando la precedente per γ si ha:

$$\gamma B_1\equiv\gamma B+\gamma A-\gamma A_1,$$

che insieme alla (2) e alla (1), ci dà:

$$\gamma B_1+B_1'\equiv\gamma B+B'.$$

2°) per $\gamma=0$ la definizione di corrispondenza a valenza zero, coincide con quella data al n.° 15 M. I, in virtù dell'inversa della proprietà *b*) dello stesso numero.

3°) *Una corrispondenza non può avere due valenze γ e γ', a meno che la superficie non sia regolare* ($q=0$), *dove evidentemente ogni corrispondenza è a valenza arbitraria, come sulle curve razionali.*

Invero dalle due relazioni:

$$\gamma A + A' \equiv \gamma A_1 + A_1', \qquad \gamma' A + A' \equiv \gamma' A_1 + A_1'$$

segue:

$$(\gamma-\gamma')A \equiv (\gamma-\gamma')A_1,$$

qualunque siano A e A_1 in $\{A\}$ e per un noto teorema di Severi (2), $A \equiv A_1$, contro l'ipotesi fatta sul sistema $\{A\}$, a meno che, come si è detto, non sia $q=0$.

Con queste osservazioni che sfruttano importanti proprietà dei sistemi continui di curve di una superficie la definizione di valenza risulta univoca, indipendente dal sistema di partenza $\{A\}$ e perfettamente analoga a quella nota per le corrispondenze fra i punti di una curva. Ne seguono quindi le stesse proprietà, che riepiloghiamo brevemente.

La corrispondenza $T+S$, somma di due corrispondenze T ed S a valenza t e s, è pur essa a valenza e la sua valenza è $t+s$.

Dette infatti C_t e C_s le omologhe per T ed S di una stessa curva C, si avrà:

$$tA + A_t \equiv tB + B_t, \qquad sA + A_s \equiv sB + B_s$$

e sommando

$$(t+s)A + (A_t + A_s) \equiv (t+s)B + (B_t + B_s),$$

che dimostra la proprietà.

La corrispondenza TS, prodotto di due corrispondenze T ed S a valenza t ed s, è pur essa a valenza e la sua valenza è $-ts$.

Dette infatti A_{ts} e B_{ts} le omologhe nella S delle curve A_t e B_t, si ha:

$$tA + A_t \equiv tB + B_t, \qquad sA_t + A_{ts} \equiv sB_t + B_{ts}$$

e sottraendo dalla seconda la prima moltiplicata per s:

$$-tsA + A_{ts} \equiv -tsB + B_{ts},$$

che prova l'asserto.

Se ne deduce, come per le curve, che le corrispondenze a valenza di una superficie F formano un gruppo G, quelle a valenza negativa formano un sottogruppo di G e quelle a valenza zero un sottogruppo invariante di G.

2. - Corrispondenze elementari. — Sia $|C|$ una rete di curve di F, senza punti base, di grado n e priva di curve fondamentali. Le curve di $|C|$ passanti per

(2) Severi: *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard.* Rend. Circolo mat. di Palermo, t. XXI, 1906, n.° 12.

un punto P_1 di F formano un fascio che avrà oltre P_1, altri $n-1$ punti base P_2, $P_3, \dots, P_n$. Il gruppo $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ è individuato da uno qualunque dei suoi punti P_i. La totalità di tutti i possibili gruppi analoghi formano una involuzione I_n^2.

Sopra ogni curva C della rete, I_n^2 subordina l'involuzione g_n^1 definita dalla serie lineare che la rete stacca su C (serie caratteristica).

La corrispondenza simmetrica E, di indici $n-1$, $n-1$, che si ottiene chiamando omologhi due punti distinti, P_i, P_j, di uno stesso gruppo della I_n^2, la diremo una corrispondenza *elementare* della superficie.

Una corrispondenza elementare ha la valenza uno.

Sia infatti $\{A\}$ il solito sistema, A e A_1 due sue curve, A' e A_1' le corrispondenti nella E.

Le curve $A+A'$, A_1+A_1', staccano sopra ogni curva della rete due gruppi equivalenti a tanti gruppi della sua serie caratteristica g_n^1, quanti sono i punti che A od A_1 staccano su C. Ne segue che sopra C si ha:

$$AC+A'C \equiv A_1C+A_1'C.$$

Ossia $A+A'$ e A_1+A_1' staccano gruppi equivalenti su tutte le curve della rete, e siccome $A+A'$ e A_1+A_1' appartengono ad uno stesso sistema continuo, così, in ordine ad un criterio di equivalenza del SEVERI [3], si avrà:

$$A+A' \equiv A_1+A_1'$$

e perciò E è a valenza uno.

Ne segue, come sulle curve, che:

Sopra ogni superficie F esistono corrispondenze a valenza arbitraria (positiva, negativa o nulla).

Notiamo che una corrispondenza

$$T = E_1 + E_2 + \dots + E_k, \tag{3}$$

somma di k corrispondenze elementari, è simmetrica e perciò T e la sua inversa T^{-1} hanno la stessa valenza positiva k.

Analogamente la corrispondenza:

$$S = ET = EE_1 + EE_2 + \dots + EE_k \tag{4}$$

e la sua inversa

$$S^{-1} = T^{-1}E = E_1E + E_2E + \dots + E_kE \tag{5}$$

hanno entrambe la stessa valenza negativa $-k$, e perciò:

Assegnato ad arbitrio un numero intero k (positivo, negativo o nullo) *è*

---

[3] SEVERI, loc. cit. in [2].

sempre possibile trovare su F, una corrispondenza S, tale che essa e la sua inversa S^{-1} abbiano la valenza k.

Ne segue, come per le curve, che sopra una superficie F:

L'inversa T^{-1} di una corrispondenza T a valenza k, è a valenza e la sua valenza è lo stesso numero k.

Sia infatti S una corrispondenza a valenza $-k$ insieme alla sua inversa S^{-1}. La corrispondenza $S+T$ sarà a valenza zero e perciò anche la sua inversa $S^{-1}+T^{-1}$ è a valenza zero. Dette allora A e B due curve di $\{A\}$, A_1 e B_1, A_2 e B_2 le curve che ad esse corrispondono per la T^{-1} ed S^{-1}, si avrà:

$$A_1+A_2 \equiv B_1+B_2.$$

Ma essendo S^{-1} a valenza $-k$, sarà anche:

$$-kA+A_2 \equiv -kB+B_2$$

e sottraendo:

$$kA+A_1 \equiv kB+B_1$$

la quale prova appunto che T^{-1} è a valenza k, come la T.

Osservazione. - Il teorema precedente ha molta importanza in tutta la teoria delle corrispondenze fra i punti di una superficie. Come per le curve esso è conseguenza del teorema: *se una corrispondenza è a valenza zero anche la sua inversa è a valenza zero.* Quindi nel caso delle superficie tutte le difficoltà sono concentrate in quest'ultima proprietà.

3. - Esempi di corrispondenza a valenza positiva o nulla si possono ottenere con ZEUTHEN, alla maniera seguente.

Supponiamo F nello spazio ordinario e di avere ivi una famiglia di ∞^2 curve C_P in corrispondenza biunivoca coi punti P di F. Facciamo corrispondere ad ogni punto P i punti $P_1, P_2, \ldots, P_\beta$, distinti da P ove C_P incontra la superficie.

Supposto che ogni C_P abbia incontro k-uplo ($k \geqslant 0$) colla superficie in P, la corrispondenza T, che così nasce fra i punti di F, è a valenza k (positiva o nulla).

Sia infatti $\{A\}$ un sistema continuo di curve di F. Mentre P descrive una curva A, la curva C_P descrive una superficie Φ_A dello spazio che incontra F nella curva A contata k volte e nella curva A' che la T fa corrispondere ad A. Al variare di A in $\{A\}$, la superficie Φ_A varierà descrivendo un sistema di superficie dello stesso ordine totalmente contenuto nel sistema lineare delle superficie di quell'ordine. Ne segue che la curva $kA+A'$, al variare comunque di A in $\{A\}$, varia in un sistema lineare $|kA+A'|$ e perciò T è a valenza k. Una corrispondenza così fatta la diremo corrispondenza di ZEUTHEN.

Questo caso si presenta certamente se la corrispondenza T è definità mediante due sole equazioni algebriche:

$$\varphi(xyz\,|\,x'y'z')=0, \qquad \psi(xyz\,|\,x'y'z')=0 \tag{3}$$

essendo x, y, z e x', y', z' le coordinate di due punti corrispondenti della superficie F e perciò insieme alla (3) si avrà:

$$f(xyz)=0, \qquad f(x'y'z')=0. \tag{4}$$

Per ogni punto $P\equiv(xyz)$ le (3) risultano due superficie dello spazio $(x'y'z')$ che con la loro intersezione definiscono la curva C_P da associare a P come si è detto sopra. I punti d'incontro di C_P con F, all'infuori eventualmente di P stesso, dànno i punti che T fa corrispondere a P. Se C_P ha punto k-uplo in P o più in generale contatto k-uplo con F in P, sarà $k \geqslant 0$ e T risulterà a valenza k. D'onde il teorema:

Una corrispondenza definita da due sole equazioni, è una corrispondenza di Zeuthen a valenza positiva o nulla.

Importante sarebbe qui vedere se il teorema è o no invertibile; rispondere cioè alla domanda:

Una corrispondenza a valenza positiva o nulla è sempre rappresentabile con due sole equazioni?

In caso affermativo la teoria delle corrispondenze sopra una superficie si semplifica fortemente e l'analogia con quella delle curve si rafforza: in caso negativo l'ulteriore sviluppo della nuova teoria presenterà altre difficoltà, e nuovi campi di ricerca.

Ho risoluto la questione affermativamente solo in casi particolari. Qui ricorderò solo tre casi.

1°) *Una trasformazione elementare E, di una qualunque superficie, è rappresentabile con due sole equazioni.*

La superficie F sia definita dalle (4) e la rete delle curve che determinano E sia data dalle (4) e dall'equazione:

$$\lambda_1\varphi_1(xyz)+\lambda_2\varphi_2(xyz)+\lambda_3\varphi_3(xyz)=0. \tag{5}$$

I punti $P'\equiv(x'y'z')$ corrispondenti ad un *dato* punto $P\equiv(xyz)$, oltre la (5) debbono verificare l'equazione:

$$\lambda_1\varphi_1(x'y'z')+\lambda_2\varphi_2(x'y'z')+\lambda_3\varphi_3(x'y'z')=0$$

per i medesimi valori delle λ_1, λ_2, λ_3, e perciò dovrà essere:

$$\begin{cases} \varphi_1(xyz)\varphi_2(x'y'z')-\varphi_1(x'y'z')\varphi_2(xyz)=0 \\ \varphi_1(xyz)\varphi_3(x'y'z')-\varphi_1(x'y'z')\varphi_3(xyz)=0. \end{cases}$$

Viceversa è chiaro che se due punti (xyz), $(x'y'z')$ verificano queste due equazioni insieme alle (4) essi si corrispondono nella E. Ne segue come corollario:

2°) *Una corrispondenza S somma di quante si vogliono corrispondenze elementari, è rappresentabile con due sole equazioni.*

3°) *Sopra una superficie Φ, con due fasci $\{A\}$ e $\{B\}$ di curve unisecantesi, una corrispondenza $T\equiv(1\beta)$ unirazionale e a valenza k positiva o nulla, è rappresentabile con due sole equazioni.*

Siano A' e B' le trasformate delle curve A e B. Per le ipotesi fatte, se A e B s'incontrano in P, le due curve A' e B' s'incontreranno nei *soli* punti P_1, $P_2,\ldots, P_\beta$ che la T fa corrispondere a P.

D'altra parte le curve $kA+A'$ e $kB+B'$ variano in sistemi lineari $|kA+A'|$, $|kB+B'|$, sistemi che a parte eventuali curve fisse, saranno staccate da due sistemi lineari di superficie dello spazio ambiente:

$$\varphi(x'y'z')=0, \qquad \psi(x'y'z')=0.$$

Possiamo sempre supporre che tra le curve dei due sistemi lineari $|kA+A'|$, $|kB+B'|$ e le superficie $\varphi=0$, $\psi=0$ vi sia corrispondenza biunivoca senza eccezione.

Ogni punto $P\equiv(xyz)$ di Φ, appartenendo ad una sola curva A e ad una sola curva B individua una curva $kA+A'$ e una curva $kB+B'$ e perciò individua una superficie $\varphi=0$ e una superficie $\psi=0$.

I sistemi semplicemente infiniti di superficie $\varphi=0$, $\psi=0$ che si ottengono al variare di P in Φ, dipenderanno razionalmente da P e perciò le loro equazioni saranno a coefficienti razionali in xyz:

$$\varphi(xyz\,|\,x'y'z')=0, \qquad \psi(xyz\,|\,x'y'z')=0.$$

Due punti $P\equiv(xyz)$, $P'\equiv(x'y'z')$ che verificano queste due equazioni insieme alle equazioni (4) della superficie, sono corrispondenti nella T e viceversa. C. v. d.

Sono evidentemente nelle condizioni della superficie Φ, le superficie rigate o trasformabili in rigate, le superficie di JACOBI, etc.

Osservazione. - Per le corrispondenze definite mediante due equazioni, il teorema che l'inversa di una corrispondenza a valenza zero è pur essa a valenza zero, si dimostra facilmente come per le curve.

Questo dimostra ancora di più quanto sia importante sapere se la corrispondenza a valenza positiva o nulla siano o no rappresentabili con due sole equazioni.

4. - Per avere esempi di corrispondenza a valenza negativa, ritorniamo alle curve C_P del numero precedente e supponiamo che ogni curva C_P sia spezzata in due curve B_P e D_P entrambe variabili con P; supponiamo inoltre che B_P incontri F in $\beta+\beta'$ punti P_1, $P_2,\ldots, P_\beta$, $P_{\beta+1},\ldots, P_{\beta+\beta'}$ tutti distinti da P e che D_P incontri F in $P_{\beta+1},\ldots, P_{\beta+\beta'}$ e nel punto P contato k volte.

La corrispondenza S che associa a P i punti P_1, $P_2,\ldots, P_\beta$, risulta come differenza delle due corrispondenze T e T' definite separatamente dalle curve B_P e D_P, La prima T è a valenza zero e la seconda T' a valenza k. Sicchè dette A e B

due curve di $\{A\}$, A', B'; A'', B''; A''', B''' le loro omologhe rispettivamente nella T, nella T' e nella S, si avrà:

$$kA+A''\equiv kB+B'', \qquad A''+A'''\equiv B''+B''',$$
$$A'\equiv A''+A''', \qquad B'\equiv B''+B'''$$

e per differenza $-kA+A'''\equiv -kB+B'''$, cioè $S=T-T'$ è a valenza $-k<0$.

Se poi le curve B_P hanno incontro h-punto con F in P, si conclude analogamente che S è a valenza $h-k$. Si noti che S è differenza di due corrispondenze di ZEUTHEN. In generale, una corrispondenza T che sia combinazione lineare di più corrispondenze $T_1, T_2, \ldots, T_k$, di ZEUTHEN in senso stretto:

$$T=\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2+\ldots+\lambda_k T_k,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ essendo interi positivi o negativi, la diremo corrispondenza di *Zeuthen generalizzata.*

Osservazione. - Chiudiamo questo numero osservando che mentre una corrispondenza a valenza zero è di rango nullo, una corrispondenza T a valenza $k\neq 0$ (positiva o negativa) è di *rango massimo* q.

Se esistesse infatti un sistema continuo S di curve $A, B, \ldots$ non equivalenti, alle quali T facesse corrispondere curve $A', B', \ldots$ di uno stesso sistema lineare, si avrebbe contemporaneamente $A'\equiv B'$, $kA+A'\equiv kB+B'$ e perciò $kA\equiv kB$, qualunque siano A e B in S e perciò essendo $k\neq 0$ per un ricordato teorema del SEVERI, sarebbe $A\equiv B$, contro l'ipotesi. L'indice di equivalenza r di T è perciò zero e il suo rango $\nu=q-r=q$.

5. - Le proprietà esposte portano ad una notevole applicazione al *principio di corrispondenza.* Converrà però premettere prima qualche altra osservazione sulle corrispondenze elementari.

Sia $|C|$ la rete che definisce una corrispondenza elementare E.

Il luogo degli elementi uniti della E è evidentemente la jacobiana J della rete che si esprime linearmente per le C e per le curve canoniche Γ di F, con la relazione:

$$J\equiv 3C+\Gamma.$$

Ad ogni punto P di J, la E fa corrispondere il punto P stesso ed altri $n-2$ punti il cui luogo D è la curva di diramazione relativa ad E.

Per determinare questo luogo, osserviamo che detto p il genere delle curve C, il numero dei punti comuni a C e J è $2(n+p-1)$ e perciò il gruppo omologo a JC sarà dato dalla relazione:

$$DC+2JC\equiv 2(n+p-1)C^2,$$

da cui segue,

$$D\equiv 2(n+p-1)C-2J$$
$$\equiv 2(n+p-4)C-2\Gamma.$$

Osservando poi che deve essere $J' \equiv D + J$ e che $J' \equiv 3(n-1)C + \Gamma'$, si trova:

$$\Gamma' \equiv (2p-n-2)C - \Gamma \equiv \theta C - \Gamma$$

dove $\theta = 2p - n - 2$ è quello che il SEVERI chiama il carattere d'immersione di C in F (4).

L'ultima relazione ci esprime la trasformata Γ' di una curva canonica Γ, per mezzo delle curve C della rete e Γ stessa.

Scritta sotto la forma $\Gamma' + \Gamma \equiv \theta C$ ci dice: *In una trasformazione elementare E, definita da una rete* $|C|$, *le aggiunte delle trasformate delle curve canoniche, appartengono al sistema* $|\theta C|$, *multiplo di* $|C|$, *secondo il suo carattere d'immersione* θ.

§ 2.

Sul principio di corrispondenza.

6. - Riprendiamo ora il principio di corrispondenza per le superficie dato dallo ZEUTHEN (5).

Lo ZEUTHEN suppone la superficie F immersa nello spazio ordinario, di ordine n, dotata di singolarità ordinarie (linea doppia nodale) e tratta delle corrispondenze $T \equiv (\alpha, \beta)$ che fanno corrispondere ad ogni punto P i β punti $P_1, P_2, \ldots, P_\beta$, ove F è incontrata (fuori di P) da una curva C_P dello spazio variabile con P e avente in P un punto k-uplo. Chiameremo T *corrispondenza di Zeuthen* in senso stretto.

Per quanto è stato detto al n.° 3 la corrispondenza T è perciò a valenza k positiva o nulla.

---

(4) SEVERI: *Il genere aritmetico e il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica.* Atti della R. Accademia di Torino, t. 37, 1902, n.° 1.

(5) ZEUTHEN: *Le principe de correspondance pour une surface algébrique.* Comptes Rendus, T. 143, 1906, pag. 491 e pag. 535. Lo stesso principio è stato recentemente ripreso dal SEVERI in tre note lincee: *La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica.* Rend. della R. Acc. dei Lincei. Vol. XVII, fasc. 9, 10 e 11 del maggio-giugno 1933. In esse, fra l'altro, è trattato a fondo un caso lasciato in ombra dallo ZEUTHEN. Il concetto di valenza quale è stato da noi esposto in questa memoria, nella memoria I e nella nota del Boll. dell'Unione mat. Italiana nel giugno 1932, non coincide col concetto di valenza di ZEUTHEN-SEVERI. Si può solo dire che se una corrispondenza T è a valenza k nel senso di ZEUTHEN-SEVERI, T è a valenza k nel senso nostro, ma non viceversa. Il concetto di valenza di ZEUTHEN-SEVERI è stato dal SEVERI magistralmente inquadrato nella sua recentissima teoria delle *serie di equivalenza.* Vedasi, SEVERI: *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* (Comm. math. helvetici, vol. 4, 1932); *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* (Memorie della R. Acc. d'Italia, 1932); *Nuovi contributi alla teoria delle serie*

In queste ipotesi lo ZEUTHEN (estendendo una formula dovuta al SALMON nel caso piano) dimostra che se T ha un numero finito x di punti uniti, questo numero è dato dalla formula:

$$x=\alpha+\beta+\gamma-k(I+1), \tag{VI}$$

α e β essendo gli indici della corrispondenza; γ il numero delle coppie di punti omologhi PP_i, che si trovano su due sezioni piane L_1, L_2 di F, diviso per l'ordine n di F, γ è cioè l'ordine della superficie descritta da C_P mentre P descrive una sezione piana di F, k come si è detto è la valenza positiva o nulla di T e I l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della superficie.

Se poi T ha x punti uniti isolati e una curva U di punti uniti, si ha invece la formula:

$$x+y+z-y_a=\alpha+\beta+\gamma-k(I+1), \tag{VII}$$

y essendo l'ordine di U, z l'ordine della rigata R delle tangenti ad F nei punti P di U che sono limiti delle rette PP_1 che uniscono due punti omologhi P_1P, venuti a coincidere nel punto P di U e y_a il numero dei punti ove U incontra la curva di contatto del cono circoscritto ad F da un punto generico M dello spazio.

Seguendo una traccia lasciata dallo ZEUTHEN, vogliamo dimostrare che la (VI) e la (VII) valgono per qualunque trasformazione di ZEUTHEN generalizzata.

Dice lo ZEUTHEN « *se i punti in cui la curva C_P incontra F si possono distribuire in più gruppi G_1, G_2,.... i termini della* (VII) *si possono scomporre nei termini relativi alle corrispondenze T_1, T_2,.... che nascono col far corrispondere a P rispettivamente G_1, G_2,...., si avrà così una formula del tipo:*

$$\sum(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i-x_i-y_i-z_i+y_{ai})=k(I+1)$$

la quale, supposte note le coincidenze di T_2, T_3,...., può servire a calcolare quelle relative a T_1. Può darsi allora che si abbia per T_1 una formula come la (VII) *con un valore di k, diciamolo k_1, negativo* ».

In tal modo però il valore k_1 legato a T_1, ha un significato puramente algebrico e potrebbe anche non essere intero e se T_2, T_3,.... sono prive di valenza, non è affatto detto che k_1 risulti la valenza di T_1, anche se questa è una corrispondenza a valenza.

---

di equivalenza, ecc. (Memoria della R. Acc. d'Italia, 1933); *Quelques théorie nouvelles en géométrie algébrique* (Comptes Rendus, 1933); *La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, fasc. 6, 7 e 8 del vol. XVII, 1933). Vedasi anche, ENRIQUES: *Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* (Rend. R. Acc. dei Lincei, dicembre 1932); COMESSATTI: *La serie canonica di una superficie algebrica* (Rend. R. Acc. dei Lincei, dicembre 1932); CAMPEDELLI: *Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* (Rend. R. Acc. dei Lincei, gennaio 1933).

L'osservazione di ZEUTHEN si può rendere più significativa, limitandola ad un caso concreto con le seguenti considerazioni.

Se una corrispondenza T è combinazione lineare di più altre: $T=\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2+....$, λ_1, λ_2,.... essendo interi qualunque, i numeri x, y, z, y_a, α, β, γ relativi a T si esprimono con la stessa combinazione dei numeri analoghi, relativi a T_1, T_2,...., per esempio $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+....$, etc. Se perciò questi numeri si conoscono per T_1, T_2,.... essi si possono calcolare per T. Se poi T, T_1, T_2,.... sono a valenza k, k_1, k_2,...., per quanto è stato da noi dimostrato al n.° 1, anche fra questi numeri si avrà la relazione: $k=\lambda_1 k_1+\lambda_2 k_2+.....$ Se ne deduce che se la (VI) (o la (VII)) vale per T_1, T_2,.... essa vale anche per T *col predetto significato di k come valenza.* In particolare, *supposto che T_1, T_2,.... siano corrispondenze di Zeuthen in senso stretto* la (VI) e la (VII) *valgono anche per T*, cioè *valgono per qualunque corrispondenza di Zeuthen generalizzata, a valenza k qualunque, anche negativa.*

Volendo maggiormente precisare, supponiamo per esempio che T sia una corrispondenza di *Zeuthen generalizzata* a valenza negativa $-k$. Detta E una corrispondenza elementare, la trasformazione $S=T+kE$ sarà anche essa di *Zeuthen generalizzata* e sarà perciò applicabile la (VII).

Per il teorema del n.° 1, S sarà una corrispondenza a valenza zero e i suoi punti uniti saranno i punti uniti di T più k volte i punti uniti di E.

Quest'ultimi per quanto si è detto nel numero precedente sono dati dai punti della jacobiana J della rete $|C|$ che definisce E.

Supponiamo dapprima che T abbia un numero finito x di punti uniti isolati e indichiamo con y', z', y'_a i valori di y, z, y_a relativi alla curva J, con α, β, γ i numeri relativi a T e applichiamo la (VII) alla corrispondenza S che come si è detto è a valenza zero; si avrà

$$x+y'+z'-y'_a=\alpha'+\beta'+\gamma', \tag{7}$$

α', β', γ' essendo i numeri α, β, γ relativi ad S.

Possiamo sempre supporre che la rete $|C|$ che definisce E, sia la rete delle sezioni piane di F per un punto generico O dello spazio. La jacobiana della rete sarà allora la curva di contatto del cono Γ circoscritto da O ad F ed il suo ordine sarà $2(n+p-1)$, p essendo il genere delle sezioni piane di F. La rigata R relativa ad E coinciderà col cono Γ stesso, sicchè detto n' la classe di F (grado di detta jacobiana) si avrà facilmente:

$$\begin{cases} \alpha'=\alpha+k(n-1), \quad \beta'=\beta+k(n-1), \quad \gamma'=\gamma+k(n-1) \\ y'=z'=2k(n+p-1), \quad y'_a=kn', \end{cases} \tag{8}$$

d'onde sostituendo nella (7):

$$x+4k(n+p-1)-kn'=\alpha+\beta+\gamma+3k(n-1)$$

ossia

$$x = \alpha + \beta + \gamma + k(n' - n - 4p + 1). \tag{9}$$

Ma dalle ipotesi fatte, per l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della superficie si ha:

$$I = n' - n - 4p$$

e quindi, in definitiva:

$$x = \alpha + \beta + \gamma + k(I + 1)$$

che coincide con la (VI) se in essa si pone $-k$ al posto di k.

Se poi supponiamo che T possiede un numero finito x di punti uniti isolati e una curva U (riducibile o no) di punti uniti, la corrispondenza S, avrà lo stesso numero x di punti uniti isolati e la curva $U + kJ$ di punti uniti.

Sicchè detti y, z, y_a i numeri relativi ad U, nelle (8) bisognerà porre:

$$y' = y + 2k(n + p - 1), \quad z' = z + 2k(n + p - 1), \quad y'_a = y_a + kn'$$

e la (9) diventa

$$x + y + z - y_a = \alpha + \beta + \gamma + k(n' - n - 4p + 1)$$

e introducendo l'invariante I, si ha infine:

$$x + y + z - y_a = \alpha + \beta + \gamma + k(I + 1)$$

che coincide con la (VII) se in essa si pone $-k$ al posto di k.

Concludiamo col principio:

Il principio di corrispondenza per le superficie, espresso dalle due formule (VI)-(VII) *oltre che per corrispondenze T di Zeuthen in senso stretto, a valenza k positiva o nulla vale anche per corrispondenze di Zeuthen generalizzate, a valenza qualunque.*

Se il numero intero $y + z - y_a$ che compare nella (VII) si chiama l'equivalente della curva di coincidenza U e si pone

$$u = y + z - y_a$$

si ottiene la formula:

$$x + u = \alpha + \beta + \gamma - k(I + 1) \tag{VIII}$$

che *nelle dette ipotesi e notazioni dello Zeuthen esprime il principio di corrispondenza per le superficie, per trasformazioni T di Zeuthen a valenza intera qualsiasi.*

È appena necessario avvertire che per la validità della (VIII) e delle precedenti (VI) e (VII) occorre che T non abbia come uniti tutti i punti della superficie.

Osservazioni. - Sulle formule (VI), (VII), (VIII) s'impongono alcune osservazioni fondamentali.

1ª) Alla (VI) si può dare forma invariantiva, perchè come nota lo stesso ZEUTHEN il numero γ invece di calcolarlo per le sezioni piane di F si può calcolare per un qualunque sistema lineare di curve $|C|$ semplice almeno ∞^3, privo di curve fondamentali e di punti basi, in maniera che trasformando F col sistema $|C|$ si ottenga nello spazio ordinario una superficie nelle condizioni dette in principio (senza punti multipli isolati e con sola linea doppia *nodale*).

Il numero γ risulta allora uguale al numero delle coppie di punti omologhi PP_1 che si trovano su due curve C di $|C|$, diviso per il grado virtuale di $|C|$ stesso.

In quanto al numero delle coppie PP_1 che si trovano su due curve C, C_1 è evidente che esso è uguale al numero dei punti ove la trasformata C' di C, incontra C_1. D'altra parte $[C'C_1]=[C'C]$ quindi usando le solite notazioni del SEVERI, per γ si avrà:

$$\gamma=[CC']:[CC].$$

Dalla (VI) appare anzi che tale numero è indipendente dal particolare sistema $|C|$, scelto per calcolarlo, purchè $|C|$ soddisfi alle condizioni di genericità sopra dette. Ma allora è facile vedere che esso è assolutamente indipendente dalle curve C. Sia infatti B una qualunque curva di F, è sempre possibile trovare su F sistemi lineari $|C|$ tali che, $|C|$, $|B+C|=|A|$ e $|A+C|$ soddisfino alle condizioni dette. Allora sarà:

$$\gamma=[AA']:[AA]=[CC']:[CC]=[(A+C)(A'+C')]:[(A+C)(A+C)]$$

dalle quali si ricava

$$\gamma=[AC']+[A'C]:2[AC].$$

Posto allora $B\equiv A-C$, si calcola facilmente che è proprio

$$\gamma=[BB']:[BB].$$

Il numero γ che ricorre continuamente nelle considerazioni numeriche relative a T si potrebbe chiamare il *terzo indice* o *indice misto* di T stesso.

Notiamo che: *T e la sua inversa T^{-1} hanno lo stesso indice γ*, perchè tanto T che T^{-1} hanno lo stesso numero x di punti uniti e quindi per la (VI) γ ha lo stesso valore per T e per T^{-1}, del resto il fatto si può facilmente dimostrare direttamente, osservando che se PP' è una coppia di punti omologhi nella T, appartenenti ad una curva C, la coppia $P'P$ della T^{-1} appartiene pure a C e perciò $[CC']$ e $[CC^{-1}]$ sono uguali.

2ª) Per la formula (VII) non è facile trovare un'espressione invariantiva a causa del numero z che in essa compare. Questo numero è intimamente legato alla forma proiettiva di F; esso si riferisce ad elementi dello spazio ambiente e non ad elementi di F. Bisognerebbe perciò trovare per z un altro significato, oltre quello di ordine della rigata R, per cercare di esprimerlo per i caratteri invariantivi di F e di U ([6]).

([6]) Questo risultato è stato ormai raggiunto dal SEVERI (pag. 874 del vol. XVII dei citati Rend. Lincei): z infatti esprime il numero delle coppie PP_i venute a coincidere sopra U e che appartengono ad un fascio $|A|$ di sezioni piane di F. Ora il SEVERI dimostra che se al

3ª) Tanto nella (VI) quanto nella (VII) compare l'invariante ZEUTHEN-SEGRE I che come sappiamo non è un invariante assoluto. Esso aumenta di una unità tutte le volte che trasformando birazionalmente F in una superficie F', con una corrispondenza Ω, ad un punto P di F corrisponde su F' una curva eccezionale di prima specie e.

In tal caso a tutti i punti di e corrispondono per la T' (trasformata mediante la Ω della T) i punti $P_1', P_2', \ldots, P'_\beta$ (trasformati di $P_1, P_2, \ldots, P_\beta$). E viceversa ai punti $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \ldots, P_\alpha^{-1}$ corrispondono per la T' tutti i punti di e.

Se con queste ipotesi si segue la dimostrazione dello ZEUTHEN si vede che il numero γ si deve aumentare di k unità, di quanto appunto diminuisce il termine $-k(I+1)$ quando I aumenta di una unità. Il numero x complessivamente rimane invariato, com'è naturale.

Uno studio più preciso fa allora vedere che γ calcolato con un sistema $|C|$ che abbia e come fondamentale e con un sistema $|A|$ che incontri e in r punti variabili non da lo stesso valore, e si trova:

$$\gamma=[AA']:\{[AA]+r\}=[CC']:[CC].$$

In queste condizioni la curva e è però fondamentale per T.

Quando T possiede curve fondamentali che siano eccezionali di prima specie per la superficie, per la giusta applicazione delle formule (VI) e (VII) bisogna convenire di calcolare γ con un sistema $|C|$ che abbia dette curve come fondamentali, oppure con la formula

$$\gamma=[AA']:\{[AA]+\sum[Ae_r]\}, \tag{10}$$

e all'invariante I bisogna sostituire il numero

$$I'=I-\eta \tag{11}$$

η essendo il numero delle curve eccezionali indicate nella (10) con e_r.

Si badi che una curva eccezionale di prima specie e della superficie non è necessariamente fondamentale per la trasformazione. Essa non deve allora comparire nè nella (10) nè nella (11).

Considerazioni analoghe si possono fare quando la corrispondenza birazionale Ω tra F ed F', sopprime una curva eccezionale d di F, che non sia fon-

---

fascio $|A|$ si sostituisce un qualunque altro fascio $|C|$ di F e si indica con ϱ il numero delle predette coppie PP_i, appartenenti a curve di $|C|$ e con ω il numero dei punti comuni ad U e ad una C, si ha, qualunque sia $|C|$, $z-2y=\varrho-2\omega$ e quindi $u=\varrho-2\omega-(y_a-3y)$. Ma $y_a-3y=2\pi-\nu-2$ è il cosidetto carattere d'immersione di U in F (vedi n.º 5), π e ν essendo il genere ed il grado virtuale di U, quindi in definitiva si ha col SEVERI:

$$u=\varrho+\nu-2\omega-2\pi+2.$$

damentale per T. Detto D' il punto di F' corrispondenti a d, esso sarà unito per la T', $[dd']$ volte ($[dd']$=numero di punti comuni a d e alla sua trasformata d' per la T). Per la giusta applicazione delle formule tale numero bisogna aggiungerlo al 2° membro e calcolare γ con un sistema che non passi per D' o introdurre una formula analoga alla (9). Al posto di I bisognerà poi porre $I+1$. Si noti che D' è fondamentale per la T'. Questi casi particolari si riconoscono perciò facilmente.

4ª) Supponiamo per un momento che la superficie F sia regolare, $q=0$. La valenza di qualunque corrispondenza T di F, come si è detto, è arbitraria. Le formule (VI), (VII) e (VIII) allora ci dicono che per la validità del principio di corrispondenza da esse espresso, ad ogni trasformazione di ZEUTHEN, appartenente ad una superficie regolare F, bisogna attribuire come valenza il numero k che indica la multiplicità d'intersezione che in ogni punto P, F ha con la curva C_P.

5ª) Chiudiamo queste osservazioni con la seguente domanda. Per una corrispondenza T a valenza k, che non sia una corrispondenza di ZEUTHEN vale ancora il principio di corrispondenza espresso dalle formule (VI), (VII) e (VIII)?

La risposta a questa domanda non sarebbe certo priva d'interesse. Per ora quello che possiamo dire è questo: se T appartiene ad un sistema continuo di corrispondenze di cui una almeno sia di ZEUTHEN, il predetto prindipio di corrispondenza vale evidentemente anche per T.

7. - A dimostrare l'utilità della (VI) estesa al caso di k negativo, applichiamola per calcolare il numero dei punti uniti della corrispondenza $T=EE_1$ prodotto di due generiche corrispondenze elementari E ed E_1. La genericità va intesa nel senso che T non abbia una curva di coincidenza.

Per il teorema del n.° 1 la corrispondenza T, così definita, è evidentemente a valenza $k=-1$.

Indichiamo con n ed n_1 i gradi virtuali delle due reti. Per gli indici, si avrà

$$\alpha=\beta=(n-1)(n_1-1).$$

Per calcolare γ pensiamo F nello spazio ordinario e $|C|$ sia la rete delle sezioni di F, coi piani uscenti da un punto O dello spazio.

I punti base di un fascio della rete $|C_1|$ si possono pensare segati su F da curve dello spazio che indicheremo con Γ (intersezione variabile delle superficie che segano il sistema $|C_1|$). In queste condizioni i punti omologhi nella T, di un punto P saranno segati su F dalle $n-1$ curve Γ uscenti dai punti $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, dove la retta OP incontra ulteriormente F. Le ipotesi dello ZEUTHEN sono perciò verificate.

Al variare di P sopra una generica sezione piana A di F, le dette Γ descrivono una superficie ψ_s e $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ la curva A' dove il cono $O \cdot A$ incontra F oltre A.

Il numero $n\gamma$ sarà allora uguale al numero dei punti ove un'altra sezione piana, generica A_1, sega ψ_s, diminuito dal numero dei punti comune ad A_1 e A' e quindi

$$n\gamma = ns - (n^2 - n) = n(s - n + 1)$$

e

$$\gamma = s - n + 1.$$

Per calcolare s, osserviamo che il numero γ, diciamo γ_1, relativo alla E_1, è $n_1 - 1$ e d'altra parte, essendo E_1 a valenza uno, lo stesso numero calcolato col sistema lineare individuato da A', ci dà:

$$\gamma_1 = \frac{n(n-1)s - n(n-1)^2}{n(n-1)^2} = \frac{s}{n-1} - 1,$$

e perciò

$$\frac{s}{n-1} - 1 = n_1 - 1$$

e infine

$$s = n_1(n - 1)$$

e

$$\gamma = (n-1)(n_1 - 1).$$

Sostituendo i valori trovati per α, β e γ nella (VI), e ricordando che $k = -1$, si ottiene:

$$x = 3(n-1)(n_1 - 1) + I + 1.$$

8. - **Sull'equazione di una corrispondenza.** — Anche la corrispondenza E^2 è a valenza -1, ma per essa è impossibile applicare le formule (VI) e (VII) perchè, indicando con H la corrispondenza identica e facile vedere che

$$E^2 = (n-2)E + (n-1)H$$

e che perciò ogni punto di F è unito per E^2.

La relazione precedente, trattata come per le corrispondenze sopra una curva, mostra che E soddisfa all'equazione:

$$f(X) = X^2 - (n-2)X - (n-1) = 0. \tag{12}$$

Questa non è però l'equazione minima relativa ad E, perchè essendo $E + H$ a valenza zero, tale equazione è:

$$X + 1 = 0. \tag{12'}$$

E anche qui avviene che la $f(X)$ è divisibile per il primo membro della (12').

$$f(X) = (X + 1)(X - n + 1).$$

Ma di queste proprietà diremo in altro lavoro; ci basta per ora aver rilevato l'analogia col caso delle curve e che in generale data una corrispondenza T a a valenza k, essendo $T+kH$ a valenza zero, (H è evidentemente a valenza -1), l'equazione minima relativa a T, è di primo grado:

$$X+k=0.$$

§ 3.

Rappresentazione trascendente di una corrispondenza.

9. - Corrispondenze a valenza. — Riprendiamo gli integrali semplici di prima specie indipendenti dalla superficie, e che ora indicheremo con

$$u_1,\quad u_2,\ldots,\quad u_q, \tag{13}$$

e sia T una corrispondenza a valenza zero.

Pel teorema del n.° 13 M. I. detto x un punto di F e y_1, $y_2,\ldots$, y_β i suoi omologhi per la T, dovrà aversi:

$$u_k(y_1)+u_k(y_2)+\ldots+u_k(y_\beta)\equiv\pi_k \qquad \text{(modd: periodi)} \\ (k=1,2,\ldots,q) \tag{14}$$

le π_k essendo costanti indipendenti da x.

Viceversa, per l'inverso del teorema ricordato, se per una trasformazione T, valgono le (14) T è a valenza zero.

Le (14) *sono dunque le equazioni* (necessarie e sufficienti) *che caratterizzano le corrispondenze a valenza zero.*

Sia ora T a valenza γ (positiva o negativa) e H sia sempre la corrispondenza identica. La trasformazione $S=T+\gamma H$ (che ad ogni punto x fa corrispondere il punto x stesso contato γ volte più i punti y_1, $y_2,\ldots$, y_β che T associa ad x) è allora a valenza zero e le (14) diventano:

$$u_k(y_1)+u_k(y_2)+\ldots+u_k(y_\beta)\equiv-\gamma u_k(x)+\pi_k \qquad \text{(modd: periodi)} \\ (k=1,2,\ldots,q). \tag{15}$$

Viceversa, se in una trasformazione T, ogni punto x e i suoi omologhi y_1, $y_2,\ldots$, y_β verificano le (15), con γ intero qualsiasi, la corrispondenza $S=T+\gamma H$ risulta a valenza zero e quindi $T=S-\gamma H$ è a valenza γ.

Le (15) *risultano perciò le equazioni* (necessarie e sufficienti) *che determinano una corrispondenza a valenza* γ.

10. - Corrispondenze qualunque. — Consideriamo ora una trasformazione T qualunque e ragioniamo come fa l'HURWITZ ([7]) per le curve.

([7]) HURWITZ: *Ueber algebraische Corrispondenzen und das verallgemeinerte Corrispondenzprincip.* Math. Annalen, Bd. 28 (1886).

Scegliamo su F un sistema completo e primitivo di cicli lineari alla maniera del SEVERI ([8]). Siano

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \ldots, \quad \sigma_q$$

i cicli normali del primo gruppo e

$$\sigma_{q+1}, \quad \sigma_{q+2}, \ldots, \quad \sigma_{2q},$$

i cicli normali del secondo gruppo. E supponiamo ancora che gli integrali (13) formino un sistema di integrali normali relativi a questi cicli, alla maniera del SEVERI.

Allora la tabella dei periodi: sarà del tipo:

$$(16) \qquad \begin{array}{c|cccccc} & \sigma_1 & \sigma_2 \ldots & \sigma_q & \sigma_{q+1} & \sigma_{q+2} \ldots & \sigma_{2q} \\ \hline u_1 & 1 & 0 \ldots & 0 & \omega_{11} & \omega_{12} \ldots & \omega_{1q} \\ u_2 & 0 & 1 \ldots & 0 & \omega_{21} & \omega_{22} \ldots & \omega_{2q} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_q & 0 & 0 \ldots & 1 & \omega_{q1} & \omega_{q2} \ldots & \omega_{qq} \end{array} \qquad |\omega_{hk}| \neq 0$$

col determinante delle ω_{hk} diverso da zero e soddisfacenti alle relazioni:

$$(17) \qquad d_h \omega_{kh} = d_k \omega_{hk}$$

$$(17') \qquad \sum d_h(\omega'_{kh}\omega''_{kq+h} - \omega'_{kq+h}\omega''_{kh}) > 0,$$

essendo $\omega_{kh} = \omega'_{kh} + i\omega''_{kh}$ con ω'_{kh} e ω''_{kh} reali.

I numeri $d_1, d_2, \ldots, d_q$ che compaiono nella (17) e (17') sono i divisori elementari di una certa forma quadratica legata alla superficie e ai cicli σ_i (v. SEVERI, loc. cit. n.° 3). A noi qui interessa ricordare che i numeri d_i sono interi diversi da zero. Nel caso delle curve i numeri d_i sono tutti uguali ad uno, la qualcosa porta una notevole semplificazione. Per la superficie non si sa ancora, se è possibile scegliere i cicli normali σ_i, in maniera che i numeri d_i risultino uguali ad uno.

Ciò detto, consideriamo, come per le curve, la somma

$$u_k(y_1) + u_k(y_2) + \ldots + u_k(y_\beta).$$

Come funzione del punto x variabile su F, essa risulta un integrale semplice di prima specie della superficie e perciò esprimibile per combinazione lineare degli integrali (13). Sia

$$(18) \qquad u_k(y_1) + u_k(y_2) + \ldots + u_k(y_\beta) = \sum \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

le π essendo quantità costanti indipendenti da x.

([8]) SEVERI, loc. cit. in ([2]), vedasi §§ 1 e 2.

Diciamo $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ un sistema fondamentale di cicli lineari divisori dello zero. I cicli

$$(18') \qquad \sigma_1, \quad \sigma_2, \ldots, \quad \sigma_q, \quad \sigma_{q+1}, \ldots, \quad \sigma_{2q}, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_s$$

formano allora una base minima (o ***sistema canonico*** come dice LEFSCHETZ ([9])) per i cicli lineari della superficie nel senso che qualunque ciclo lineare σ (esso e non un suo multiplo) sia esprimibile per combinazione lineare a coefficienti interi dei cicli σ_i e η_j.

Facciamo percorrere ad x un ciclo σ_l, e indichiamo con σ'_l il ciclo descritto dai punti corrispondenti $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$ ed esprimiamo σ'_l per i cicli del sistema canonico (18'):

$$(19) \quad \begin{cases} \sigma'_l \backsim h_{1l}\sigma_1 + h_{2l}\sigma_2 + \ldots + h_{ql}\sigma_q + g_{1l}\sigma_{q+1} + g_{2l}\sigma_{q+2} + \ldots + g_{ql}\sigma_{2q} + \alpha_l \\ \sigma'_{q+l} \backsim H_{1l}\sigma_1 + H_{2l}\sigma_2 + \ldots + H_{ql}\sigma_q + G_{1l}\sigma_{q+1} + G_{2l}\sigma_{q+2} + \ldots + G_{ql}\sigma_{2q} + \beta_l \end{cases}$$

i numeri h, H, g, G essendo interi positivi, negativi o nulli, α_l e β_l opportune combinazioni lineari a coefficienti interi dei divisori $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ che non occorre determinare ulteriormente. Basta solo rilevare che α_l e β_l sono pur essi divisori dello zero e che lungo un tal ciclo ogni integrale u ha evidentemente periodo nullo ([10]).

Dalle cose dette segue che quando x avrà descritto il ciclo σ_l del primo gruppo ($l=1, 2, \ldots, q$), il secondo membro delle (18) aumenta di π_{kl} e il primo membro della quantità $h_{kl} + g_{1l}\omega_{k1} + \ldots + g_{ql}\omega_{kq}$ e perciò si avrà:

$$(20) \qquad \pi_{kl} = h_{kl} + g_{1l}\omega_{k1} + \ldots + g_{ql}\omega_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, q).$$

Ragionando analogamente sui cicli del secondo gruppo si otterrà nella stessa maniera:

$$(20') \qquad \sum_{1}^{q}{}_i \pi_{ki}\omega_{il} = H_{kl} + \sum_{1}^{q}{}_i G_{il}\omega_{ki} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, q).$$

([9]) LEFSCHETZ: *L'Analysis situs et la géométrie algébriques* (Collection Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1924) pag. 14.

([10]) Si noti che ogni corrispondenza T trasforma un divisore dello zero in un ciclo analogo, e ciò, tanto per cicli lineari, quanto per cicli bidimensionali. Per i primi la proprietà è conseguenza dell'altra che T trasforma ogni ciclo nullo (riducibile ad un punto P) in un ciclo pure nullo (riducibile ai punti $P_1, P_2, \ldots, P_\beta$ omologhi in P). Per i cicli bidimensionali Γ_2 basta ricordare che ogni tal ciclo è omologo ad un ciclo algebrico $A-B$, essendo A e B due curve algebriche della superficie che verificano la relazione aritmetica $[A^2]=[AB]=[B^2]$. Esisteranno allora, un intero positivo λ e una curva E della superficie, tali che le curve $\lambda A+E$ e $\lambda B+E$ appartengano ad uno stesso sistema continuo. Ne segue che sopra F' (distinta o no da F) le curve trasformate $\lambda A'+E'$ e $\lambda B'+E'$ appartengono ad uno stesso sistema continuo e perciò $A'-B'$ e pur esso un divisore dello zero. Vedasi LEFSCHETZ, loc. cit., pag. 85. SEVERI: *La base Minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*. Annales de l'école Normale (3), XXV, 1908.

Dalle (20) e (20′) si ricava

$$(21)\qquad \sum_{1}^{q}{}_i h_{ki}\omega_{il}+\sum_{1}^{q}{}_{i,m} g_{mi}\omega_{km}\omega_{il}=H_{kl}+\sum_{1}^{q}{}_i G_{il}\omega_{ki}\qquad (k,\ l=1,\ 2,\ldots,\ q)$$

che sono q^2 relazioni quadratiche a coefficienti interi fra i numeri ω_{ki} della tabella dei periodi e che si possono anche qui chiamare le relazioni di HURWITZ relativi alla data corrispondenza T.

11. - Supponiamo che queste relazioni siano *identicamente soddisfatte per tutti i valori delle* ω_{ki}, allora com'è facile verificare si avrà:

$$(22)\qquad \begin{cases} \pi_{kk}=h_{rr}=G_{ss} & (k,\ r,\ s=1,\ 2,\ldots,\ q) \\ H_{kl}=g_{kl}=0 & \text{qualunque siano } k \text{ e } l=1,\ 2,\ldots,\ q \\ \pi_{kl}=h_{kl}=0 & \text{per } k\neq l \text{ e del resto qualunque.} \end{cases}$$

Ma allora detto $-\gamma$ il comune valore delle quantità (intere) π_{kk}, dalle (18) segue:

$$(15)\qquad u_k(y_1)+u_k(y_2)+\ldots.+u_k(y_\beta)=-\gamma u(x)+\pi_k$$

che coincidono con le (15) e perciò T è a valenza γ.

È importante dimostrare che viceversa se T è a valenza γ le (19), (20) e (21) sono identicamente soddisfatte e valgono le (22). Ed infatti, se T è a valenza γ, per il teorema del n.° 26 sono verificate le (15) che confrontate con le (18), per l'indipendenza degli integrali (13), ci dànno:

$$\pi_{11}=\pi_{22}=\ldots.=\pi_{qq}=-\gamma$$

e tutte le altre π_{ki}, con $k\neq i$, nulli. Sicchè le (20) e (20′) hanno tutti i coefficienti interi.

Consideriamo allora l'integrale

$$U=\frac{1}{d_1}g_{1l}u_1+\frac{1}{d_2}g_{2l}u_2+\ldots.+\frac{1}{d_q}g_{ql}u_q.$$

I suoi periodi lungo i cicli $\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\ \sigma_q$ del primo gruppo sono i numeri razionali:

$$\frac{g_{1l}}{d_1},\ \frac{g_{2l}}{d_2},\ldots,\ \frac{g_{ql}}{d_q},$$

e quelli lungo i cicli σ_{q+k} del secondo gruppo:

$$g_{1l}\frac{\omega_{1k}}{d_1}+g_{2l}\frac{\omega_{2k}}{d_2}+\ldots.+g_{ql}\frac{\omega_{qk}}{d_q},\qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ q)$$

che in virtù delle (16) diventano:

$$\frac{1}{d_k}(g_{1l}\omega_{k1}+g_{2l}\omega_{k2}+\ldots.+g_{ql}\omega_{kq});$$

per quanto è stato detto sui numeri π_{ki} che compaiono nelle (20), anche questi numeri sono razionali. L'integrale U, avendo tutti i periodi reali è costante

(SEVERI, loc. cit.) e perciò tutti i coefficienti $\frac{g_{rl}}{d_r}$ sono nulli. Ma i numeri d_r sono tutti finiti e diversi da zero, quindi le quantità g_{rl} sono nulle.

Applichiamo ora lo stesso procedimento all'integrale:

$$V=\frac{G_{1l}}{d_1}u_1+\frac{G_{2l}}{d_2}u_2+....+\frac{G_{l-1,l}}{d_{l-1}}u_{l-1}+\frac{G_{ll}+\gamma}{d_l}u_2+\frac{G_{l+1,l}}{d_{l+1}}u_{l+1}+....+\frac{G_{ql}}{d_q}u_q$$

Come sopra si trova che i suoi periodi ai cicli $\sigma_1, \sigma_2,...., \sigma_q$ sono i numeri razionali:

$$\frac{G_{1l}}{d_1},\ \frac{G_{2l}}{d_2},....,\ \frac{G_{l-1,l}}{d_{l-1}},\ \frac{G_{ll}+\gamma}{d_l},\ \frac{G_{l+1,l}}{d_{l+1}},....,\ \frac{G_{ql}}{d_q},$$

e ai cicli σ_{q+k} del secondo gruppo, per qualunque valore di k:

$$\frac{G_{1l}}{d_1}\omega_{1k}+\frac{G_{2l}}{d_2}\omega_{2k}+....+\frac{G_{l-1,l}}{d_{l-1}}\omega_{l-1,k}+\frac{G_{ll}+\gamma}{d_l}\omega_{lk}+\frac{G_{l+1,l}}{d_{l+1}}\omega_{l+1,k}+....+\frac{G_{ql}}{d_q}\omega_{qk}$$

che per le (16) si possono scrivere sotto la forma:

$$\frac{1}{d_k}[G_{1l}\omega_{k1}+G_{2l}\omega_{k2}+....+G_{l-1,l}\omega_{kl-1}+(G_{ll}+\gamma)\omega_{kl}+G_{l+1,l}\omega_{kl+1}+....+G_{ql}\omega_{kq}].$$

Ora se nelle (20′) si tien conto che tutte le π_{ki} con $k\neq i$ sono nulle e tutte le π_{kk} sono uguali a $-\gamma$, la quantità scritta dentro parentesi quadra, risulta uguale al numero intero $-H_{kl}$. Ne segue che l'integrale V ha tutti i periodi reali e perciò riducesi ad una costante, e perchè ciò avvenga è necessario che sia:

$$G_{1l}=G_{2l}=....=G_{l-1,l}=G_{l+1,l}=....=G_{ql}=0 \quad \text{e} \quad G_{ll}=-\gamma.$$

Facendo variare l da 1 a q si ottengono le (22); c. v. d. Concludiamo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè T sia a valenza γ è che le (21) *siano identicamente soddisfatte qualunque siano le ω_{ik}, valgano cioè le* (22).

Osservazione. - La condizione espressa in questo teorema, nel caso delle curve, per l'HURWITZ è il punto di partenza per la definizione di corrispondenza a valenza γ. Una tale via per la superficie non si può però seguire. La trattazione dell'HURWITZ è fondata sulle proprietà delle funzioni $\theta(u_1, u_2,...., u_q)$ che hanno per argomenti u_i gli integrali di prima specie della curva. Ora nulla, almeno per ora, si sa su queste funzioni quando le u_i sono integrali semplici di prima specie di una superficie.

12. - La dimostrazione della sufficienza della condizione espressa nell'ultimo teorema, in fondo ci dice che quando i numeri π_{ik} hanno i valori $\pi_{kk}=-\gamma$ e $\pi_{ki}=0$ per $k\neq i$, i numeri h, g, H, G sono determinati in modo univoco con le (22). La proprietà si estende come per le curve, vale cioè il teorema:

Fissata la corrispondenza T, o quanto dire, fissati i valori delle quantità π_{ki}, i numeri h, g, H, G restano univocamente determinati.

Nel caso delle curve il teorema è stato dimostrato dal SEVERI ([11]) in base ad un lemma che si estende pur esso alle superficie.

Fra i periodi normali ω_{ki} $(k, i=1, 2,...., q)$ *degli integrali normali di prima specie di una superficie* (d'irregolarità q), *non possono sussistere* q *relazioni del tipo*:

$$a_1\omega_{k1}+a_2\omega_{2k}+ .... +a_q\omega_{kq}=0 \qquad \text{per } k=1, 2,...., q$$

per valori reali, non nulli, delle quantità $a_1, a_2,...., a_q$.

Per la dimostrazione di questo lemma basta ripetere i calcoli del SEVERI introducendovi come abbiamo fatto sopra, nel caso particolare, i divisori elementari $d_1, d_2,...., d_q$ relativi alla superficie e ai cicli σ_i. Il procedimento non presenta difficoltà concettuali e ne lasciamo al lettore lo svolgimento. Dopo il lemma discende immediatamente il teorema sulla determinazione univoca dei numeri h, g, H, G che ha la sua importanza in molte applicazioni.

Ne segue per esempio che tanto i numeri π_{ik}, quanto i numeri (interi) h, g, H, G sono numeri caratteristici della corrispondenza. I relativi determinanti:

$$|\pi_{ik}|, \qquad \begin{vmatrix} h_{ik}, & g_{ik} \\ H_{ik}, & G_{ik} \end{vmatrix} \qquad (i, k=1, 2,...., q)$$

rispettivamente di ordine q e $2q$ li chiameremo i determinanti della corrispondenza.

Quando T è a valenza γ (e solo allora) essi hanno tutti gli elementi nulli, tranne quelli della diagonale principale che sono tutti uguali a $-\gamma$.

Per le corrispondenze a valenza zero i termini dei due determinanti sono tutti nulli.

13. - Quando la corrispondenza T non è a valenza le q^2 relazioni (21) non sono più identicamente soddisfatte e perciò esse esprimono degli effettivi legami fra i periodi ω_{kl}.

Come per le curve, le corrispondenze prive di valenza le diremo *singolari* e una superficie dove esistono corrispondenze singolari, la diremo *singolare*,

Una superficie tutta affatto generica non può essere singolare. Difatti per un noto teorema di ENRIQUES-CASTELNUOVO ([12]) assegnata ad arbitrio una tabella di numeri come la (16) che verificano le (17) e (17′) esistono infinite superficie Φ d'irregolarità q i cui integrali di prima specie abbiano per tabella dei periodi la tabella assegnata.

Per una tale superficie Φ i numeri ω_{kh} non possono verificare nessuna relazione del tipo (21) che non sia una identità e perciò una corrispondenza fra i

---

([11]) SEVERI: *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica.* Ann. di Mat., 1913.

([12]) ENRIQUES-CASTELNUOVO: *Sur les intégrales simples de première espèce d'une variété algébrique.* Annales de l'École Normale, Paris, XXIII, 1906.

punti di Φ è necessariamente a valenza, cioè Φ *non è singolare.* Concludiamo con l'importante teorema:

Ogni corrispondenza fra i punti di una generica superficie Φ (a moduli generali) *è una corrispondenza a valenza.*

§ 4.

Come una corrispondenza trasforma gli integrali e i cicli della superficie e sui vari significati del rango di una corrispondenza.

14. - Riprendiamo a considerare gli integrali delle relazioni (18) e le matrici $|\pi_{ik}|$, $\begin{vmatrix} H_{ik}, & G_{ik} \\ h_{ik}, & g_{ik} \end{vmatrix}$ relativi alla corrispondenza T di rango $q-r$.

Poniamo

$$v_k(x) = \sum \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \qquad (k=1, 2, ..., q)$$

e perciò

$$(23) \qquad v_k(x) = u_k(y_1) + u_k(y_2) + ... + u_k(y_\beta) \qquad (k=1, 2, ..., q).$$

Quanti integrali indipendenti vi sono fra gli integrali v_1, v_2,...., v_q?

Essendo per ipotesi T di rango $q-r$, F possederà r integrali indipendenti J_1, J_2,...., J_r (vedi n.° 13) che hanno somma costante su tutti i gruppi $(y_1, y_2, ..., y_\beta)$. Esprimiamo gli integrali J_s per combinazione degli integrali u_1, u_2,...., u_q. Sia:

$$(24) \qquad J_s = \lambda_{s1} u_1 + \lambda_{s2} u_2 + ... + \lambda_{sq} u_q + \mu_s \qquad (s=1, 2, ..., r)$$

le λ e μ essendo costanti.

Applicando le (18) e le (23) si avrà:

$$J_s(y_1) + J_s(y_2) + ... + J_s(y_\beta) = \sum_{1}^{q}{}_h \lambda_{sh}(u_h(y_1) + ... + u_h(y_\beta)) + \beta\mu_s$$

$$= \sum_{1}^{q}{}_h \lambda_{sh} v_h(x) + \beta\mu_s.$$

Ma il primo membro è costante quindi:

$$(25) \qquad \sum_{1}^{q}{}_h \lambda_{sh} v_h(x) = \text{cost.} \qquad (s=1, 2, ..., r)$$

Ora per l'indipendenza degli integrali J_s la matrice $|\lambda_{sh}|$ definita dalla (24) è di caratteristica r, quindi le (25) rappresentano r relazioni lineari indipendenti che legano gli integrali v_k. Sicchè il numero degli integrali v_k indipendenti è al più $q-r$. Dico che è proprio $q-r$.

Infatti da una relazione

$$l_1 v_1(x) + l_2 v_2(x) + ... + l_q v_q(x) = \text{cost.}$$

per le (23) si trae:

$$\sum_1^q {}_s\, l_s[u_s(y_1)+u_s(y_2)+ \dots +u_s(y_\beta)]=$$
$$=\sum_1^q {}_s\, l_s u_s(y_1)+\sum_1^q {}_s\, l_s u_s(y_2)+ \dots +\sum_1^q {}_s\, l_s u_s(y_\beta)=\text{cost.}$$

la quale ci dice che l'integrale

$$l_1u_1(x)+l_2u_2(x)+ \dots +l_qu_q(x)$$

da somma costante su tutti i gruppi $(y_1, y_2, \dots, y_\beta)$ e sarà perciò (vedi n.° 13) una combinazione degli integrali J_1, $J_2, \dots, J_r$. Per le (24) i numeri l_1, $l_2, \dots, l_q$ sono allora della forma:

$$l_t=\mu_1\lambda_{1t}+\mu_2\lambda_{2t}+ \dots +\mu_r\lambda_{rt} \qquad (t=1, 2, \dots, q)$$

sono cioè dati dalla stessa combinazione lineare delle colonne della matrice $|\lambda_{sh}|$. Cioè ogni relazione lineare fra gli integrali $v_k(x)$ è una combinazione delle relazioni (25). Concludiamo:

Fra gli integrali (23) *d'indipendenti ve ne sono esattamente* $q-r$ *e la matrice* $|\pi_{kl}|$ *è di caratteristica* $q-r$.

Lo stesso fatto si ottiene sotto forma più espressiva alla maniera seguente. Riprendiamo gli integrali del n.° 8

$$I_1, \quad I_2, \dots, \quad I_{q-r}, \qquad J_1, \quad J_2, \dots, \quad J_r$$

ed esprimiamo per essi ciascun integrale u_h. Sia

$$u_h=a_{h1}I_1+ \dots +a_{hq-r}I_{q-r}+b_{h1}J_1+ \dots +b_{hr}J_r.$$

Per le (23) si avrà:

$$v_h(x)=\sum_1^{q-r} {}_s \sum_1^\beta {}_t\, a_{hs}I_s(y_t)+\sum_1^r {}_s \sum_1^\beta {}_t\, b_{hs}J_s(y_t),$$

e per la proprietà caratteristica degli integrali J_s:

$$(25') \qquad v_h(x)=\sum_1^\beta {}_t\,[a_{h1}I_1(y_t)+a_{h2}I_2(y_t)+ \dots +a_{hq-r}I_{q-r}(y_t)],$$

ogni integrale $v_h(x)$ si esprime perciò come somma dei valori che l'integrale

$$(26) \qquad w_h(y)=a_{h1}I_1(y)+a_{h2}I_2(y)+ \dots +a_{hq-r}I_{q-r}(y)$$

prende nei gruppi $(y_1, y_2, \dots, y_\beta)$. Donde segue subito che gli integrali $v_h(x)$ indipendenti sono soltanto $q-r$.

Ma le (25') ci dànno qualcosa di più. Sia σ un ciclo lineare di F e σ' il suo trasformato, per le (25') il periodo di $v_h(x)$ al ciclo σ è il periodo dell'integrale $w_h(y)$ al ciclo σ'. Se ne deduce che i periodi degli integrali $v_h(x)$ si esprimono per combinazione lineare a coefficienti interi dei $2(q-r)$ periodi degli integrali I_s. *Il sistema degli integrali $v_h(x)$ è perciò un sistema regolare di $q-r$ integrali riducibili, a $2(q-r)$ periodi.*

15. - A questo punto ritorniamo alle relazioni (19) che appunto esprimono i cicli $(\sigma_1', \sigma_2',...., \sigma'_{2q})$ per i cicli del sistema primitivo $(\sigma_1, \sigma_2,...., \sigma_{2q})$ e per i divisori dello zero.

Indichiamo con s il numero dei cicli σ'_h fra loro indipendenti. Siano, per esempio, $\sigma_1', \sigma_2',...., \sigma_s'$. Ogni ciclo σ verrà trasformato da T, in un ciclo che sarà combinazione lineare di questi cicli $\sigma_1', \sigma_2',...., \sigma_s'$. Per la (25') segue allora che i periodi dei $q-r$ integrali indipendenti $v_h(x)$ si esprimono per combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi che l'integrale (26) ha nei cicli $\sigma_1', \sigma_2',...., \sigma_s'$, e perciò $s \geqslant 2(q-r)$.

D'altra parte ogni integrale J_t ha i periodi nulli lungo i cicli σ'_h quindi il numero dei cicli indipendenti che sarà possibile trovare fra essi non dovrà superare $2(q-r)$ e perciò $s \leqslant 2(q-r)$; d'onde si conclude che è proprio $s=2(q-r)$. Se ne deduce che *la matrice* $\begin{vmatrix} h_{ik}, g_{ik} \\ H_{ik}, G_{ik} \end{vmatrix}$ *è di caratteristica* $2(q-r)$.

Osservando infine che per la (20), la matrice $|\pi_{ik}|$ è il prodotto delle due matrici $\|1, \omega_{ik}\|$, $\|h_{ik}, g_{ik}\|$ e per le (20') $|\omega_{ik}| \cdot |\pi_{ik}|$ è il prodotto delle due matrici $\|1, \omega_{ik}\|$, $\|H_{ik}, G_{ik}\|$, si trova che $\|h_{ik}, g_{ik}\|$ e $\|H_{ik}, G_{ik}\|$ sono entrambe di caratteristica $q-r$.

Riepilogando abbiamo i seguenti significati del rango $q-r$ di una trasformazione T.

Significato geometrico: la T trasforma ogni sistema continuo $\{A\}$ composto d'∞^q sistemi lineari distinti di F, in un sistema $[A']$ di F', composto d'∞^{q-r} sistemi lineari distinti (F ed F' distinte o coincidenti).

Significato aritmetico: $q-r$ è la caratteristica delle matrici $|\pi_{ik}|$, $\|h_{ik}, g_{ik}\|$, $\|H_{ik}, G_{ik}\|$ e $2(q-r)$ è la caratteristica della matrice $\begin{Vmatrix} h_{ik}, g_{ik} \\ H_{ik}, G_{ik} \end{Vmatrix}$.

Significato analitico: T trasforma ogni sistema completo d'∞^{q-1} integrali semplici di prima specie di F, in un sistema regolare d'∞^{q-r-1} integrali riducibili di prima specie di F'.

Significato topologico: T trasforma ogni sistema di $2q$ cicli lineari indipendenti di F in un sistema di $2(q-r)$ cicli lineari indipendenti di F'.

Relativamente a quest'ultimo significato aggiungiamo: Se T è a valenza γ valgono le (22) e le (19) diventano:

(27) $$\sigma_l' = -\gamma\sigma_l + \alpha, \qquad \sigma'_{q+l} = -\gamma\sigma_{q+l} + \beta$$

perciò T trasforma ogni cicli σ in un ciclo σ' equivalente al ciclo di partenza ripetuto $-\gamma$ volte più eventualmente un divisore dello zero. Se γ è positivo la T allora riproduce σ contato γ volte e invertito di senso. Se invece γ è negativo, $\gamma=-\gamma'$; la T riproduce σ ripetuto γ' volte e ne conserva il verso (a meno sempre di divisori dello zero). E ciò spiega come le corrispondenze a valenza negativa formino gruppo, mentre quelle a valenza positiva non formano gruppo. Tutto procede come per le curve, salvo l'aggiunta o meno dei divisori dello zero. Osserviamo ancora che le (27) caratterizzano le corrispondenze a valenza γ, perchè da esse, mediante le (19), si risale alle (22); quindi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T sia a valenza γ, è che essa faccia corrispondere ad ogni ciclo lineare σ della superficie, un ciclo omologo a $-\gamma\sigma$ o che ne differisca per un divisore dello zero. In particolare:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una corrispondenza sia a valenza zero è che essa faccia corrispondere ad ogni ciclo lineare della superficie, un ciclo nullo o un divisore dello zero.

Questa proprietà si estende alle corrispondenze T a valenza zero fra i punti di due distinte superficie F ed F'. Basta ripetere pressochè invariati i ragionamenti precedenti anche in questo caso. E precisamente basta introdurre accanto alle (16) la tabella dei periodi degli integrali normali u'_k di F'; supporre che nei primi membri delle (18) ogni integrale u_k sia un integrale u'_k di F' e riferire le (19) ai cicli di F'. Scrivendo le analoghe delle (20) e (20') in virtù delle (14) che valgono anche se F ed F' sono distinti, si trova che: condizione necessaria e sufficiente affinchè T sia a valenza zero, è che tutti i numeri h, g, H, G siano nulli; ma allora per le stesse (19) segue che su F' ogni ciclo σ'_h è un ciclo nullo o un divisore dello zero.

Le stesse considerazioni dimostrano che in generale anche se F ed F' sono distinte, i $2q$ cicli lineari indipendenti di F vengono da T trasformati in $2q$ cicli di F', fra cui solo $2(q-r)=2(q'-r')$ sono indipendenti. Ma queste proprietà, nel caso di F ed F' distinte, le vedremo meglio fra poco per altra via.

16. - Trasformazione dei cicli tridimensionali. — Vediamo ora come T opera sui cicli tridimensionali di F o meglio della sua riemanniana Φ. Sia

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \ldots, \quad \Gamma_{2q}$$

un sistema completo di $2q$ cicli indipendenti e tridimensionali di Φ.

Fissiamo su F un sistema lineare $|C|$ più volte infinito e senza curve fondamentali. Il SEVERI (loc. cit. al n.° 10) ha dimostrato che i cicli $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2q}$ del sistema primitivo, fin'ora considerato, si possono supporre giacenti su una generica curva C di $|C|$.

Indichiamo con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2q}$ i cicli lineari che $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2q}$ staccano su C.

Dico che i cicli γ_i sono indipendenti. Difatti, ove fosse

$$\gamma = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \dots + \lambda_{2q}\gamma_{2q} \sim 0 \qquad (\text{mod. } \Phi)$$

per valori non tutti nulli della λ, si avrebbe $(\sigma_i\gamma) = 0$ per $i = 1, 2, \dots, 2q$ e quindi posto

$$\Gamma = \lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \dots + \lambda_{2q}\Gamma_{2q}$$

sarebbe $[\sigma_i\Gamma] = 0$, per $i = 1, 2, \dots, 2q$, e Γ risulterebbe o un ciclo nullo o un divisore dello zero. Ma l'indice di torsione tridimensionali di Φ è uno, quindi deve proprio essere $\Gamma \sim 0$ contro l'ipotesi dell'indipendenza dei cicli Γ_i.

Ciò detto, applichiamo la T e indichiamo con C', Γ_i', γ_i' gli elementi omologhi di C, Γ_i, γ_i.

Per quanto è stato detto sui trasformati dei cicli lineari, e per quanto è noto sulle corrispondenze fra i punti delle due curve C e C', fra i cicli $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{2q}$ esisteranno $2r$ (e soltanto $2r$) relazioni lineari indipendenti, che, per quanto è stato detto sopra, si traducono in altrettante relazioni fra i cicli $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma'_{2q}$. E siccome, viceversa, è chiaro che ogni relazione lineare fra questi, si traduce in una relazione lineare fra quelli, così si conclude che: *fra i cicli trasformati* $(\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma'_{2q})$, *d'indipendenti ne esistono* $2(q-r)$. La proprietà vale anche se F e F' sono distinte.

17. - Le dimostrazioni sopra esposte sui cicli lineari e tridimensionali dipendono dalla rappresentazione trascendente della trasformazione T, mediante le (18) e successive relazioni. Ora brevi considerazioni sui cicli tridimensionali, aggiunte a proprietà delle corrispondenze fra i punti di due curve algebriche, permettono di ritrovare gli stessi teoremi per una via più semplice ed algebrica che ha il vantaggio di porre meglio in rilievo gli aspetti geometrici della questione e di essere valida anche se F ed F' sono due superficie distinte.

Bisognerà a tale scopo premettere due teoremi che non credo del tutto privi d'interesse.

Sia Σ un sistema algebrico di curve A di F, V una varietà in corrispondenza biunivoca con le curve A di Σ e W una riemanniana di V. Sia γ un ciclo lineare di W. Ad ogni punto P di γ corrisponderà su F una curva A_P. Quando P descrive il ciclo γ, la curva A_P descriverà, sulla riemanniana Φ di F, un ciclo a tre dimensioni Γ. Supponiamo che per qualunque posizione di γ su W, il ciclo Γ sia costantemente nullo. Quando ciò si verifica diremo che *Σ è un sistema a variazione topologica nulla.*

Ebbene io dico che allora Σ è costituito di curve linearmente equivalenti (contenute totalmente in un sistema lineare).

Consideriamo su F una curva C, irriducibile, variabile in un sistema lineare semplice più volte infinito e privo di curve fondamentali. Supporremo che C non faccia parte di alcuna curva A di Σ.

In queste condizioni, come abbiamo detto, su C è possibile trovare $2q$ cicli indipendenti $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2q}$, formanti un sistema completo di cicli fondamentali di F.

Qualunque ciclo σ di F si potrà allora esprimere per i cicli σ_i con una relazione del tipo

$$\sigma = \lambda_1\sigma_1 + \ldots + \lambda_{2q}\sigma_{2q} \qquad (\text{mod. } F)$$

con le λ intere non tutte nulle, anche se σ appartiene a C, purchè l'omologia si riguardi rispetto al modulo F e non rispetto a C.

Ciò detto indichiamo con γ_n la serie algebrica che le curve A di Σ staccano su C. I gruppi G di γ_n sono in corrispondenza biunivoca coi punti reali di W e ad ogni ciclo lineare γ, di W, corrisponderà su C un ciclo γ' descritto dai gruppi G, corrispondenti ai punti di γ. In particolare il ciclo dove Γ incontra C è un ciclo γ'.

Dall'ipotesi fatta segue che per ogni ciclo σ di F (in particolare di C) sarà $[\sigma\Gamma]=0$ e quindi per qualunque ciclo σ di C, sarà $[\sigma\gamma']=0$. Ossia la serie γ_n su C è a variazione topologica nulla e quindi per il teorema analogo sulle curve ([13]) la serie γ_n sarà formata di gruppi G due a due equivalenti. Ne segue che le curve A di Σ staccano gruppi equivalenti su C e perciò (SEVERI) le curve A sono pur esse due a due linearmente equivalenti.

Viceversa se le curve A appartengono ad un medesimo sistema lineare, i gruppi G su C appartengono ad una serie lineare e γ_n sarà a variazione topologica nulla; cioè detto σ un qualunque ciclo di C sarà $[\gamma'\sigma]=0$ in particolare per $\sigma=\sigma_i$ sarà $[\sigma_i\gamma']=0$ e quindi $[\sigma_i\Gamma]=0$ $(i=1, 2, \ldots, 2q)$.

In queste condizioni Γ è un ciclo nullo oppure un divisore dello zero (LESCHETZ). Ma per un teorema di POINCARÉ già ricordato l'indice di torsione tridimensionale su una varietà a quattro dimensioni è uno, quindi è proprio $\Gamma=0$; cioè Σ è a variazione topologica nulla.

Concludiamo come per le curve:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sopra una superficie F, un sistema Σ di curve algebriche, sia costituito di curve totalmente contenute in uno stesso sistema lineare, è che Σ sia a variazione topologica nulla.

Il teorema si estende alle varietà superiori V_k, perchè i due teoremi in giuoco nella dimostrazione: quello di SEVERI sull'equivalenza lineare delle curve di un sistema che segano gruppi equivalenti su una generica curva C della superficie; si estende alle varietà V_{k-1} di una V_k e l'altro di POINCARÉ che l'indice di torsione dei cicli $(2k-1)$-dimensionali di una V_k vale uno, è vero in generale. Concludiamo perciò in generale:

Condizione necessaria e sufficiente perchè sopra una V_k le V_{k-1} di un

---

([13]) ROSATI: *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXII, 1913. — CHISINI: *Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico.* Rend. del R. Istituto Lombardo, 1921.

sistema algebrico Σ appartengano ad un sistema lineare, è che Σ sia a variazione topologica nulla.

18. - Supponiamo per un momento che la superficie F sia priva di sistemi regolari d'integrali riducibili. Sulla varietà di PICARD W di F non esisterà allora alcuna curva di livello costante per alcun integrale semplice di prima specie di W stessa. Sia E una curva di W, p il suo genere. I p integrali di E si distribuiscono in due sistemi regolari d'integrali riducibili: uno ∞^{q-1} e l'altro ∞^{p-q-1}. Possiamo sempre supporre che E non abbia altri sistemi di integrali riducibili. Sia poi C una generica curva di F di genere π. Anche C possederà due sistemi d'integrali riducibili: uno ∞^{q-1} e l'altro $\infty^{\pi-q-1}$. Supporremo che anche C non possegga altri integrali riducibili e sia, per esempio, $q<p<\pi-q$. Queste ipotesi sono sempre realizzabili per l'arbitrarietà con cui possiamo scegliere E e C.

Ai punti di E si possono far corrispondere su F le curve A di un certo sistema Σ tale che due qualunque curve A non appartengano ad un sistema lineare. Indichiamo con γ'_n la serie dei gruppi (CA) dei punti comuni a C e alle curve A di Σ e facciamo corrispondere ad ogni P di E il gruppo ove C taglia la curva A_P corrispondente a P.

Fra i punti di E e C nasce una corrispondenza t; detti r e ϱ gli indici di equivalenza relativi a t e t^{-1}, si avrà:

$$p-r=\pi-\varrho.$$

Per le ipotesi fatte su C ed E, i casi possibili sono:

$$p-r=\pi-\varrho=0, \qquad p-r=\pi-\varrho=q,$$
$$p-r=\pi-\varrho=p, \qquad p-r=\pi-\varrho=\pi.$$

L'ultima è aritmeticamente impossibile; la penultima è pure impossibile per l'esistenza che ne risulterebbe in C d'un sistema regolare d'integrali riducibili di dimensione $p-1$.

La prima si deve pure escludere perchè essendo i gruppi della γ'_n linearmente distinti t non può essere a valenza zero. Concludiamo che è vera le seconda $p-r=\pi-\varrho=q$ ([14]).

Per note proprietà sulle corrispondenze fra punti di due curve è possibile allora trovare su E $2q$ cicli lineari indipendenti $l_1, l_2, \dots, l_{2q}$ i cui corrispondenti $l_1', l_2', \dots, l'_{2q}$ su C, siano pur essi linearmente indipendenti.

Ne segue subito che i cicli a tre dimensioni $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{2q}$ descritti su F dalla curva A_P al variare di P lungo $l_1, l_2, \dots, l_{2q}$ sono pur essi indipendenti.

([14]) Queste proprietà sulla teoria delle corrispondenze fra punti di due curve non sono state poste in rilievo in modo esplicito, ma si possono dimostrare facilmente seguendo per esempio, l'indirizzo del ROSATI, oppure con considerazioni analoghe a quelle da noi seguite per le superficie.

Se poi F possiede due sistemi complementari di integrali riducibili e quindi la sua varietà di PICARD possiede due congruenze d'indice uno di varietà abeliana V_r e V_{q-r}; per dimostrare la proprietà basta prendere E una volta su una V_r ed un'altra su una V_{q-r} e lo stesso se F possedesse più sistemi d'integrali riducibili.

Concludiamo:

Se F è d'irregolarità q ed $\{A\}$ è un suo sistema continuo composto d'∞^q sistemi lineari distinti, è sempre possibile far muovere in $\{A\}$ una curva A in maniera da descrivere $2q$ cicli tridimensionali Γ_1, $\Gamma_2,\ldots,$ Γ_{2q} indipendenti, e se le curve di $\{A\}$ si distribuiscono in due congruenze rappresentabili coi punti di varietà abeliane V_r e V_{q-r} si può fare che, per esempio, Γ_1, $\Gamma_2,\ldots,$ Γ_{2r} siano generati da curve A corrispondenti a punti di V_r e Γ_{2r+1}, $\Gamma_{2r+2},\ldots,$ Γ_{2q} siano generati da curve A corrispondenti a punti di V_{q-r}.

Il teorema vale in generale per le V_k basta ricordare i noti teoremi, sull'irregolarità superficiale di una varietà, del CASTELNUOVO ed ENRIQUES.

19. - Supponiamo ora di avere due superficie F ed F' legate da una corrispondenza T di rango $q-r=q'-r'$. Scegliamo su F $2q$ cicli tridimensionali indipendenti (formanti perciò sistema completo)

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2,\ldots, \quad \Gamma_{2r}; \qquad \Gamma_{2r+1}, \quad \Gamma_{2r+2},\ldots, \quad \Gamma_{2q}$$

com'è detto nella seconda parte del teorema precedente, e indichiamo con

$$\Gamma_1', \quad \Gamma_2',\ldots, \quad \Gamma'_{2r}; \qquad \Gamma'_{2r+1}, \quad \Gamma'_{2r+2},\ldots, \quad \Gamma'_{2q}$$

i cicli trasformati.

Per le proprietà dimostrate su T, alle curve H del sistema Σ_r corrispondente a V_r, corrispondono su F' curve A' di uno stesso sistema lineare; il loro sistema Σ_r' è perciò a variazione topologica nulla e i cicli Γ_1', $\Gamma_2',\ldots,$ Γ'_{2r} (generati da curve A' di Σ_r') sono tutti nulli.

Per dimostrare invece che $\Gamma'_{2r+1},\ldots,$ Γ'_{2q} sono $2(q-r)$ cicli indipendenti, basta prendere su F' una curva C, su V_{q-r} una curva E, nelle condizioni del numero precedente, e osservare che le curve A' del sistema Σ'_{q-r}, corrispondenti ai punti di V_{q-r} sono linearmente distinti e ripetere lo stesso ragionamento di allora.

Il teorema del n.° 18 risulta così dimostrato, in condizione più generale perchè F ed F' possono qui essere qualunque distinte o coincidenti, e viene inoltre precisato perchè *è detto quali cicli si trasformano in cicli nulli e quali in cicli indipendenti.*

Da esso seguendo a ritroso il ragionamento del n.° 18 si dimostra lo stesso teorema per i cicli lineari, sempre nell'ipotesi generale di F ed F' qualunque e con la maggiore precisione di cui è detto sopra.

E da questi teoremi risultano gli altri dei n.[i] 16 e 17 e in particolare che i determinanti $|\pi_{ik}|$, $\begin{vmatrix} h_{ik}, g_{ik} \\ H_{ik}, G_{ik} \end{vmatrix}$ hanno caratteristica $q-r$ e $2(q-r)$ indipendentemente dalle considerazioni analoghe a quelle di HURWITZ. Qualora però non occorra la maggiore determinazione di cui sopra e non si voglia far uso della teoria delle corrispondenze sulle curve, come è stato fatto in tutto il lavoro, tranne appunto in questi due ultimi numeri, conviene procedere alla maniera di HURWITZ.

Rimane in ogni modo stabilito che si può parlare delle matrici $\begin{Vmatrix} h_{ik}, g_{ik} \\ H_{ik}, G_{ik} \end{Vmatrix}$ indipendentemente dalle relazioni (18) e anche quando F e F' sono due superficie distinte.

§ 5.

Esistenza di una base per la totalità delle corrispondenze fra due superficie (distinte o coincidenti).

20. - Siano ora T_1, T_2, T_ϱ, ϱ corrispondenze fra i punti di una superficie F. Come per le curve diremo che esse sono dipendenti, se è possibile trovare degli interi non tutti nulli, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$, tali che la corrispondenza:

$$T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ldots + \lambda_\varrho T_\varrho$$

sia a valenza zero. In caso contrario diremo che T_1, $T_2, \ldots, T_\varrho$ sono indipendenti.

Per indicare che una corrispondenza T è a valenza zero scriveremo $T \equiv 0$; più in generale scriveremo $T \equiv S$ o $T - S \equiv 0$ per indicare che T ed S differiscono per una corrispondenza a valenza zero.

Riprendiamo le (18) e indichiamo con $h_{kl}^{(r)}$, $g_{kl}^{(r)}$ i numeri h_{kl} e g_{kl} relativi alla corrispondenza T_r. Per i numeri analoghi relativi a T avremo:

$$(28) \qquad \begin{cases} h_{kl} = \lambda_1 h_{kl}^{(1)} + \lambda_2 h_{kl}^{(2)} + \ldots + \lambda_\varrho h_{kl}^{(\varrho)} \\ g_{kl} = \lambda_1 g_{kl}^{(1)} + \lambda_2 g_{kl}^{(2)} + \ldots + \lambda_\varrho g_{kl}^{(\varrho)} \end{cases}$$

e perchè T sia a valenza zero è necessario che sia:

$$h_{kl} = g_{kl} = 0 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, q).$$

La condizione è anche sufficiente, perchè, verificate le (28), per le (20) tutti i numeri π_{kl} relativi a T, cioè:

$$\pi_{kl} = \lambda_1 \pi_{kl}^{(1)} + \lambda_2 \pi_{kl}^{(2)} + \ldots + \lambda_\varrho \pi_{kl}^{(\varrho)}$$

risultano nulli e, in virtù delle (18), T risulta a valenza zero.

Formiamo allora la matrice:

$$(29) \qquad \| h_{kl}^{(r)}, g_{kl}^{(r)} \| = \| h_{11}^{(r)} \ldots h_{q1}^{(r)} h_{12}^{(r)} \ldots h_{q2}^{(r)} \ldots h_{qq}^{(r)} g_{11}^{(r)} \ldots g_{q1}^{(r)} g_{12}^{(r)} \ldots g_{q2}^{(r)} \ldots g_{qq}^{(r)} \|$$

avente nella riga r-esima tutti i numeri $h_{kl}^{(r)}$, $g_{kl}^{(r)}$ relativi a T_r, messi in un determinato ordine, per esempio prima le $h_{kl}^{(r)}$ e poi le $g_{kl}^{(r)}$ e per ciascun gruppo facendo prima variare il primo indice da 1 a q e poi successivamente il secondo pure da 1 a q.

Se T è a valenza zero, per le (28), la matrice $\| h_{kl}^{(r)}, g_{kl}^{(r)} \|$ avrà caratteristica minore di ϱ. Viceversa se la detta matrice ha caratteristica minore di ϱ, sarà possibile render nulli i due membri delle (28) per valori delle λ_r intere e non tutte nulle e T_1, T_2,...., T_ϱ risulteranno dipendenti. Ne segue che il numero delle T_r indipendenti uguaglia la caratteristica della matrice (29). E perciò il numero massimo di corrispondenze T_r fra loro indipendenti che è possibile trovare su F è minore uguale delle colonne della (29), cioè $\leq 2q^2$, e si ha il teorema:

La totalità delle corrispondenze fra i punti di una superficie F, d'irregolarità q, ammette base e il numero base è minore uguale di $2q^2$.

È possibile cioè fissare su F un certo numero $\varrho \leq 2q^2$ corrispondenze indipendenti T_1, T_2,...., T_ϱ, tali che ogni altra corrispondenza T di F, sia ad esse legata da una relazione del tipo:

$$\lambda T + \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_\varrho T_\varrho \equiv 0$$

λ essendo un intero positivo e λ_1, λ_2,...., λ_ϱ numeri interi positivi o negativi non tutti nulli.

Una corrispondenza T a valenza γ è legata all'identità H dalla relazione $T + \gamma H \equiv 0$, e viceversa da una tale relazione segue che T è a valenza γ.

Se F non possiede che corrispondenze a valenza (F è per esempio a moduli generali, vedi n.° 13) la base su F sarà data dalla sola identità H e sarà $\varrho = 1$.

Se invece F è singolare, possiede cioè corrispondenze singolari, sarà $\varrho > 1$.

21. - Il teorema della base vale anche se F ed F' sono distinte. Applicando anzi quanto è stato detto al n.° 15, si trova che il numero base per le corrispondenze fra F ed F' è $\leq 2q'^2$, q' essendo l'irregolarità di F'. Ma è facile vedere che ϱ è minore uguale del più piccolo dei due numeri $2q^2$, $2q'^2$. Basta osservare che se T ed S sono due corrispondenze fra F ed F' legate dalla relazione $\lambda T + \mu S \equiv 0$, in maniera cioè che $\lambda T + \mu S$ sia a valenza zero, anche l'inversa, $\lambda T^{-1} + \mu S^{-1}$, sarà a valenza zero, cioè T^{-1} ed S^{-1} risultano legate dalla stessa relazione.

Estendendo l'osservazione al caso di più corrispondenze, si trova che se T_1, T_2,...., T_ϱ è una base per le corrispondenze fra F ed F', T_1^{-1}, T_2^{-1},...., T_ϱ^{-1} è una base per le corrispondenze fra F' ed F. Si può quindi parlare di un'unica base e di un sol numero base ϱ fra le due superficie indipendentemente dall'ordine nel quale si considerano, e perciò, come si è detto, ϱ deve risultare minore uguale tanto di $2q^2$ quanto di $2q'^2$.

Osserviamo ancora che se T ed S sono due corrispondenze dello stesso rango $q-r$, legate agli stessi sistemi regolari d'integrali riducibili

$$(30) \qquad \begin{cases} I_1, \quad I_2, \ldots, \quad I_{q-r}; & I_1', \quad I_2', \ldots, \quad I'_{q'-r'}; \\ J_1, \quad J_2, \ldots, \quad J_r; & J_1', \quad J_2', \ldots, \quad J'_{r'}, \end{cases}$$

ogni corrispondenza $\lambda T+\mu S$ ha generalmente lo stesso rango. Dette infatti γ^2_β, $\gamma^2_{\beta'}$ le serie che T ed S inducono su F', ogni integrale J_t' darà somma costante in tutti i gruppi della $\lambda\gamma^2_\beta+\mu\gamma^2_{\beta'}$ che $\lambda T+\mu S$ evidentemente induce su F'.

Non è escluso però che in qualche caso particolare $\lambda T+\mu S$ sia di rango minore, perchè qualche integrale I_t' pur dando somme variabili su γ^2_β e $\gamma^2_{\beta'}$ separatamente, dia somma costante su $\lambda\gamma^2_\beta+\mu\gamma^2_{\beta'}$. Perchè ciò avvenga occorre però che F' abbia un sistema regolare d'integrali riducibili

$$J_1', \quad J_2', \ldots, \quad J_r', \quad J'_{r+1}, \ldots, \quad J'_{r+l} \qquad (r+l\leqslant q')$$

contenente quello segnato in (30).

In particolare ciò avviene quando $\lambda T+\mu S$ è a valenza zero (allora sarà proprio $r+l=q'$).

Considerazioni analoghe si possono fare per la corrispondenza prodotto $T\cdot S$.

Si può allora dire che il rango della somma $\lambda T+\mu S$ e del prodotto TS è $\leqslant q-r$.

In particolare: *Il sistema delle corrispondenze fra F ed F', di rango minore uguale $q-r$, legate agli stessi sistemi regolari d'integrali riducibili, formano gruppo.*

Orbene anche per tale gruppo si può stabilire una base. Basta, per esempio, riferirsi ai cicli tridimensionali Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2(q-r)}$, relativi agli integrali J_1', $J_2', \ldots,$ J_r' come furono costruiti al n.° 18 e ripetere i ragionamenti del n.° 19. Per numero base si troverà $\varrho_{q-r}\leqslant 4(q-r)^2$.

Se però si costruisce, alla maniera del SEVERI, un sistema di cicli normali relativi agli integrali I_1, $I_2, \ldots, I_{q-r}$ si troverà con maggiore determinazione $\varrho_{q-r}\leqslant 2(q-r)^2$.

22. - La teoria della base si può svolgere in altro senso.

Abbiamo visto che ogni corrispondenza T fra i punti di F ed F' si può rappresentare con una superficie T' sulla varietà W delle coppie di punti di F ed F'.

Sopra W, e sulla sua riemanniana, consideriamo ogni superficie T' come un ciclo algebrico a quattro dimensioni. Indichiamo con σ il massimo numero di cicli algebrici a quattro dimensioni di W e siano:

$$T_1', \quad T_2', \ldots, \quad T'_\sigma$$

un sistema completo di superficie algebriche rappresentanti σ cicli indipendenti. Ogni altra superficie Φ di W sarà legata ad esse da una relazione del tipo

$$\lambda\Phi \sim \lambda_1 T_1'+\lambda_2 T_2'+\ldots+\lambda_\sigma T'_\sigma.$$

Passando dalle superficie di W alle corrispondenze fra F ed F' che esse rappresentano, diciamo $T_1, T_2, \dots, T_\sigma$ le corrispondenze che hanno $T_1', T_2', \dots, T'_\sigma$ come immagine. Per ogni corrispondenza T si dovrà avere:

$$\lambda T \sim \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_\sigma T_\sigma.$$

Ma questo legame è di natura tutt'affatto diverso da quello considerato nei numeri precedenti.

In ogni modo — in questo senso — $T_1, T_2, \dots, T_\sigma$ formano una base.