ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ADOLFO DEL CHIARO

Sull' esistenza del minimo in problemi di calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 1 (1934), p. 63-83

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_1_63_0>

SULL' ESISTENZA DEL MINIMO IN PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI [1]

di ADOLFO DEL CHIARO (Pisa).

Introduzione.

Nel suo libro di *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* [2], il TONELLI ha dato numerosi teoremi di esistenza del minimo (assoluto) per integrali curvilinei quasi-regolari, semidefiniti positivi; per quegli integrali che non risultano anche seminormali, si è limitato a supporre la funzione integranda della forma

$$\varphi(x, y)\sqrt{x'^2+y'^2}. \tag{1}$$

Il metodo da Lui usato per lo studio di questi ultimi integrali si presta ad essere opportunamente esteso, permettendo, così, di giungere a notevoli generalizzazioni dei risultati da Lui ottenuti. Il presente lavoro è dedicato, appunto, alla esposizione dei teoremi che costituiscono queste generalizzazioni. In essi la funzione integranda non si presenterà più sotto la forma (1), ma assumerà, sotto particolari ipotesi, la forma più generale

$$\varphi(x, y)\psi(x, y, x', y').$$

Inoltre, poichè molte volte viene sfruttata l'ipotesi del minimo relativo regolare, abbiamo dato anche un teorema per l'esistenza di tale minimo, teorema che generalizza una proposizione già ottenuta dal TONELLI.

Estenderemo, infine, un altro teorema del TONELLI, che si riferisce al caso in cui la funzione integranda diventa infinita in qualche punto del campo considerato.

§ 1. - Preliminari.

1. - Chiamato *campo A* un insieme chiuso di punti del piano (x, y), diremo che un insieme di curve ordinarie (cioè continue e rettificabili) C, appartenenti

---

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2] L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Zanichelli, Bologna.

al campo A, costituisce *una classe completa*, quando ogni sua curva di accumulazione, se rettificabile, appartiene essa pure all'insieme (3). Una classe K di curve ordinarie C sarà poi *piena nell'intorno di un punto P_0 del campo A*, se esiste un $\varrho > 0$ tale che sostituendo, in una qualsiasi curva C di K un suo arco qualunque, purchè tutto contenuto nel cerchio (P_0, ϱ), con la corda corrispondente, si ottenga ancora una curva della stessa classe K (4).

Una classe K di curve ordinarie C sarà invece *piena nell'intorno e sulla curva continua, in senso generale* (5), Γ, del campo A, se, per ogni parte limitata A' di A, esiste un $\varrho > 0$ tale che sostituendo in una curva qualunque C di K, ad un suo arco il quale appartenga ad un cerchio di raggio ϱ e col centro in un punto di Γ facente parte di A', la corda corrispondente o la spezzata ottenuta unendo il centro di detto cerchio con gli estremi dell'arco, si ottenga ancora una curva di K (6).

Sia ora $F(x, y, x', y')$ una funzione, la quale risulti definita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, rispetto a x' e y', per ogni punto (x, y) del campo A e per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli e, per gli stessi valori di x, y, x', y', risulti positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle x' e y', soddisfi, cioè, alla uguaglianza

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'),$$

per ogni $k > 0$.

Presa allora una curva ordinaria C ed indicato con $\mathfrak{J}_C$ l'integrale curvilineo

$$\int_C F(x, y, x', y')ds,$$

essendo s la lunghezza dell'arco della C contata a partire dal primo estremo della curva, se questa è aperta, da un punto qualunque, se è chiusa; e chiamato F_1 l'invariante di WEIERSTRASS, dato dalle relazioni

$$F_1 \equiv \frac{F_{x'x'}}{y'^2} \equiv -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

---

(3) Loc. cit. (2), vol. II, pag. 1.

(4) Loc. cit. (2), vol. II, pag. 56.

(5) Una curva piana continua in senso generale è costituita dall'insieme ordinato di punti definito dalle equazioni

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad (a, b),$$

dove $f(t)$ e $g(t)$ sono funzioni date in tutto l'intervallo (a, b), eccettuati, al più, gli estremi a e b, e tali che:

1°) in ogni punto di (a, b) in cui sono definite, esse siano continue;

2°) se nell'estremo a non sono ambedue definite, una almeno di esse tenda, per $t \to a$, a $\pm\infty$; e così pure nell'estremo b.

(6) Loc. cit. (2), vol. II, pag. 65.

diremo che l'integrale $\mathfrak{J}_C$ è:

quasi-regolare positivo, se, per ogni punto (x, y) del campo A e per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli, è $F_1 \geqslant 0$;

semidefinito positivo, se, per gli stessi x, y, x', y', è sempre $F \geqslant 0$ (7).

§ 2. - Minimi relativi regolari di una funzione $\varphi(x, y)$.

2. - Data una funzione $\varphi(x, y)$, definita e continua in tutti i punti del campo A, diremo (8) che essa ha, in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, *un minimo relativo regolare rispetto ad* A, se è possibile determinare tre numeri ϱ, h, k, positivi e minori di 1, tali che:

1°) scelto comunque un punto $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y})$ del cerchio (P_0, ϱ) ed appartenente ad A, nei punti di A che si trovano sul segmento rettilineo $P_0\overline{P}$ sia sempre

$$\varphi(x, y) \leqslant \varphi(\overline{x}, \overline{y});$$

2°) indicate con $\overline{r}$ ed $\overline{r}'$, rispettivamente, la minima distanza, da P_0, dei punti di A in cui è $\varphi(x, y) = \varphi(\overline{x}, \overline{y})$, e la massima distanza, pure da P_0, dei punti di A, appartenenti al cerchio (P_0, ϱ), in cui è

$$\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) = h[\varphi(\overline{x}, \overline{y}) - \varphi(x_0, y_0)],$$

sia $\overline{r}' \leqslant k\overline{r}$.

Diremo (9) poi che la $\varphi(x, y)$ ha, in una curva C di A, continua, in senso generale, *una linea di minimi relativi regolari rispetto ad* A, se, in tutti i punti della C, la φ assume un valore costante φ_0, e se, inoltre, per ogni parte limitata e chiusa A' di A, esistono 3 numeri ϱ, h, k, positivi e minori di 1, tali che:

1°) scelto comunque un punto $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y})$ di A', appartenente all'intorno (ϱ) della C, e detto Q un punto di tale curva, preso in modo che il segmento rettilineo $\overline{P}Q$ sia uguale alla minima distanza di $\overline{P}$ dalla curva medesima, nei punti di A' che si trovano sul segmento $\overline{P}Q$, sia sempre $\varphi(x, y) \leqslant \varphi(\overline{x}, \overline{y})$;

2°) indicati con $\overline{r}$ ed $\overline{r}'$, rispettivamente, la minima distanza, dalla C, dei punti di A', in cui è $\varphi(x, y) = \varphi(\overline{x}, \overline{y})$, e il massimo valore delle minime distanze, dalla C, dei punti di A' in cui è

$$\varphi(x, y) - \varphi_0 = h[\varphi(\overline{x}, \overline{y}) - \varphi_0]$$

e che appartengono all'intorno (ϱ) della C, sia $\overline{r}' \leqslant k\overline{r}$.

---

(7) Loc. cit. (2), vol. I, pag. 224.
(8) Loc. cit. (2), vol. II, pag. 44.
(9) Loc. cit. (2), vol. II, pag. 63.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

Ammesso che, in tutti i punti di un intorno di $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, *sia*

$$\varphi(x, y) \equiv \psi[f(x, y)]$$

con $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ *e* $\psi(z) > \psi[f(x_0, y_0)]$ *per* $z > f(x_0, y_0)$ *e che la* ψ *e la* f *siano continue insieme con le loro derivate rispettivamente dei primi* n *e dei primi due ordini; ammesso inoltre che in* P_0 *l'Hessiano della* $f(x, y)$ *sia positivo e che si abbia*

$$\psi'[f(x_0, y_0)] = \psi''[f(x_0, y_0)] = \dots = \psi^{(n-1)}[f(x_0, y_0)] = 0$$

e

$$\psi^{(n)}[f(x_0, y_0)] > 0,$$

la $\varphi(x, y)$ *ha, nel punto* P_0, *un minimo relativo regolare* ([10]).

Posto $x - x_0 = \varrho \cos \alpha$, $y - y_0 = \varrho \operatorname{sen} \alpha$, abbiamo, nell'intorno considerato di P_0,

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} \equiv f_x \cos \alpha + f_y \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} \equiv f_{xx} \cos^2 \alpha + 2 f_{xy} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + f_{yy} \operatorname{sen}^2 \alpha \tag{2}$$

ed essendo, per ipotesi, nel punto (x_0, y_0)

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0,$$

si possono trovare tre numeri positivi μ, μ_1, ϱ_0, con $\mu < \mu_1$, tali che, nel cerchio (P_0, ϱ_0), si abbia

$$\frac{1}{2} \mu < \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} < 2 \mu_1, \tag{3}$$

cioè

$$\frac{1}{2} \mu < f_{xx} \cos^2 \alpha + 2 f_{xy} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + f_{yy} \operatorname{sen}^2 \alpha < 2 \mu_1. \tag{4}$$

Dalla (3), essendo $\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = 0$, si ha, per ogni α e per ogni $\varrho \leq \varrho_0$,

$$\frac{1}{2} \mu \varrho \leq \frac{\partial f}{\partial \varrho} \leq 2 \mu_1 \varrho, \tag{5}$$

$$\frac{1}{4} \mu \varrho^2 \leq f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq \mu_1 \varrho^2. \tag{6}$$

Per l'ammessa continuità di $\psi^{(n)}$ e per aver supposto $\psi^{(n)}[f(x_0, y_0)] > 0$ si ha poi, per ϱ_0 sufficientemente piccolo, nel cerchio (P_0, ϱ_0),

$$\frac{1}{2} \psi^{(n)}[f(x_0, y_0)] \leq \psi^{(n)}[f(x, y)] \leq 2 \psi^{(n)}[f(x_0, y_0)],$$

od anche, posto per brevità $\psi^{(n)}[f(x_0, y_0)] = \psi_0^{(n)}$,

$$\frac{1}{2} \psi_0^{(n)} \leq \psi^{(n)}[f(x, y)] \leq 2 \psi_0^{(n)},$$

([10]) Questo teorema contiene come caso particolare quello dato dal Tonelli in loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 47.

da cui, tenendo conto delle $\psi^{(r)}[f(x_0, y_0)] = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$,

$$\frac{1}{2}\psi_0^{(n)}\{f(x, y) - f(x_0, y_0)\} \leq \psi^{(n-1)}[f(x, y)] \leq 2\psi_0^{(n)}\{f(x, y) - f(x_0, y_0)\},$$

. . . .

$$\frac{1}{2}\psi_0^{(n)}\frac{1}{(n-2)!}\{f(x, y) - f(x_0, y_0)\}^{n-2} \leq \psi''[f(x, y)] \leq 2\psi_0^{(n)}\frac{1}{(n-2)!}\{f(x,y) - f(x_0, y_0)\}^{n-2},$$

$$\frac{1}{2}\psi_0^{(n)}\frac{1}{(n-1)!}\{f(x, y) - f(x_0, y_0)\}^{n-1} \leq \psi'[f(x, y)] \leq 2\psi_0^{(n)}\frac{1}{(n-1)!}\{f(x, y) - f(x_0, y_0)\}^{n-1}.$$

Per la (6) segue

$$\frac{1}{2^{2n-3}(n-2)!}\psi_0^{(n)}\mu^{n-2}\varrho^{2(n-2)} \leq \psi''[f(x, y)] \leq \frac{2}{(n-2)!}\psi_0^{(n)}\mu_1^{n-2}\varrho^{2(n-2)}. \tag{7}$$

Analogamente si ha

$$\frac{1}{2^{2n-1}(n-1)!}\psi_0^{(n)}\mu^{n-1}\varrho^{2(n-1)} \leq \psi'[f(x, y)] \leq \frac{2}{(n-1)!}\psi_0^{(n)}\mu_1^{n-1}\varrho^{2(n-1)}. \tag{8}$$

Ora
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} \equiv \{f_x \cos\alpha + f_y \operatorname{sen}\alpha\}\psi'$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2\varrho} \equiv \{f_x \cos\alpha + f_y \operatorname{sen}\alpha\}^2\psi'' + \{f_{xx}\cos^2\alpha + 2f_{xy}\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + f_{yy}\operatorname{sen}^2\alpha\}\psi'$$

e quindi, per le (4), (5), (7), (8), si ha

$$\frac{(2n-1)\psi_0^{(n)}\mu^n\varrho^{2(n-1)}}{2^{2n}(n-1)!} \leq \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} \leq \frac{4(2n-1)\psi_0^{(n)}\mu_1^n\varrho^{2(n-1)}}{(n-1)!}.$$

Di qui, tenendo presente che $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=0} = 0$, segue

$$\frac{\psi_0^{(n)}\mu^n\varrho^{2n-1}}{2^{2n}(n-1)!} \leq \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} \leq \frac{4\psi_0^{(n)}\mu_1^n\varrho^{2n-1}}{(n-1)!} \tag{9}$$

od anche
$$\frac{\psi_0^{(n)}\mu^n\varrho^{2n}}{2^{2n+1}n!} \leq \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \leq \frac{2\psi_0^{(n)}\mu_1^n\varrho^{2n}}{n!},$$

cioè, posto $m = \frac{\psi_0^{(n)}\mu^n}{2^{2n+1}n!}$ e $M = \frac{2\psi_0^{(n)}\mu_1^n}{n!}$,

$$m\varrho^{2n} \leq \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \leq M\varrho^{2n}. \tag{10}$$

Essendo dunque, per la (9), $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ sempre positiva, tranne per $\varrho = 0$, la

$$\varphi(x_0 + \varrho\cos\alpha, y_0 + \varrho \operatorname{sen}\alpha)$$

è funzione sempre crescente con ϱ e se $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y})$ è un punto di A appartenente al cerchio (P_0, ϱ_0), il valore che in esso assume la φ è maggiore di tutti quelli che la φ assume negli altri punti di A del segmento $P_0\overline{P}$.

Inoltre, la minima distanza $\bar{r}$, da P_0, dei punti di A in cui è $\varphi(x, y)=\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, soddisfa, per la (10), alla disuguaglianza

$$\bar{r} \geqslant \sqrt[2n]{\frac{\varphi(\bar{x}, \bar{y})-\varphi(x_0, y_0)}{M}};$$

e la massima distanza $\bar{r}'$, da P_0, dei punti di A appartenenti al cerchio (P_0, ϱ_0), in cui è

$$\varphi(x, y)-\varphi(x_0, y_0)=\frac{m}{2^{2n}M}[\varphi(\bar{x}, \bar{y})-\varphi(x_0, y_0)],$$

soddisfa, pure per la (10), alla disuguaglianza

$$\bar{r}' \leqslant \frac{1}{2}\bar{r},$$

e la condizione $\bar{r}' \leqslant k\bar{r}$ è verificata per $h=\frac{m}{2^{2n}M}$ e $k=\frac{1}{2}$.

Esempi. - Le condizioni stabilite sono verificate, se è

$$\varphi(x, y) \equiv \psi[f(x, y)] \equiv (x^2+y^2)^n$$

con n intero $\geqslant 1$.

La $f(x, y) \equiv (x^2+y^2)$ è, infatti, sempre positiva in tutto il piano tranne l'origine, ove si annulla. Inoltre

$$\psi'[f(0, 0)]=\psi''[f(0, 0)]= \dots =\psi^{(n-1)}[f(0, 0)]=0,$$
$$\psi^{(n)}[f(0, 0)]=n!, \qquad f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0)-f_{xy}^2(0, 0)=4.$$

Nell'origine si ha, quindi, un minimo relativo regolare.

Altrettanto si ha per la funzione

$$\varphi(x, y) \equiv \psi[f(x, y)] \equiv (x^2+y^2+xy)^n$$

con n intero $\geqslant 1$.

E così pure, se è

$$\varphi(x, y) \equiv \psi[f(x, y)] \equiv (a^2x^2+b^2y^2)^n$$

con $ab \neq 0$ ed $n \geqslant 1$, si ha un minimo relativo regolare nell'origine.

§ 3. - Costruzione di una successione minimizzante.

3. - Sia $F(x, y, x', y')$ una funzione di x, y, x', y' soddisfacente alle condizioni poste al n.° 1. Sia poi, per ogni coppia (x', y') normalizzata [11], $F(x, y, x', y')>0$ in tutto A, eccettuato un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ ove si ha $F(x_0, y_0, x', y') \equiv 0$. Sia sempre, infine, $F_1(x, y, x', y') \geqslant 0$.

L'integrale

$$\mathfrak{J}_C \equiv \int_C F(x, y, x', y')ds$$

---

[11] Soddisfacente, cioè, all'uguaglianza $x'^2+y'^2=1$.

risulta allora quasi-regolare, semidefinito positivo e *data comunque una classe K di curve ordinarie C, tutte contenute in una parte limitata A' di A e supposta K piena nell'intorno di P_0, è possibile costruire una successione minimizzante per $\mathfrak{I}_C$ nella classe K, convergente uniformemente ad una curva continua* ([12]).

Osserviamo intanto che essendo $\mathfrak{I}_C$ semidefinito positivo, il suo limite inferiore i, nella classe K è finito e non negativo. Consideriamo poi una successione di insiemi di curve

$$W_1, \quad W_2, \quad W_3, \ldots, \quad W_n, \ldots,$$

minimizzante per $\mathfrak{I}_C$ nella classe K. L'insieme W_n sia costituito da tutte le curve di K, per le quali si ha

$$\mathfrak{I}_C \leq i + \frac{1}{n}. \tag{11}$$

Possiamo supporre che la successione degli insiemi dei primi estremi ([13]) delle curve di W_n tenda ad un unico punto Q^*, e che quella relativa ai secondi estremi tenda ad un unico punto Q^{**}. Preso un $\varrho > 0$ qualunque ed una qualsiasi curva C di K, diciamo $L(\varrho)$ la misura lineare contata sulla curva dell'insieme di tutti i punti di C non interni al cerchio (P_0, ϱ) ed indichiamo con $m(\varrho)$ il minimo valore (>0) che la funzione F assume nei punti di A' ([14]) non interni al cerchio indicato e per ogni coppia normalizzata.

Si ha allora

$$\mathfrak{I}_C \geq m(\varrho) L(\varrho)$$

e per la (11), se C appartiene a W_n,

$$L(\varrho) \leq \frac{i+1}{m(\varrho)}.$$

Possono ora presentarsi tre casi:

1°) è possibile determinare un ϱ_0 tale che, qualunque sia n, esista sempre in W_n almeno una curva costituita tutta di punti non interni al cerchio (P_0, ϱ_0);

2°) comunque si prenda ϱ e per ogni n, esiste sempre, in W_n, almeno una curva tutta contenuta nel cerchio (P_0, ϱ_0);

3°) per ϱ sufficientemente piccolo è possibile determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, esistano, su ogni curva di W_n, punti esterni e punti interni al cerchio (P_0, ϱ).

([12]) Per brevità ometteremo i particolari della dimostrazione, per i quali si veda loc. cit. ([2]), vol. II, pagg. 49-55, i ragionamenti ivi fatti, nel caso particolare di $F(x, y, x', y') \equiv \equiv \varphi(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}$, avendo carattere generale.

([13]) Per ciascuna curva che sia chiusa si intenderà fissato un punto da considerare come primo punto.

([14]) L'esistenza di tale minimo si ha ammettendo che A' sia un insieme chiuso, il che, per altro, si può sempre supporre.

Nel primo caso è possibile ([15]) costruire una successione $\{C_n\}$ di insiemi di curve, tutti estratti dai W_n, e convergente uniformemente ad una curva continua C_0. La successione $\{C_n\}$ è ancora una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$ in K.

Nel secondo caso, la successione $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ ammette una curva di accumulazione costituita dal solo punto P_0 e possiamo quindi costruire un'altra successione di insiemi $\{C_n\}$, tutti estratti dai W_n, convergente uniformemente alla C_0. La successione $\{C_1\}, \{C_2\}, \ldots, \{C_n\}, \ldots$ risulta ancora una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$ in K.

Nel terzo caso, siano ϱ_0 e n_0 due numeri tali che, per ogni $n > \bar{n}_0$, esistano, su ogni curva C_n di W_n, punti interni e punti esterni al cerchio (P_0, ϱ_0). Supporremo ϱ_0 minore del ϱ di cui si parla nella definizione di classe di curve piena nell'intorno del punto P_0, ed anche minore di $P_0 Q^*$ se $P_0 \not\equiv Q^*$, e di $P_0 Q^{**}$, se $P_0 \not\equiv Q^{**}$; e supporremo $\bar{n}_0$ anche tale che per $n \geqslant \bar{n}_0$ il primo estremo di C_n sia interno al cerchio (P_0, ϱ_0) se $P_0 \equiv Q^*$ ed esterno a tale cerchio nel caso opposto. Supposto $n > \bar{n}_0$, diciamo M_n il primo punto di C_n non interno al cerchio (P_0, ϱ_0) e $C_n^{(1)}$ il massimo arco di C_n che lo contiene e tale che ad esso non appartenga alcun punto interno al cerchio $\left(P_0, \frac{\varrho_0}{2}\right)$.

Detto allora $W_n^{(1)}$ l'insieme degli archi $C_n^{(1)}$, è possibile ([16]) costruire un'altra successione $W_{1,1}^{(1)}, W_{2,1}^{(1)}, \ldots, W_{n,1}^{(1)}, \ldots$ convergente uniformemente ad una curva $C^{(1)}$ di accumulazione per la $W_{\bar{n}_0+1}^{(1)}, W_{\bar{n}_0+2}^{(1)}, \ldots$, l'insieme $W_{n,1}^{(1)}$ essendo un insieme estratto da un $W_{\bar{n}_0+r}^{(1)}$ con $r \geqslant n$.

Se diciamo $W_{n,1}$ l'insieme delle curve di $W_{\bar{n}_0+r}$, $\bar{n}_0+r$ essendo l'indice di quell'insieme $W^{(1)}$ da cui è estratto $W_{n,1}^{(1)}$, la successione $W_{1,1}, W_{2,1}, \ldots, W_{n,1}, \ldots$ è ancora una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$ in K. Considerato poi il cerchio $\left(P_0, \frac{\varrho_0}{4}\right)$ in luogo di quello $\left(P_0, \frac{\varrho_0}{2}\right)$ e ripetuti gli stessi ragionamenti, partendo dalla successione dei $W_{n,1}$, si troverà un'altra successione $W_{1,2}, W_{2,2}, \ldots, W_{n,2}, \ldots$, essendo $W_{n,2}$ un insieme di curve estratto da un $W_{m,1}$, di indice $m \geqslant n$ e tale che, detto $W_{n,2}^{(2)}$ l'insieme degli archi $C_{n,2}^{(2)}$ analoghi ai $C_n^{(1)}$, la successione $W_{1,2}^{(2)}, W_{2,2}^{(2)}, \ldots, W_{n,2}^{(2)}, \ldots$ converga uniformemente verso una curva $C^{(2)}$, contenente, come arco parziale, la $C^{(1)}$. Seguitiamo questa costruzione considerando il cerchio $\left(P_0, \frac{\varrho_0}{8}\right)$ e la successione dei $W_{n,2}$, e così proseguiamo indefinitamente.

Consideriamo allora la successione $W_{1,1}, W_{2,2}, \ldots, W_{n,n}, \ldots$ la quale è ancora una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$ in K. Ogni $W_{n,n}$ è formato da curve tutte estratte dallo stesso W_m, essendo $m \geqslant n$. Inoltre, detto $C_{n,n}^{(\nu)}$ il massimo arco di ogni curva $C_{n,n}$ di $W_{n,n}$, contenente il primo punto della curva non interno al cerchio (P_0, ϱ_0) ed a cui non appartiene alcun punto interno al cerchio $\left(P_0, \frac{\varrho_0}{2^\nu}\right)$

([15]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 50.

([16]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 51.

ed indicato con $W_{n,n}^{(\nu)}$ l'insieme di tutti questi archi, la successione $W_{1,1}^{(\nu)}$, $W_{2,2}^{(\nu)}$,...., $W_{n,n}^{(\nu)}$,...., converge uniformemente ad una curva $C^{(\nu)}$ di lunghezza finita, avente almeno un punto non interno al cerchio (P_0, ϱ_0) ed almeno un estremo sulla circonferenza di $\left(P_0, \frac{\varrho_0}{2^\nu}\right)$, senza contenere alcun punto interno a questo cerchio. Infine, $C^{(\nu)}$ è contenuto, come arco parziale, in $C^{(\nu+1)}$. Preso ora un punto qualunque M di $C^{(1)}$, supponiamo che esista un $\bar{\varrho} < \varrho_0$ tale che, qualunque sia ν, nessun punto di $C^{(\nu)}$ che preceda M sia interno al cerchio $(P_0, \bar{\varrho})$. In tal caso, detto $M^{(\nu)}$ il primo estremo di $C^{(\nu)}$, l'arco $C^{(\nu)}(M^{(\nu)}, M)$ ha lunghezza inferiore ad un numero fisso, indipendente da ν ([17]).

La successione $C^{(1)}(M^{(1)}, M)$, $C^{(2)}(M^{(2)}, M)$,.... converge perciò uniformemente ad una curva continua.

Se il numero $\bar{\varrho}$ non esiste, comunque si prenda $\varrho < \varrho_0$, si trova sempre un ν_1 tale che per $\nu > \nu_1$ sull'arco $C^{(\nu)}(M^{(\nu)}, M)$ vi siano sempre dei punti interni al cerchio (P_0, ϱ). Esiste ([18]) allora un ν_2 tale che per $\nu > \nu_2$ tutti i punti di $C^{(\nu)}(M^{(\nu)}, M^{(\nu_2)})$ appartengono al cerchio (P_0, ϱ). Da ciò segue che la successione $C^{(1)}(M^{(1)}, M)$, $C^{(2)}(M^{(2)}, M)$,...., $C^{(\nu)}(M^{(\nu)}, M)$,.... converge uniformemente ad una curva continua avente il primo estremo in P_0 ed il secondo in M.

Analogamente, detto $N^{(\nu)}$ il secondo estremo di $C^{(\nu)}$, anche l'arco $C^{(\nu)}(M, N^{(\nu)})$ converge uniformemente ad una curva continua. Ne segue quindi che la successione $C^{(1)}$, $C^{(2)}$,.... converge essa pure ad una curva continua $C^{(\infty)}$. Indichiamo con $\alpha^{(1)}$ la curva $C^{(\infty)}$ trovata e siano Q_1 e Q_2 il primo e secondo estremo di $\alpha^{(1)}$. Sarà $Q_1 \equiv Q^*$.

Detti ora $M_{n,n}^{(\nu)}$ il primo estremo e $N_{n,n}^{(\nu)}$ il secondo estremo dell'arco $C_{n,n}^{(\nu)}$, indichiamo con $M_{n,n}^{(\infty)}$ il punto $M_{n,n}^{(\nu)}$ di indice ν più alto, se la $C_{n,n}$ non figura in tutti gli insiemi $W_{n,n}$ e il limite di $M_{n,n}^{(\nu)}$ per $\nu \to \infty$ in caso contrario. Analogamente indichiamo con $N_{n,n}^{(\infty)}$ il punto $N_{n,n}^{(\nu)}$ di indice ν più alto, se la $C_{n,n}$ non figura in tutti gli insiemi $W_{n,n}$, e il limite di $N_{n,n}^{(\nu)}$ per $\nu \to \infty$, se accade il caso contrario. Abbiamo allora ([19]) che, preso un ϱ qualunque, esiste un ν' tale che, per ogni $\nu > \nu'$ e per ogni n maggiore di un certo n', tutti gli archi $C_{n,n}(M_{n,n}^{(\infty)}, M_{n,n}^{(\nu)})$ risultano contenuti nel cerchio (Q_1, ϱ) e tutti gli archi $C_{n,n}(N_{n,n}^{(\nu)}, N_{n,n}^{(\infty)})$ risultano contenuti nel cerchio (Q_2, ϱ). Detto $U_{n,n}^{(1)}$ l'insieme degli archi $C_{n,n}(M_{n,n}^{(\infty)}, N_{n,n}^{(\infty)})$ relativi a tutte le curve $C_{n,n}$ di $W_{n,n}$ si ha ([20]) che la successione $U_{1,1}^{(1)}$, $U_{2,2}^{(1)}$,...., $U_{n,n}^{(1)}$,.... converge uniformemente verso la curva $\alpha^{(1)}$.

Da ogni curva $C_{n,n}$ deduciamo la curva $C'_{n,n}$ ottenuta sostituendo all'arco di $C_{n,n}$ che precede $M_{n,n}^{(\infty)}$ la corda corrispondente, e indichiamo con $W'_{n,n}$ l'in-

---

([17]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 52.
([18]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 53.
([19]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 54.
([20]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 55.

sieme delle curve $C'_{n,n}$. La successione dei $W'_{n,n}$ è anch'essa minimizzante. Togliamo ora, da ogni curva $C'_{n,n}$ di $W'_{n,n}$, tutti i punti che precedono $N_{n,n}^{(\infty)}$ e ripetiamo, per gli archi restanti, i ragionamenti fatti, e così proseguiamo finchè, per infiniti valori di n, esistono degli archi restanti contenenti punti esterni al cerchio (P_0, ϱ_0). Veniamo così a costruire gli archi $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$,...., ognuno dei quali ha tutti i suoi punti interni distinti da P_0, mentre ambedue gli estremi cadono in P_0, eccettuato, al più, il secondo estremo dell'ultimo di essi. Ognuno degli α ha poi almeno un punto non interno al cerchio (P_0, ϱ_0). Da ciò ne viene ([21]) che il procedimento indicato avrà un termine; gli α sono, cioè, in numero finito. Detta quindi C_0 la curva costituita da tutti gli archi $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$,...., il procedimento seguito per la costruzione degli α ci dà una successione $\{C_1\}$, $\{C_2\}$,...., $\{C_m\}$,.... di insiemi di curve della classe K uniformemente convergente verso la C_0, e l'insieme $\{C_m\}$ si dedurrà da un altro $\{\overline{C}_m\}$ estratto da un W_n di indice $n \geqslant m$, sostituendo ad un numero finito di archi di $\overline{C}_m$, tutti contenuti nel cerchio (P_0, ϱ_0) le corde corrispondenti. La successione $\{C_1\}$, $\{C_2\}$,...., $\{C_m\}$,.... è poi ancora una successione minimizzante.

§ 4. - Teoremi di esistenza.

4. - *Sia, in tutto il campo A,*

$$F(x, y, x', y') \equiv \varphi(x, y)\psi(x, y, x', y'),$$

dove supponiamo che $\varphi(x, y)$ sia finita e continua in tutto A, e $\varphi(x, y) > 0$ in tutti i punti del campo, eccettuati alcuni di essi, in numero finito, P_0, P_1,...., P_n, in ciascuno dei quali la $\varphi(x, y)$ si annulla ed ha un minimo relativo regolare rispetto ad A. Supponiamo, inoltre, che la $\psi(x, y, x', y')$ soddisfi alle condizioni poste per la F nel n.° 1.

Sia, infine, per ogni coppia (x', y') normalizzata,

$$\psi(x, y, x', y') > 0, \qquad \psi_1(x, y, x', y') \geqslant 0.$$

Se allora K è una classe completa di curve ordinarie C, tutte contenute in una parte limitata del campo A, e se tale classe è piena nell'intorno di ciascuno dei punti P_0, P_1,...., P_n, esiste il minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$ in K ([22]).

Essendo, per le ipotesi poste, l'integrale $\mathfrak{J}_C$ quasi-regolare, semidefinito positivo, per poter affermare l'esistenza del minimo, basterà ([23]) costruire, per esso, in K, una successione minimizzante convergente uniformemente ad una curva ordinaria C_0.

([21]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 55.

([22]) Questo teorema generalizza quello dato dal TONELLI in loc. cit. ([2]), vol. II, p. 56.

([23]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, cap. I, n.° 4 *b*).

Supponiamo, per semplicità di trattazione, che la F si annulli solamente nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e sia

(12) $$\{C_1\}, \quad \{C_2\}, \ldots, \quad \{C_n\}, \ldots$$

la successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$ in K, costruita col metodo indicato al numero precedente. Tale successione convergerà uniformemente verso una curva C_0, continua, la quale, come curva limite di una successione di insiemi di curve tutte appartenenti al campo A, apparterrà essa pure a tale campo. Se la C_0 fosse anche rettificabile, sarebbe senz'altro una curva ordinaria. Essendo per ipotesi K una classe completa, il teorema enunciato sarà dunque dimostrato, qualora si provi la rettificabilità della C_0.

Se, nella costruzione della (12), si presenta il primo caso considerato al numero precedente, tutte le curve di $\{C_n\}$ hanno lunghezza inferiore ad un numero fisso, indipendente da n e quindi ([24]) anche la C_0 ha lunghezza finita, non maggiore di tale numero.

Se poi si presenta il secondo caso, poichè allora la C_0 si riduce ad un solo punto, la rettificabilità è evidente.

Nel terzo caso considerato, basterà poi mostrare che è rettificabile l'arco della C_0, $C_0(Q_1, M)$, il quale, seguendo le notazioni del numero precedente, coincide con l'arco $C^{(\infty)}(Q_1, M)$ ed è la curva limite della successione degli archi rettificabili $C^{(1)}(M^{(1)}, M)$, $C^{(2)}(M^{(2)}, M), \ldots$

La rettificabilità di $C_0(Q_1, M)$ segue subito se esiste il numero $\bar{\varrho}$ del numero precedente, perchè allora gli archi della successione sopra scritta hanno tutti lunghezza inferiore a $(i+1) : m\left(\frac{\bar{\varrho}}{2}\right)$ ([25]) e quindi anche la lunghezza di $C_0(Q_1, M)$ risulta inferiore o al più uguale a tale numero.

Resta così da considerare il caso in cui il $\bar{\varrho}$ non esiste. In tale ipotesi, il punto Q_1 coincide con P_0, e dato un numero $\varrho > 0$ sufficientemente piccolo, è possibile determinare un ν_2 tale che per ogni $\nu > \nu_2$ nessun punto dell'arco $C^{(\nu)}(M^{(\nu)}, M^{(\nu_2)})$ e quindi anche di $C_0(Q_1, M^{(\nu_2)})$ risulti esterno al cerchio (P_0, ϱ).

Ora, per ipotesi, la $\varphi(x, y)$ ha in P_0 un minimo relativo regolare e la classe K è *piena* nell'intorno di P_0. Scegliamo quindi il numero ϱ di cui sopra più piccolo di quelli che figurano nelle definizioni di *classe piena nell'intorno di un punto*, e di *minimo relativo regolare*. Poniamo poi, per semplicità, $M^{(\nu_2)} \equiv M_1$ e chiamiamo φ_1 il valore della φ in questo punto. Preso allora il numero h considerato nella definizione di *minimo relativo regolare*, indichiamo con M_2 il primo punto di $C_0(Q_1, M_1)$ tale che sull'arco $C_0(M_2, M_1)$ sia sempre $\varphi \geqq h\varphi_1$. Poichè in $Q_1 \equiv P_0$ è, per ipotesi, $\varphi = 0$, nel punto M_2 sarà certamente $\varphi = h\varphi_1$ ed indi-

---

([24]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. I, cap. II, n.° 19 *e*).

([25]) Cfr. loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 53.

cata con l_1 la lunghezza di $C_0(M_2, M_1)$ si avrà

$$(13) \qquad \mathfrak{J}_{C_0(M_2, M_1)} > h\varphi_1 \mu l_1,$$

essendo μ il minimo valore assunto dalla $\psi(x, y, x', y')$, per ogni coppia (x', y') normalizzata e per ogni punto (x, y) di una parte limitata del campo A contenente tutte le curve di K.

Poichè la successione $U^{(1)}_{1,1}$, $U^{(1)}_{2,2}$,...., $U^{(1)}_{n,n}$,...., già considerata al numero precedente, converge uniformemente ad $a^{(1)} \equiv C_0(Q_1, Q_2)$ e la classe K è *piena* nell'intorno di $Q_1 \equiv P_0$, il segmento rettilineo P_0M_1 appartiene interamente al campo A ed allora, dalla definizione di minimo relativo regolare, si ha

$$(14) \qquad \mathfrak{J}_{P_0M_1} < \varphi_1 M \lambda_1,$$

dove con λ_1 abbiamo indicato la lunghezza di P_0M_1 e con M il massimo della $\psi(x, y, x', y')$ per ogni coppia (x', y') normalizzata e per tutti i punti (x, y) della parte limitata del campo A di cui si è detto poco sopra.

Ma poichè abbiamo [26]

$$\mathfrak{J}_{C_0(M_2, M_1)} \leq \mathfrak{J}_{P_0M_1},$$

dalle (13) e (14) segue

$$h\varphi_1 \mu l_1 < \varphi_1 M \lambda_1,$$

$$l_1 < \frac{M}{\mu} \frac{\lambda_1}{h}.$$

Ragioniamo ora sull'arco $C_0(Q_1, M_2)$ come prima sull'arco $C_0(Q_1, M_1)$.

Chiamato, cioè, M_3 il primo punto di $C_0(Q_1, M_2)$ tale che sull'arco $C_0(M_3, M_2)$ sia sempre $\varphi \geq h(h\varphi_1) = h^2\varphi_1$, e dette l_2 e λ_2 le lunghezze rispettivamente di $C_0(M_3, M_2)$ e di P_0M_2, si avrà

$$l_2 < \frac{M}{\mu} \frac{\lambda_2}{h}.$$

Proseguendo così indefinitamente, avremo, per ogni intero $n > 0$,

$$l_n < \frac{M}{\mu} \frac{\lambda_n}{h},$$

dove λ_n è la lunghezza di P_0M_n ed l_n quella dell'arco $C_0(M_{n+1}, M_n)$, essendo M_{n+1} il primo punto di $C_0(Q_1, M_n)$ tale che sull'arco $C_0(M_{n+1}, M_n)$ sia sempre $\varphi \geq h^n\varphi_1$. Sarà poi, in M_{n+1}, $\varphi = h^n\varphi$ e quindi, poichè è $h < 1$, si avrà, per $n \to \infty$,

$$M_{n+1} \to P_0 \equiv Q_1.$$

La lunghezza di $C_0(M_{n+1}, M_1)$ è data allora da

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n < \frac{M}{\mu h}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

---

[26] Cfr. loc. cit. [2], vol. II, pag. 58.

Ma la φ ha, per ipotesi, un minimo relativo regolare in P_0 e quindi

$$\begin{aligned}
&\lambda_2 \leqslant k\lambda_1 \\
&\lambda_3 \leqslant k\lambda_2 \leqslant k^2\lambda_1 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\lambda_n \leqslant k\lambda_{n-1} \leqslant k^{n-1}\lambda_1,
\end{aligned}$$

dove k è il numero considerato nella definizione di minimo relativo regolare. Ne segue

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n \leqslant \frac{M}{\mu}\frac{\lambda_1}{h}(1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1});$$

cioè, essendo $0 < k < 1$,

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n \leqslant \frac{M\lambda_1}{\mu h}\frac{1}{1-k}.$$

La disuguaglianza ora ottenuta mostra che la lunghezza di $C_0(Q_1, M_1)$ è finita e $\leqslant \frac{M\lambda_1}{\mu h}\frac{1}{1-k}$, e quindi che l'arco $C_0(Q_1, M)$ è rettificabile. In maniera del tutto analoga si dimostra la rettificabilità di $C_0(M, Q_2)$, da cui segue la rettificabilità di $C_0(Q_1, Q_2) \equiv \alpha^{(1)}$. Così pure, risultano rettificabili gli archi $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$,...., vale a dire la curva C_0. Il teorema enunciato risulta così dimostrato.

Esempi. - Sia il campo A coincidente con tutto il piano (x, y) e

$$F(x, y, x', y') \equiv (x^2 + y^2)^n (2\sqrt{x'^2 + y'^2} - y')$$

con n intero $\geqslant 1$.

Tenendo presente il risultato del n.° 2, sono verificate per questa funzione tutte le condizioni indicate nel teorema precedente e quindi l'integrale $\mathfrak{J}_C$ ha il minimo nella classe di tutte le curve continue e rettificabili del piano (x, y), che congiungono due punti dati e che giacciono in un quadrato contenente nel suo interno l'origine $(0, 0)$.

La stessa cosa accade se è

$$F(x, y, x', y') \equiv (a^2x^2 + b^2y^2)^n (2\sqrt{x'^2 + y'^2} - y'),$$

con n intero $\geqslant 1$ e $ab \neq 0$; e così pure, se è

$$F(x, y, x', y') \equiv (x^2 + y^2 + xy)^n (2\sqrt{x'^2 + y'^2} - y'),$$

con n intero $\geqslant 1$.

Le condizioni poste nel teorema precedente sono parimenti verificate se è

$$F(x, y, x', y') \equiv (x^2 + y^2)^n (\sqrt{x'^2 + y'^2} - g(x, y)y')$$

od anche

$$F(x, y, x', y') \equiv (x^2 + y^2 + xy)^n (\sqrt{x'^2 + y'^2} - g(x, y)y'),$$

con n intero $\geqslant 1$ e $g(x, y)$ continua e tale che $|g(x, y)| < 1$.

5\. - Supponiamo ora che gli *zeri* della $F(x, y, x', y')$ (cioè quei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ di A in cui è $F(\bar{x}, \bar{y}, x', y') = 0$, per una o più od anche tutte le coppie (x', y')

normalizzate), anzichè essere in numero finito, riempiano delle curve e dimostriamo il teorema seguente:

Sia, in tutto il campo A,

$$F(x, y, x', y') \equiv \varphi(x, y)\psi(x, y, x', y'),$$

dove supponiamo che la $\varphi(x, y)$ sia finita e continua in tutto A, con $\varphi(x, y) > 0$ in tutti i punti del campo eccettuati quelli appartenenti ad un numero finito di curve continue, in senso generale, Γ_0, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, senza punti comuni, prive di punti multipli e di classe 2, su ciascuna delle quali la φ si annulla ed ha una linea di minimi relativi regolari rispetto ad A; supponiamo, inoltre, che la $\psi(x, y, x', y')$ soddisfi alle condizioni poste per la $F(x, y, x', y')$ nel n.° 1 e sia tale che risulti, per ogni coppia (x', y') normalizzata,

$$\psi(x, y, x', y') > 0, \qquad \psi_1(x, y, x', y') \geqq 0.$$

Se allora K è una classe completa di curve ordinarie C, tutte contenute in una parte limitata del campo A, e se tale classe è piena nell'intorno e su ciascuna delle curve Γ_0, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, esiste il minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$ in K ([27]).

Poichè, nelle ipotesi poste, l'integrale $\mathfrak{J}_C$ è quasi-regolare, semidefinito positivo, per dimostrare il teorema enunciato, basterà costruire una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$ nella classe K e convergente uniformemente ad una curva ordinaria.

Osserviamo, intanto, che è possibile costruire una successione minimizzante convergente uniformemente ad una curva continua C_0. Basta, infatti, sostituire, nei ragionamenti del n.° 3, al cerchio di centro P_0 e raggio ϱ un intorno (ϱ) della curva Γ_0, a cui supporremo, per semplicità, si riducano le curve Γ_0, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$.

Basterà dunque dimostrare la rettificabilità della C_0. Se ora ripetessimo quanto si è detto al n.° 3, si giungerebbe anche questa volta alla considerazione dei seguenti casi ([28]):

1°) è possibile determinare un ϱ_0 tale che, qualunque sia n, sempre esista in W_n almeno una curva costituita tutta di punti non interni all'intorno (ϱ_0) di Γ_0;

2°) comunque si prenda ϱ e per ogni n esiste sempre, in W_n, almeno una curva tutta contenuta nell'intorno (ϱ) di Γ_0;

3°) per ϱ sufficientemente piccolo è possibile determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, esistano, su ogni curva di W_n, punti esterni e punti interni all'intorno (ϱ) di Γ_0.

Nei primi due casi segue subito la rettificabilità della C_0. Nel terzo, se esiste il numero $\bar{\varrho}$ analogo a quello di cui si è parlato al n.° 3, ne viene pure subito la rettificabilità di $C_0(Q_1, M)$. Resta così da esaminare il terzo caso, quando il $\bar{\varrho}$

([27]) Questo teorema generalizza quello dato dal TONELLI in loc. cit. ([2]), vol. II, pag. 65.

([28]) In quanto segue, adotteremo le stesse notazioni dei n.i 3-4.

non esista. In questa ipotesi la C_0 ha certamente un estremo P_0 su Γ_0. Sia poi M_1 un punto di C_0 tale che nessun punto di $C_0(P_0, M_1)$ risulti esterno all'intorno (ϱ) di Γ_0, essendo ϱ un numero più piccolo di quelli che figurano nelle definizioni di *linea di minimi relativi regolari* e di *classe di curve piena nell'intorno e su una curva continua.* Indichiamo ora con M_2 il primo punto di $C_0(P_0, M_1)$ tale che sull'arco $C_0(M_2, M_1)$ sia sempre $\varphi \geqslant h\varphi_1$, essendo φ_1 il valore che la φ assume in M_1. Poichè in P_0 è, per ipotesi, $\varphi = 0$, nel punto M_2 sarà $\varphi = h\varphi_1$ ed indicata con l_1 la lunghezza di $C_0(M_2, M_1)$ si ha

$$\mathfrak{J}_{C_0(M_2, M_1)} > h\varphi_1 \mu l_1, \tag{15}$$

dove μ rappresenta il minimo valore assunto dalla $\psi(x, y, x', y')$, per tutte le coppie (x', y') normalizzate e per tutti i punti (x, y) di una parte limitata del campo A contenente tutte le curve di K.

Consideriamo ora la minima distanza M_1P_1 di M_1 da Γ_0 e diciamo γ_1 la curva costituita dall'arco $\Gamma_0(P_0, P_1)$ e dal segmento rettilineo P_1M_1.

Essendo per ipotesi la classe K *piena nell'intorno e sulla curva* Γ_0, la curva γ_1 appartiene interamente al campo A e quindi, dalla definizione di *linea di minimi relativi regolari,* segue

$$\mathfrak{J}_{\gamma_1} = \mathfrak{J}_{P_1M_1} < \varphi_1 M \lambda_1, \tag{16}$$

avendo λ_1 ed M lo stesso significato che al n.° 4. Ma anche ora abbiamo

$$\mathfrak{J}_{C_0(M_2, M_1)} \leqslant \mathfrak{J}_{\gamma_1},$$

e quindi, per le (15) e (16),

$$l_1 < \frac{M}{\mu} \frac{\lambda_1}{h}.$$

Ragionando sull'arco $C_0(P_0, M_2)$ come prima sull'arco $C_0(P_0, M_1)$ e così proseguendo indefinitamente, verremo a costruire degli archi $C_0(M_3, M_2)$, $C_0(M_4, M_3)$,...., $C_0(M_{n+1}, M_n)$,.... analoghi a quelli considerati al n.° 4, per cui, seguendo le stesse notazioni di allora, avremo ancora

$$l_1 + l_2 + ... + l_n < \frac{M}{\mu h}(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n),$$

ed anche

$$l_1 + l_2 + ... + l_n < \frac{M\lambda_1}{\mu h} \frac{1}{1-k}.$$

Da questa disuguaglianza poi, come al n.° 4, segue la rettificabilità della C_0. Il teorema enunciato risulta così pienamente dimostrato.

Esempi. - Nella classe di tutte le curve continue e rettificabili che giacciono in un quadrato del semipiano $y \geqslant 0$ e che congiungono due punti dati, esiste il minimo dell'integrale

$$\int_C y(2\sqrt{x'^2 + y'^2} - y')ds.$$

Parimenti, esiste il minimo dell'integrale

$$\int_C \frac{y^2}{1+x^2+y^2}\,(2\sqrt{x'^2+y'^2}-y')ds$$

nella classe di tutte le curve continue e rettificabili congiungenti due punti dati e contenute in un dato quadrato.

Le condizioni poste nel teorema precedente sono pure verificate se è

$$F(x, y, x', y') \equiv y(\sqrt{x'^2+y'^2}-g(x, y)y')$$

essendo $g(x, y)$ continua e tale che $|g(x, y)|<1$.

Lo stesso si ha se è

$$F(x, y, x', y') \equiv \frac{y^2}{1+x^2+y^2}\,(\sqrt{x'^2+y'^2}-g(x, y)y')$$

con $g(x, y)$ continua e soddisfacente alla $|g(x, y)|<1$.

6. - *Il campo A sia limitato ed in esso sia sempre*

$$F(x, y, x', y') \equiv \varphi(x, y)\psi(x', y'),$$

dove $\varphi(x,y)$ e $\psi(x',y')$ sono due funzioni continue insieme con le loro derivate parziali dei primi due ordini, la prima per ogni (x, y) di A e la seconda per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli. La $\psi(x', y')$ sia poi, per le coppie (x', y') dette, positivamente omogenea di grado 1. Inoltre la $\varphi(x, y)$ si annulli in un punto P_0 interno al campo A e sia $\varphi>0$ in tutti gli altri punti; in prossimità di P_0 sia $\varphi_x=0$ sulla retta per P_0 parallela all'asse delle y, e soltanto su di essa, e $\varphi_y=0$ su quella parallela all'asse delle x e soltanto su di essa; per ogni coppia (x', y') normalizzata sia

$$\psi(-x', -y')=\psi(x', y')>0, \qquad \psi_1(x', y')\equiv\frac{\psi_{x'x'}}{y'^2}\equiv-\frac{\psi_{x'y'}}{x'y'}\equiv\frac{\psi_{y'y'}}{x'^2}>0,$$

le derivate parziali $\psi_{x'}(x', y')$, $\psi_{y'}(x', y')$ abbiano lo stesso segno di x' e y' rispettivamente e sia

$$\psi_{x'}=0 \quad per \quad x'=0$$
$$\psi_{y'}=0 \quad per \quad y'=0.$$

Allora, nella classe K di tutte le curve ordinarie C che congiungono due punti dati del campo A (ammesso che di tali curve ne esista almeno una) esiste sempre il minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$ (29).

Costruiamo, secondo il metodo indicato al n.° 3, una successione

$$(17) \qquad \{C_1\}, \quad \{C_2\},\ldots, \quad \{C_n\},\ldots$$

---

(29) Questo teorema generalizza quello dato dal TONELLI in loc. cit. (2), vol. II, pag. 187.

minimizzante per $\mathfrak{J}_G$ nella classe K indicata nell'enunciato del teorema e sia C_0 la curva continua a cui tale successione converge uniformemente. Affinchè il teorema enunciato risulti pienamente dimostrato, basterà far vedere che questa curva C_0 è anche rettificabile. Questo segue subito se, nella costruzione della (17), si presentano i primi due casi considerati al n.° 3. Nel terzo caso, l'arco $C_0(Q_1, M)$ (conservando le stesse notazioni di detto numero) risulta subito rettificabile se esiste il numero $\bar{\varrho}$ considerato nello stesso n.° 3. Supponiamo che il $\bar{\varrho}$ non esista: allora è $Q_1 \equiv P_0$ e l'arco $C_0(Q_1, M)$ ha tutti i suoi punti, escluso Q_1, distinti da P_0. Inoltre tale arco è la curva limite delle $C^{(\nu)}(M^{(\nu)}, M)$ le quali, per la costruzione fatta, sono delle estremanti. E siccome P_0 è un punto *interno* al campo A, si può fissare su $C_0(P_0, M)$ un punto Q distinto da P_0 e in modo che tutti i punti di $C_0(P_0, Q)$ siano interni ad A. Allora ogni arco di $C_0(P_0, Q)$ non contenente P_0 è un'estremale. Possiamo supporre Q anche tale che l'arco $C_0(P_0, Q)$ appartenga all'intorno di P_0 nel quale le uguaglianze $\varphi_x = 0$ e $\varphi_y = 0$ sono verificate sulle parallele agli assi y ed x rispettivamente e soltanto su di esse. Posto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, se nessun punto dell'arco $C_0(P_0, Q)$ è fuori delle due rette $x = x_0$, $y = y_0$, tale arco coincide con un segmento di una di tali rette e precisamente col segmento $P_0 Q$, e la sua rettificabilità è evidente.

Supponiamo allora che esista un punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ di $C_0(P_0, Q)$ tale che $x_1 \neq x_0$, $y_1 \neq y_0$. Sia, per fissare le idee, $x_1 > x_0$, $y_1 > y_0$. Consideriamo, in luogo di $C_0(P_0, Q)$ l'arco $C_0^{-1}(Q, P_0)$ dedotto dal precedente cambiando il verso e prendiamo Q come origine degli archi. Ad un punto di $C_0^{-1}(Q, P_0)$ distinto da P_0 corrisponde un valore finito di s. Sia s_1 quello corrispondente a P_1. Dico che deve essere

$$x'(s_1) < 0, \qquad y'(s_1) < 0. \tag{18}$$

Se infatti non fosse, per esempio, verificata la prima di queste disuguaglianze, si avrebbe $x'(s_1) \geqq 0$. E siccome la disuguaglianza $x'(s) \geqq 0$ non può essere verificata per tutti gli $s > s_1$, perchè, essendosi supposto $x_1 > x_0$, da un certo s in poi deve essere $x(s) < x_1 = x(s_1)$, esiste certamente un $\bar{s} \geqq s_1$ e tale che sia $x'(s) \geqq 0$ in tutto $(s_1, \bar{s})$ e $x'(\bar{s}) < 0$ per infiniti valori di $s > \bar{s}$ e vicini ad $\bar{s}$ quanto si vuole. Sarà $x'(\bar{s}) = 0$ e, nel punto $\bar{P}$ corrispondente ad $\bar{s}$, avremo $\varphi_x > 0$, $\varphi_y \geqq 0$, $\psi_{x'} = 0$, $\psi_{y'} \neq 0$ con $y'(\bar{s})\psi_{y'} > 0$. L'equazione delle estremali, che qui prende la forma

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\varphi_y \psi_{x'} - \varphi_x \psi_{y'}}{\varphi \psi_1}$$

(dove θ è l'angolo di direzione della tangente alla curva), dà allora $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=\bar{s}} < 0$ oppure > 0 secondochè è $y'(\bar{s}) > 0$ oppure $y'(\bar{s}) < 0$.

Essendo $x'(\bar{s}) = 0$, deve essere $y'(\bar{s}) = \pm 1$. Se è $y'(\bar{s}) = 1$ si ha $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=\bar{s}} < 0$ onde $x'(s) \geqq 0$ per ogni s sufficientemente vicino a $\bar{s}$, contro la definizione di $\bar{s}$; e se è $y'(\bar{s}) = -1$, si ha $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=\bar{s}} > 0$ onde ancora $x'(s) \geqq 0$ per ogni s sufficientemente vicino a $\bar{s}$. Dunque la prima delle (18) è dimostrata. In modo analogo si dimostra la seconda.

Da ciò segue che nessun punto di $C_0^{-1}(Q, P_0)$ precedente P_1 può avere almeno una delle coordinate uguali alle corrispondenti di P_0 e, per ragione analoga, che tutti i punti seguenti hanno coordinate tutte maggiori o uguali alle corrispondenti di P_0. Segue infine che, se $P \equiv (x, y)$ è un qualsiasi punto di $C_0^{-1}(Q, P_0)$, la lunghezza dell'arco $C_0^{-1}(P_1, P)$ è $<(x_1-x)+(y_1-y)<(x_1-x_0)+(y_1-y_0)$. Dunque tutto l'arco $C_0^{-1}(P_1, P_0)$ ha lunghezza $<(x_1-x_0)+(y_1-y_0)$ ed è perciò rettificabile. Pertanto, in tutti i casi, l'arco $C_0(P_0, Q)$ è rettificabile e tale è pure $C_0(P_0, M)$. Dopo di che non resta che concludere come nella dimostrazione del teorema del n.° 4.

Esempio. - Siamo nelle condizioni del teorema precedente, se è

$$F(x, y, x', y') \equiv (x^4 + x^2y^2 + y^2)\sqrt{2x'^2 + y'^2}$$

7. - Nel presente numero considereremo un caso in cui la funzione $F(x, y, x', y')$ diventa infinita.

Sia $\varphi(x, y)$ una funzione definita, continua e maggiore di zero, in tutti i punti del campo A, ad eccezione di quelli di un insieme E, e tale che scelti comunque un punto P di E ed un numero $M>0$, sia sempre possibile determinare un altro numero $\varrho>0$ in modo che, per ogni punto (x, y) di A non appartenente ad E, ma appartenente al cerchio (P, ϱ), si abbia

$$\varphi(x, y) > M.$$

Osserviamo poi che ogni punto di accumulazione di E appartiene all'insieme E stesso.

Si abbia inoltre un'altra funzione $\psi(x, y, x', y')$ soddisfacente alle condizioni poste al n.° 1 per la $F(x, y, x', y')$ e tale che sia, per ogni coppia (x', y') normalizzata,

$$\psi(x, y, x', y') > 0, \qquad \psi_1(x, y, x', y') \geqslant 0.$$

Considerata allora la funzione $F(x, y, x', y',)$ definita da

$$F(x, y, x', y') \equiv \varphi(x, y)\psi(x, y, x', y'),$$

la quale non soddisfa a tutte le condizioni poste per la F al n.° 1, prendiamo in esame l'integrale

$$\mathfrak{J}_C \equiv \int_C F ds \equiv \int_C \varphi(x, y)\psi(x, y, x', y') ds, \tag{19}$$

che esisterà sicuramente se la curva C non contiene punti di E.

Data una classe K di curve ordinarie C, chiameremo classe K_φ l'insieme delle curve di K su ciascuna delle quali:

1°) i punti dell'insieme E costituiscono, al più, uno pseudoarco di misura nulla;

2)° esiste (finito) l'integrale $\mathfrak{J}_C$.

Vale allora il seguente teorema di esistenza:

Se K è una classe completa di curve ordinarie C, tutte contenute in una parte limitata A' del campo A, nella classe K_φ (ammesso che contenga almeno una curva) esiste il minimo (assoluto) dell'integrale $\mathfrak{J}_C$ definito dalla (19) [30].

Diciamo i il limite inferiore di $\mathfrak{J}_C$ in K_φ e costruiamo una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$ in K_φ:

$$\{C_1\},\quad \{C_2\},\dots,\quad \{C_n\},\dots \tag{20}$$

Prendiamo poi un numero $R>0$ sufficientemente grande, perchè tutte le curve di K appartengano al cerchio di raggio R avente il centro nell'origine $\mathbf{0}$ delle coordinate. Per le ipotesi fatte sulla φ, esisterà un numero positivo m tale che, in tutti i punti del cerchio $(0, R)$, non appartenenti ad E, si abbia

$$\varphi(x, y) \geqslant m,$$

e quindi anche

$$\mathfrak{J}_{C_n} \geqslant m \int_{C_n} \psi(x, y, x', y')ds.$$

Ma essendo, per ogni coppia (x', y') normalizzata, $\psi(x, y, x', y')>0$, sarà possibile determinare un numero $d>0$ tale che per ognuna di tali coppie sia $\psi(x,y,x',y')>d$ in tutto A'. Indicando quindi con L_n la lunghezza di C_n, è

$$\mathfrak{J}_{C_n} \geqslant mdL_n;$$

ed essendo

$$\mathfrak{J}_{C_n} \leqslant i + \frac{1}{n},$$

segue

$$L_n \leqslant \frac{i+1}{md}.$$

La successione (20) ammette perciò una curva di accumulazione C_0, di lunghezza non superiore a $\frac{i+1}{md}$; e poichè K è una classe completa, C_0 appartiene a K. Dimostriamo che C_0 appartiene anche a K_φ. Per questo, facciamo intanto vedere che l'insieme E_0 (chiuso) dei punti di E che appartengono alla C_0 costituisce, sulla C_0, uno pseudoarco di misura nulla.

Detta, infatti, μ la misura di E_0 e preso un numero positivo qualunque M, è possibile determinare un numero $\varrho>0$ tale che, qualunque sia il punto P di E_0,

---

[30] Questo teorema generalizza quello dato dal TONELLI in loc. cit. [2], vol. II, pag. 73.

in tutti i punti del cerchio (P, ϱ), appartenenti ad A, ma non ad E, sia $\varphi(x, y) > M$. Siano poi $a_1, a_2, \ldots, a_r$ un numero finito di archi non sovrapponentisi, ricoprenti interamente E_0 e di lunghezza complessiva minore di $\mu + \frac{1}{2}\varrho$. Costruita una nuova successione minimizzante convergente uniformemente verso la C_0,

$$\{C_1'\}, \quad \{C_2'\}, \ldots, \quad \{C'_{n'}\}, \ldots, \tag{21}$$

dove $\{C'_{n'}\}$ è un insieme estratto da un $\{C_n\}$ di indice $n \geqq n'$, chiamiamo $\gamma'_{n'}$ lo pseudoarco dei punti della $C'_{n'}$ che distano da almeno un punto di $a_1, \ldots, a_r$ di non più di $\frac{\varrho}{2}$. Poichè la (21) converge uniformemente verso la C_0, la misura di $\gamma'_{n'}$, per n' sufficientemente grande, è maggiore di $\frac{\mu}{2}$ e il contributo di $\gamma'_{n'}$ in $\mathfrak{J}_{C'_{n'}}$ è maggiore di $\frac{1}{2}\mu M d$.

Ed infatti, possiamo supporre che ognuno degli archi $a_1, \ldots, a_r$ abbia lunghezza minore di $\frac{\varrho}{2}$ $\left(\text{perchè in caso contrario basterebbe spezzare ciascuno di essi in parti di lunghezza } < \frac{\varrho}{2}\right)$ e indicando con $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\bar{r}}$ quelli fra essi che contengono almeno un punto di E_0, la lunghezza complessiva di questi $\bar{a}$ è $\geqq \mu$, perchè essi contengono tutto l'insieme E_0.

Allora, detta $\bar{\gamma}'_{n'}$ la parte di $\gamma'_{n'}$, costituita dai punti che distano di non più di $\frac{\varrho}{2}$ da almeno un punto degli $\bar{a}$, la misura di $\bar{\gamma}'_{n'}$ risulta, per n' sufficientemente grande, $> \frac{\mu}{2}$; e siccome ogni punto di $\bar{\gamma}'_{n'}$ dista di non più di $\frac{\varrho}{2}$ da almeno un punto di uno degli $\bar{a}$ e quindi di non più di ϱ da almeno un punto di E_0, in tale punto è $\varphi(x, y) > M$, purchè il punto stesso non appartenga a E_0. Ma ciò può avvenire soltanto per i punti di uno pseudoarco di misura nulla e perciò il contributo di $\bar{\gamma}'_{n'}$ in $\mathfrak{J}_{C'_{n'}}$ è $> \frac{1}{2}\mu M d$. È dunque, per n' sufficientemente grande,

$$\mathfrak{J}_{C'_{n'}} > \frac{1}{2}\mu M d,$$

e questo, se fosse $\mu > 0$, essendo M arbitrario contraddirebbe al fatto che la (21) è una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_C$.

Deve essere, quindi, $\mu = 0$.

Poichè, poi, gli archi a, sulla C_0, possono essere scelti in modo che nessun loro punto terminale appartenga ad E_0, pur avendo una lunghezza complessiva minore di $\frac{\varrho}{2}$, se sopprimiamo dalla C_0 tutti i punti interni a questi archi a, si ha, sulla curva, un numero finito di archi β, non contenenti nessun punto di E_0. Essendo su ognuno di questi archi β l'integrale $\mathfrak{J}$ una funzione semicontinua inferiormente, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un n_1 tale che, per ogni $n' > n_1$, si abbia

$$\sum \mathfrak{J}_\beta < \varepsilon + \mathfrak{J}_{C'_{n'}} \leqq \varepsilon + i + \frac{1}{n'}$$

e quindi, essendo ε arbitrario,
$$\sum \mathfrak{I}_\beta \leqq i.$$

Poichè al tendere di ϱ a zero gli archi β tendono a ricoprire tutta la curva C_0, segue dalla disuguaglianza precedente che esiste l'integrale $\mathfrak{I}_{C_0}$ e che si ha
$$\mathfrak{I}_{C_0} \leqq i.$$

La curva C_0 appartiene, dunque, alla sottoclasse K_φ ed allora, non potendo essere $\mathfrak{I}_{C_0} < i$, è necessariamente
$$\mathfrak{I}_{C_0} = i,$$
e la curva C_0 è minimante per $\mathfrak{I}_C$ in K_φ.

Esempio. - Le condizioni del teorema precedente sono verificate se è
$$F(x, y, x', y') \equiv \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{2x'^2 + y'^2},$$
dove la funzione $\varphi(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{y}}$ è definita per ogni $y > 0$.

8. - *Se le funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y, x', y')$ del teorema precedente, sono tali che esistano due numeri μ ed R, in modo che, in ogni punto del campo A esterno al cerchio $(0, R)$ e non appartenente ad E, e per ogni coppia (x', y') normalizzata, si abbia*
$$\varphi(x, y)\psi(x, y, x', y') \geqq \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
nel teorema precedente la condizione che la classe K sia composta tutta di curve appartenenti ad una parte limitata del campo A, può sostituirsi con quella che ogni curva di K contenga almeno un punto di un dato insieme limitato e chiuso G ([31]).

Esempio. - Le condizioni del teorema precedente sono verificate se è
$$F(x, y, x', y') \equiv \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{2x'^2 + y'^2},$$
essendo $\varphi(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{y}}$ definita per ogni $y > 0$.

([31]) Cfr. loc. cit., ([2]), vol. II, pag. 75.