ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GEORGES VALIRON

Méthodes de sommation et directions de Borel

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 4 (1933), p. 355-380

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_4_355_0>

MÉTHODES DE SOMMATION ET DIRECTIONS DE BOREL

par GEORGES VALIRON (Paris).

M. A. BLOCH a attiré le premier l'attention sur l'analogie que peut présenter la recherche des directions de JULIA d'une fonction entière, directions dans le voisinage desquelles la fonction passe une infinité de fois par toute valeur non exceptionnelle, et la recherche des points singuliers des séries de TAYLOR. Il a énoncé comme probables diverses propositions, entre autres la suivante: une fonction entière dont les coefficients sont suffisamment lacunaires admet toute direction pour direction de JULIA (1). Ce théorème a été démontré par M. PÓLYA dans le cas des fonctions d'ordre infini ainsi qu'une proposition analogue au théorème de FATOU et PÓLYA sur les séries entières qui entraîne que presque toutes les fonctions entières d'ordre infini dont le module des coefficients est donné admettent toute direction pour direction de JULIA (2). Les démonstrations de M. PÓLYA montrent en outre que, dans ces deux cas, toute direction est en réalité une direction de BOREL d'ordre infini: dans tout angle l'admettant pour bissectrice, l'exposant de convergence de la suite des points où la fonction prend une valeur arbitraire est infini, sauf au plus pour une seule valeur.

Ces résultats de M. PÓLYA ont conduit M. Vl. BERNSTEIN à essayer de dégager une relation plus intime entre les directions de JULIA et la position des singularités des séries de TAYLOR en comparant ces éléments attachés respectivement à une fonction entière du type moyen de l'ordre un et à la série de TAYLOR $F(z)$ dont elle est la fonction associée dans la théorie de la sommation de M. BOREL. Il montra que, dans des cas étendus, les directions des rayons vecteurs des points extrêmes du polygone de sommabilité de BOREL de $F(z)$ déterminent des droites de JULIA de la fonction entière associée $f(z)$, et il émit l'hypothèse que cette propriété serait générale (3). Cet énoncé de M. BERNSTEIN me conduisit à chercher s'il pouvait y avoir *identité* entre les directions de

(1) Mémorial des sciences math., fasc. XX (1926), p. 16.

(2) Math. Zeits., t. 29 (1929), pp. 549-640.

(3) Comptes Rendus, t. 194 (1932), pp. 350-352; pp. 1629-1631 et Journal École Polytechnique, 30e cahier (1932), pp. 191-219.

BOREL convenablement définies d'une fonction entière et les directions des points extrêmes d'un domaine de sommabilité de MITTAG-LEFFLER. L'introduction des directions de BOREL à la place des directions de JULIA s'impose dans la question, des raisonnements simples montrant en effet que dans cette recherche d'une correspondance *biunivoque* entre deux tels groupes d'éléments, les directions de JULIA ne sont pas en somme assez singulières ([4]). Mais Miss M. CARTWRIGHT m'ayant signalé que, même en introduisant les directions de BOREL du type maximum, non seulement cette identité n'a pas lieu, mais que le théorème de M. BERNSTEIN n'est pas toujours vrai, je fus conduit à envisager le cas des fonctions d'ordre infini pour lesquelles les résultats déjà cités de M. PÓLYA permettent d'espérer des énoncés plus généraux.

Je donne dans ce Mémoire les résultats que j'ai obtenus dans cette voie, résultats énoncés en partie dans les Comptes Rendus ([5]). À la suite de la publication de la seconde de ces Notes, M. BERNSTEIN fit connaître ([6]) qu'il avait poursuivi des recherches analogues dans le cas des fonctions d'ordre fini; il a exposé d'une manière détaillée ses résultats dans un Mémoire en cours de publication dont il a bien voulu me communiquer une copie alors que je terminais la rédaction du présent travail. En fait, le n.° 2 de mon Mémoire, où je développe des considérations du premier alinéa du n.° 4 de la première de mes Notes fait double emploi avec une partie du Mémoire de M. BERNSTEIN. D'autre part, nous avions eu tous deux la même préoccupation: chercher ce que j'appelle au n.° 6 des *fonctions sommatrices complètes*. C'était dans l'espoir, resté vain, d'obtenir de telles fonctions dans le cas de l'ordre infini, que j'avais retardé la publication de ce travail. La recherche de telles fonctions s'il en existe, me semble être en effet d'une grande importance, tant pour la théorie du prolongement analytique que pour la recherche des directions de BOREL des fonctions d'ordre infini. Une fonction sommatrice complète permettrait le prolongement dans toute l'étoile indifféremment par la méthode des moyennes et par la méthode d'intégration comme l'exponentielle et les fonctions de MITTAG-LEFFLER le permettent dans le domaine de sommabilité de BOREL ou de MITTAG-LEFFLER. Il y aurait d'autre part correspondance parfaite entre la position des singularités fournissant la frontière de l'étoile et les directions de BOREL convenablent définies de la fonction associée.

Presque tout le Mémoire est consacré à l'établissement de relations entre la position des singularités d'une série entière et la croissance dans les diverses directions d'une fonction entière associée par l'intermédiaire d'une certaine fonction sommatrice. Il s'agit de savoir dans quelle mesure le théorème de SERVANT et

---

([4]) Voir le n.° 3 de ma Note aux Comptes Rendus, t. 194 (1932), pp. 1306-1308.

([5]) Voir le n.° 4 de ma Note citée et Comptes Rendus, t. 194 (1932), pp. 1552-1555.

([6]) Comptes Rendus, t. 194 (1932), pp. 1887-1889.

BOREL relatif au cas de la fonction sommatrice exponentielle s'étend aux cas généraux. Aussi ai-je rappelé au n.° 1 la technique de la méthode de sommation de M. BOREL dans le cas des fonctions analytiques, pour plus de détails on se réferera au livre de M. BOREL: *Sur les séries divergentes* et à l'exposé de M. BUHL dans le fasc. VII du Mémorial des sciences mathématiques. L'application aux directions de BOREL est immédiate puisque je me borne alors aux fonctions d'ordre infini, elle est faite en dernier lieu au n.° 9 au moyen d'un théorème qui généralise le théorème de SCHOTTKY et qui se rattache aisément à mes recherches antérieures et à celles de M. MILLOUX, j'ai cru inutile d'en donner la démonstration.

1. - Rappel de la technique de la méthode de sommatioon exponentielle. — En vue des généralisations, on peut faite reposer la méthode de sommation exponentielle de M. BOREL sur les deux propriétés suivantes de

$$e^z = 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

1°) Si $|z| = r$, $z = re^{i\varphi}$, on a

$$|e^z| = e^{r\cos\varphi}.$$

2°) Les nombres $n!$ sont donnée par l'intégrale eulérienne

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt$$

dans laquelle t est supposé réel; on a aussi

$$n! = \int_{T=0}^{T=\infty} e^{-t} t^n dt \quad \text{si} \quad t = Te^{i\lambda}, \quad |\lambda| < \frac{\pi}{2}, \quad T > 0.$$

La théorie se développe alors comme suit:

A). À la série

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

admettant le cercle $|z| < 1$ pour cercle de convergence, associons la fonction

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!}.$$

Puisque

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$f(z)$ est une fonction entière du type moyen de l'ordre 1, si $M(r, f)$ désigne le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{r} = 1. \tag{1}$$

Inversement, si $f(z)$ est une fonction entière donnée vérifiant la condition (1) c'est la fonction associée d'une série de TAYLOR $F(z)$ de cercle de convergence $|z|<1$.

L'indicatrice de l'ordre de $f(z)$ dans la direction $\varphi=$const., introduite par MM. LINDELÖF et PHRAGMÉN

$$H(\varphi, f)=\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|}{r}$$

est au plus égale à 1, mais atteint la valeur 1 pour une valeur au moins. C'est une fonction continue de φ (7).

Pour $|z|<1$, la convergence absolue de $F(z)$ et l'égalité (1) montrent que l'on a

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-t}f(tz)dt \tag{2}$$

et, en vertu des propriétés de $H(\varphi, f)$ le second membre de (2) reste holomorphe dans le domaine limité par la courbe d'équation polaire

$$rH(\varphi, f)=1. \tag{3}$$

On obtient le prolongement de $F(z)$ dès que ce domaine déborde du cercle $|z|<1$. Dans ce domaine, l'intégrale (2) converge absolument et en outre

$$\lim_{t=+\infty} e^{-t}f(tz)=0. \tag{4}$$

La condition (4) ne peut être vérifiée que sur (3) ou dans le domaine intérieur. Le domaine limité par (3) peut donc aussi être caractérisé comme le domaine dans lequel (2) converge absolument, (4) étant vérifiée. C'est *le domaine de sommabilité de Borel*, je l'appellerai $B(F)$.

B). En supposant t complexe dans l'intégrale eulérienne, le même processus permet aussi d'affirmer que, pour $|z|<1$ et $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$,

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-Te^{i\lambda}}f(Te^{i\lambda}z)e^{i\lambda}dT$$

et que par conséquent $F(z)$ est encore holomorphe et donné par le second membre de cette égalité dans les domaines

$$rH(\varphi+\lambda, f)=\cos\lambda.$$

(7) Acta math., t. 31 (1908), pp. 381-406. J'ai donné dans ma thèse (Annales Fac. scient. Toulouse, t. 5 (1913), pp. 117-257) la réponse à la question qui termine ce Mémoire. La propriété de continuité de $H(\varphi, f)$ avait été pressentie par M. BOREL. (Voir ses *Leçons sur les séries divergentes* p. 141 de la première édition).

Donc, (r_0, φ_0) étant un point de la frontière de $B(F)$, $F(z)$ est encore holomorphe dans tout le cercle d'équation

$$r=r_0 \cos(\varphi-\varphi_0).$$

C). Si $F(z)$ est holomorphe dans un cercle

(5) $$r=r_1 \cos(\varphi-\varphi_1), \qquad r_1>1$$

et sur sa circonférence, les a_n peuvent être pris sous la forme

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta,$$

L étant la frontière du domaine formé par la réunion de (5) et d'un cercle $|z|<r_0<1$; il en découle que

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta} e^{\frac{z}{\zeta}}\, d\zeta,$$

et que

$$r_1 H(\varphi_1, f)<1$$

qui rapprochée de (3) fournit le théorème de SERVANT et BOREL: *Pour qu'un point M appartienne au domaine de sommabilité $B(F)$, il faut et il suffit que $F(z)$ soit holomorphe dans le cercle de diamètre OM.*

D). L étant la ligne définie ci-dessus, on a, z étant à l'intérieur de L et t réel quelconque

$$s_n(z)=\sum_0^n a_p z^p=\frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{F(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{z^{n+1}-\zeta^{n+1}}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta,$$

$$\sum_0^\infty s_n(z)\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^t}{2i\pi}\int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\left[1-e^{t\left(\frac{z}{\zeta}-1\right)}\right] d\zeta.$$

En y prenant $z=r_1 e^{i\varphi_1}u$, $0<u<1$, on obtient la formule de prolongement par les moyennes, valable dans $B(F)$,

$$F(z)=\lim_{t=+\infty} e^{-t}\sum_0^\infty s_n(z)\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. - Généralisation du prolongement par les moyennes. Cas de l'ordre fini. — Le procédé de prolongement par les moyennes défini dans D) se généralise aisément en remplaçant la fonction e^z par d'autres fonctions que l'on appellera *fonctions sommatrices*. En utilisant les travaux de M. LINDELÖF et certains résultats de ma Thèse déjà citée, on peut définir des classes étendues de telles fonctions. Ce seront des fonctions entières à coefficients positifs

(6) $$\Phi(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\theta(n)}, \qquad \theta(n)>0$$

d'ordre ϱ fini supérieur à $\frac{1}{2}$ ou d'ordre infini, les $\theta(n)$ jouissant de propriétés dont il va être question.

Dans le cas de l'ordre fini, on introduira ce que j'ai appelé ordre précisé L; c'est une fonction $\varrho(r)$ telle que, pour r tendant vers l'infini ($r>0$), on ait

$$\lim \varrho(r)=\varrho, \qquad \lim \varrho'(r) r \log r=0.$$

$\Phi(r)$ sera parfaitement régulière par rapport à un ordre précisé L, c'est-à-dire telle que

(7) $$\lim_{r=\infty} \frac{\log \Phi(r)}{r^{\varrho(r)}}=1.$$

Désignons par $\omega(x)$ la fonction inverse de $x^{\varrho(x)}$, c'est une fonction de la même espèce, mais ϱ est remplacé par $\frac{1}{\varrho}$. On peut construire une fonction $\Omega(z)$ holomorphe pour $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$, ne s'annulant pas dans ce demi-plan et telle que l'on ait uniformément

(8) $$\lim_{r=\infty} \frac{\Omega(re^{i\varphi})}{\Omega(r) e^{i\varphi/\varrho}}=1 \quad \text{si} \quad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$$

avec

$$\lim_{r=\infty} \omega(r):\Omega(r)=1.$$

Si $\varrho>1$, $\frac{1}{\varrho}$ est inférieur à 1 et on utilise directement mes résultats. Si $\frac{1}{2}<\varrho \leqq 1$, $1 \leqq \frac{1}{\varrho}<2$, on fait un changement de variable z, z^k approprié.

En prenant

(9) $$\theta(n)=[\Omega(n)]^n (e\varrho)^{-n/\varrho}$$

les relations connues entre les coefficients de (6) et la valeur de $\Phi(r)$ montrent que (7) est bien vérifiée.

Or les coefficients $1:\theta(n)$ de la fonction $\Phi(z)$ sont les valeurs pour z réel positif et entier de la fonction

$$\Theta(z)=(e\varrho)^{z/\varrho} \Omega(z)^{-z}, \qquad z=re^{i\varphi}$$

qui est holomorphe pour $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$, dans ce demi-plan, on a en vertu de (9)

$$\log |\Theta(z)|=\frac{r}{\varrho} \cos \varphi \log (e\varrho)-r \cos \varphi \log \Omega(r)+r \sin \varphi \frac{\varphi}{\varrho}+\varepsilon(z) r$$

$|\varepsilon(z)|$ tendant vers 0 lorsque $r \rightarrow \infty$. Comme $\Omega(r)$ tend vers l'infini, le second membre est inférieur à

$$(1+\varepsilon) \frac{\pi}{2\varrho} r$$

si petit que soit le nombre positif ε pourvu que r soit assez grand.

En appliquant un théorème de M. LINDELÖF [8] et des propositions généra-

---

[8] *Leçons sur le Calcul des résidus et ses applications*, p. 109 et p. 113.

lisant les théorèmes de LINDELÖF et PHRAGMÉN que j'ai données dans ma Thèse, on arrive aux deux propositions suivantes:

I. - *L'ordre précisé* $\varrho(r)$ *étant donné supérieur à* $1/2$, *en prenant les* $\theta(n)$ *sous la forme* (9), *la fonction* $\Phi(z)$ *tend uniformément vers* 0 *lorsque* $z=re^{i\varphi}$ *s'éloigne indéfiniment dans tout angle*

$$\frac{\pi}{2\varrho}+\varepsilon<\varphi<2\pi-\frac{\pi}{2\varrho}-\varepsilon, \qquad \varepsilon>0.$$

II. - *La fonction*

$$H(\varphi, \Phi)=\overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{\overset{+}{\log}\,|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}} \tag{10}$$

est alors définie par

$$\begin{cases} H(\varphi, \Phi)\equiv\cos\varphi\varrho & si \quad |\varphi|\leqq\dfrac{\pi}{2\varrho} \\ H(\varphi, \Phi)\equiv 0 & si \quad \dfrac{\pi}{2\varrho}\leqq\varphi\leqq 2\pi-\dfrac{\pi}{2\varrho}. \end{cases} \tag{11}$$

Si l'on ajoute à une fonction $\Phi(z)$ ainsi construite une fonction entière $\Phi_1(z)$ quelconque, à coefficients positifs et du type minimum par rapport à l'ordre $\varrho(r)$, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{r=\infty}\frac{\log\Phi_1(r)}{r^{\varrho(r)}}=0,$$

on obtient encore une fonction de la forme (6) à coefficients positifs pour laquelle les égalités (10) et (11) sont valables. D'une façon générale, j'appellerai *fonction sommatrice d'ordre précisé* $L\varrho(r)$ toute fonction à coefficients positifs vérifiant les conditions du théorème II. Toute fonction d'ordre fini à coefficients positifs construits par les itérations de logarithmes rentre dans cette classe.

On sait d'ailleurs que l'on a uniformément, si petit que soit $\varepsilon>0$, à partir d'une valeur de r,

$$\log|\Phi(re^{i\varphi})|<[H(\varphi, \Phi)+\varepsilon]r^{\varrho(r)}.$$

La dénomination de fonction sommatrice se justifie par le fait que le procédé *D*) s'applique en remplaçant l'exponentielle par une fonction $\Phi(z)$ et le contour L par un contour analogue, le cercle (5) étant remplacé par la courbe de MITTAG-LEFFLER

$$r^{\varrho}=r_1^{\varrho}\cos(\varphi-\varphi_1)\varrho, \qquad |\varphi-\varphi_1|\leqq\frac{\pi}{2\varrho}. \tag{12}$$

On aura en effet, en supposant $F(z)$ holomorphe à l'intérieur de L et sur L

$$\frac{1}{\Phi(t)}\sum_0^{\infty}s_n(z)\frac{t^{n+1}}{\theta(n+1)}=F(z)-\frac{1}{2i\pi}\int_L\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{\Phi\left(t\dfrac{z}{\zeta}\right)}{\Phi(t)}\,d\zeta.$$

En supposant toujours $z=r_1ue^{i\varphi_1}$ avec $0<u<1$, on vérifie de suite que, sur L, dès que t est assez grand,

$$\log\left|\Phi\left(t\frac{z}{\zeta}\right):\Phi(t)\right|<-t^{\varrho(t)}(1-u'), \qquad u^{\varrho}<u'<1.$$

Par suite, en introduisant le domaine de MITTAG-LEFFLER d'ordre ϱ, $B(\varrho, F)$, domaine maximum tel que (r_1, φ_1) étant un point du domaine, $F(z)$ est holomorphe à l'intérieur de (12), on voit que, dans $B(\varrho, F)$

$$F(z) = \lim_{t=\infty} \frac{1}{\Phi(t)} \sum_0^\infty s_n(z) \frac{t^{n+1}}{\theta(n+1)}. \tag{13}$$

Ainsi:

III. - *À tout ordre précisé $\varrho(r)$ correspondent des fonctions sommatrices permettant le prolongement analytique dans $B(\varrho, F)$ par la formule* (13), *de toute fonction $F(z)$ dont le développement de Taylor a pour cercle de convergence* $|z| < 1$.

$\Phi(z)$ étant une fonction sommatrice donnée par (6) et $F(z) = \sum a^n z_n$ admettant le cercle $|z| < 1$ pour cercle de convergence, la fonction entiére

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{\theta(n)} z^n$$

sera appelée la *fonction associée à $F(z)$ par l'intermédiaire de $\Phi(z)$*. Comme

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \tag{14}$$

on aura encore
$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{r^{\varrho(r)}} = 1.$$

Inversement, toute fonction entiére $f(z) = \sum b_n z^n$ vérifiant cette condition peut être considérée comme associée à une série entière $F(z)$ par l'intermédiaire de $\Phi(z)$. Car, en prenant $a_n = b_n \theta(n)$ on déduit des propriétés connues des b_n que (14) est vérifiée.

En généralisant le procédé C) comme il vient d'être fait pour D) on obtient le résultat donné par M. BERNSTEIN.

IV. - *(r, φ) étant un point de la frontière de $B(\varrho, F)$, l'indicatrice $H(\varphi, f)$ d'une fonction associée vérifie l'inégalité*

$$r^\varrho H(\varphi, f) \leqq 1.$$

3. - Généralisation du procédé de prolongement par le moyennes. Cas de l'ordre infini. — Nous allons chercher à construire des fonctions $\Phi(z)$ d'ordre infini, tendant vers 0 lorsque z s'éloigne indéfiniment dans toute direction autre que l'axe réel positif et voisines d'une fonction donnée à l'avance.

$f(z) = \sum b_n z^n$ étant donnée, d'ordre infini, nous posons $D_n |b_n| = 1$, D_n étant pris égal à l'infini si $b_n = 0$. On a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log D_n}{n} = \infty, \qquad \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log D_n}{n \log n} = 0$$

donc, si l'on pose
$$\log D_n = \frac{n}{\log n}\,\varkappa(n)$$
on aura
$$\varlimsup_{n=\infty} \frac{\varkappa(n)}{\log n} = \infty, \qquad \varliminf_{n=\infty} \frac{\varkappa(n)}{(\log n)^2} = 0.$$

Ceci conduit à comparer $\varkappa(n)$ aux valeurs prises par le logarithme d'une fonction entière d'ordre nul. En opérant comme je l'ai fait dans un cas analogue, marquons dans un plan rapporté à deux axes OX, OY les points A_n de coordonnées
$$X_n = \log n, \qquad Y_n = \varkappa(n)$$
et construisons avec ces points un polygone de NEWTON convexe vers le bas, admettant pour sommets ces points ou certains de ces points et laissant les autres sur ses côtés ou au-dessus de ses côtés. Ce polygone de NEWTON représente les variations d'une fonction continue $Y = \Pi(X)$ convexe qui vérifie les conditions

$$\varlimsup_{X=\infty} \frac{\Pi(X)}{X} = \infty, \qquad \varliminf_{X=\infty} \frac{\Pi(X)}{X^2} = 0 \tag{15}$$

$\Pi(X)$ peut présenter un minimum et être négative pour certains X; nous appellerons X_0 un point à partir duquel $\Pi(X)$ croît et est supérieur à 1. Nous désignerons par $\Pi'(X)$ la dérivée à droite de $\Pi(X)$. Il peut se faire que $\Pi'(X):X$ tende vers 0. Dans le cas contraire, nous modifierons $\Pi(X)$ de la façon suivante. Partons d'une valeur $X_1 \geqq X_0$ pour laquelle on a

$$\Pi'(X) \leqq \frac{1}{10}\,X, \tag{16}$$

il existe de telles valeurs en vertu de (15). Soit X_2 le premier nombre supérieur à X_1 pour lequel (16) cesse d'être vérifiée. Comme $\Pi'(X)$ est constant entre deux sommets du polygone de NEWTON, X_2 est un sommet de ce polygone. La fonction convexe

$$Y = \frac{1}{20}\,(X^2 - X_2^2) + \Pi(X_2) \tag{17}$$

est inférieure à $\Pi(X)$ pour $X > X_2$ et assez petit et supérieure à $\Pi(X)$ pour des X supérieurs à X_2 en vertu de (15). Le polygone de NEWTON et la parabole (17) ont donc des tangentes communes, nous prenons celle dont la pente est minimum, elle est tangente à (17) en un point X_2' et au polygone en un sommet d'abscisse X_2'' (c'est l'abscisse minimum des sommets de contact s'il y en a plusieurs). Si $Y = \alpha_2 X + \beta_2$ est l'équation de cette tangente, on remplace $\Pi(X)$ par la valeur (17) lorsque X est compris entre X_2 et X_2' et par $\alpha_2 X + \beta_2$ si $X_2' \leqq X \leqq X_2''$. La fonction ainsi modifiée ne cesse pas d'être convexe et de vérifier les conditions (15), et (16) est également verifiée pour $X_1 \leqq X < X_2''$. On continue à corriger ainsi $\Pi(X)$ de proche en proche, un nombre fini d'opération permettant de dépasser toute valeur X. (15) étant vérifiée, on trouvera au bout d'un certain nombre d'opération des points de la fonction corrigée pour lesquels

$$\Pi'(X) \leqq \frac{1}{100} X.$$

À partir de tels points, on pourra faire les corrections en remplaçant (16) par cette nouvelle inégalité; puis à partir d'une valeur suffisamment grande, on opérera de même en remplaçant le coefficient 1/100 par 1/1000, etc. Nous continuerons à appeler $\Pi(X)$ la fonction ainsi corrigée; c'est une fonction convexe qui vérifie les conditions (15), le rapport $\Pi'(X):X$ tend vers 0 lorsque $X \to \infty$ et 'on a

$$\varkappa(n) \geqq \Pi(\log n) \quad \text{pour} \quad n > n_0$$

l'égalité ayant lieu pour une suite infinie de valeurs n.

Si l'on désigne par $n(e^X)$ la partie entière de $\Pi'(X)+1$, on a

$$\Pi(X)-\Pi(X_1) < \int_{X_1}^{X} n(e^X)\,dX < \Pi(X)-\Pi(X_1)+X-X_1.$$

Introduisons la suite de nombres r_p tels que $r_1=r_2= \dots =r_q=e^{X_1}$ si $q=n(e^{X_1})$ et tels que le nombre des r_p inférieurs à r soit $n(r)$. Puisque $\Pi'(X):X$ tend vers 0, la fonction entière

$$g(z)=\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n}\right)$$

appartient à la classe de fonctions d'ordre nul pour laquelle

$$\lim_{r=\infty}\frac{n(r)}{\log r}=0, \qquad \lim_{r=\infty}\frac{g(r)}{(\log r)^2}=0. \tag{18}$$

Elle jouit donc des propriétés que j'ai indiquées dans ma Thèse ([9]). Tout d'abord, d'après la définition de $n(r)$, on a

$$\log g(r)=\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx+\varepsilon\log r=\Pi(\log r)+\tau\log r \tag{19}$$

les limites d'indétermination de τ pour r infini étant entre 0 et 1; ensuite, pour $z=re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$, on a, $\eta(z)$ tendant vers 0 avec $\frac{1}{r}$

$$g(z)=\frac{z^{n(r)}}{r_1 r_2 \dots r_{n(r)}}\, r^{\eta(z)}=g(r)e^{i\varphi n(r)}r^{\tau_1(z)}, \qquad |\tau_1(z)| \to 0.$$

Il résulte en effet de mes calculs cités que le premier et le second membre de cette égalité sont égaux, la partie réelle de $\eta(z)$ tendant vers 0 avec $1/r$ lors-

---

([9]) Voir aussi mes *Lectures on the general theory of integral functions*, pp. 132-136.

que $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2} + \gamma$, $\gamma > 0$; on applique alors le théorème classique sur le module et la partie réelle, ou bien on calcule directement l'argument de $g(z)$.

Ceci dit, nous définissons $\Phi(z)$ par l'égalité (6) en y prenant

$$\log \theta(n-2) = \frac{n}{\log n} \log g(n) - En, \qquad E = \text{const.}, \quad n \geqq 2.$$

Le second membre de cette égalité, qui est défini pour $n > 1$, est une fonction convexe de n dès que n est assez grand. En effet, en posant $\log g(n) = V(\log n)$, on sait que $V(x)$ est convexe et indéfiniment croissante, et la dérivée seconde du second membre est

$$\frac{V''(\log n)}{n \log n} + \frac{V'(\log n) \log n - V(\log n)}{n (\log n)^2} \left(1 - \frac{2}{\log n}\right)$$

comme $x V'(x) - V(x)$ est positif à partir d'une valeur de x, la propriété est établie.

Eu égard à (19),

$$\varliminf_{n=\infty} \frac{\log D_n - \log \theta(n)}{n}$$

appartient au segment $E-1$, E; *on choisira E pour que cette limite inférieure soit nulle.* On aura alors

$$\varlimsup_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{\theta(n)}{D_n}} = 1 \tag{20}$$

et par suite, si l'on pose

$$b_n = \frac{a_n}{\theta(n)}$$

les a_n vérifient l'égalité (14), la série $F(z) = \sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence l'unité, $f(z)$ sera une fonction associée à $F(z)$.

Comparons les croissances des fonctions $\Phi(r)$ et $M(r, f)$. D'après (20) on a, à partir d'une valeur de n, si petit que soit le nombre positif ε,

$$\frac{1}{D_n} < \frac{(1+\varepsilon)^n}{\theta(n)}$$

ce qui montre que, ε positif étant donné, on a, *à partir d'une valeur $r(\varepsilon)$ de r,*

$$M(r, f) < \Phi[(1+\varepsilon) r]. \tag{21}$$

D'autre part, il existe une suite infinie de n pour lesquels, si petit que soit ε positif,

$$\frac{1}{D_n} > \frac{(1-\varepsilon)^n}{\theta(n)},$$

donc, pour ces n, quel que soit r,

$$M(r, f) > \frac{(1-\varepsilon)^n r^n}{\theta(n)}, \tag{22}$$

Or, $\log \theta(n)$ étant convexe en n pour $n > n_0$, tous les entiers n suffisamment grands sont ce que j'ai appelé des *indices principaux*; tout terme de $\Phi(r)$ de rang assez grand est le terme maximum de la série $\Phi(r)$ pour un certain r. Dans (22) prenons pour $(1-\varepsilon)r$ une valeur pour laquelle le second membre est terme maximum de $\Phi[(1-\varepsilon)r]$, nous aurons d'après un calcul de M. BOREL

$$\Phi[(1-\varepsilon)^2 r] < M(r,f)[1+(1-\varepsilon)+ \dots + (1-\varepsilon)^n + \dots] = M(r,f)\frac{1}{\varepsilon}$$

ce qui montre que, *pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r, on a*

$$M(r,f) > \Phi[(1-\varepsilon(r))r], \qquad \lim \varepsilon(r) = 0. \tag{23}$$

Nous dirons que *$M(r,f)$ vérifiant, dans les conditions indiquées, les inégalités* (21) *et* (23) *est de l'ordre de $\Phi(r)$*. Des définitions plus précises de l'ordre ont été données dans la théorie des fonctions entières d'ordre infini, mais celle adoptée ici s'introduit naturellement dans l'étude de première approximation actuelle.

Sous la condition que tous les entiers assez grands soient des indices principaux de $\Phi(r)$, la classe des fonctions qui sont de l'ordre de $\Phi(r)$ est la classe des fonctions entières associées aux séries entières $F(z)$ dont le rayon de convergence est 1 *par l'intermédiaire de $\Phi(r)$.*

Pour achever de l'établir, considérons $f(z) = \sum b_n z^n$ qui est de l'ordre de $\Phi(r)$; on aura, quels que soient r et n

$$|b_n| r^n < M(r,f) < \Phi[(1+\varepsilon)r]$$

ce qui entraîne d'après le calcul précédent, r étant convenablement choisi et $\varepsilon > 0$

$$|b_n|\theta(n) < (1+\varepsilon)^n, \qquad n > n(\varepsilon).$$

D'autre part, on ne peut avoir à partir d'une valeur n, k étant inférieur à 1,

$$|b_n|\theta(n) < k'^n, \qquad k' < k$$

ce qui conduirait à $M(r,f) < \Phi(kr)$, donc à une contradiction. Il s'ensuit que les nombres $a_n = b_n\theta(n)$ vérifient la condition (14).

Les coefficients de $\Phi(z)$ sont les valeurs pour z entier positif ou nul de la fonction $K(2+z)$, $K(z)$ étant définie par

$$K(z) = e^{Ez}[g(z)]^{-z/\log z}.$$

$K(z+2)$ est holomorphe lorsque la partie réelle de z est supérieure à -1. Le logarithme du module de $K(z)$ pour $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$, est donné par

$$Er\cos\varphi - \frac{r}{\log r}\log g(r) R\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)\left(1+\frac{i\varphi}{\log r}\right)^{-1}\left(1+\frac{i\varphi n(r) + \tau_1(z)\log r}{\log g(r)}\right)\right].$$

Comme $\log g(r) : \log r$ croît indéfiniment, comme $n(r) : \log r$ et $\log g(r) : (\log r)^2$ tendent vers 0, le quotient de cette expression par r tend vers 0 avec $1/r$. Par suite la fonction $K(z+2)$ vérifie les conditions du théorème de M. LINDELÖF, ce qui conduit à ce résultat:

V. - *$f(z)$ étant une fonction entière d'ordre infini donnée, on peut trouver une fonction entière $\Phi(z)$ qui tend uniformément vers* 0 *lorsque z s'éloigne indéfiniment dans tout angle fixe $\delta < \varphi < 2\pi - \delta$, $0 < \delta < 2\pi$; $f(z)$ étant associée à une série entière $F(z)$ de rayon de convergence unité par l'intermédiaire de $\Phi(z)$. $M(r, f)$ est de l'ordre de $\Phi(r)$.*

Pour les raisons invoquées précédemment, la fonction $\Phi(z)$ peut être considérée comme une *fonction sommatrice*: elle permet le prolongement analytique de $F(z)$, de rayon de convergence unité, dans toute l'étoile de MITTAG-LEFFLER. Il en est encore de même des fonctions obtenues en ajoutant à $\Phi(z)$ une fonction $G(z)$ quelconque à coefficients positifs telle que, si petit que soit ε, on ait à partir d'une valeur r

$$M(r, G) < \Phi(\varepsilon r).$$

La nouvelle fonction $\Phi(z)$ ainsi obtenue sera en effet à coefficients positifs, supérieure à $\Phi(r)$ pour $z = r > 0$ et au plus de l'ordre de $\Phi(\varepsilon r)$ pour $\delta < \varphi < 2\pi - \delta$. Si z_1 est un point appartenant à l'étoile de MITTAG-LEFFLER de $F(z)$, l'intégrale

$$\int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\Phi\left(t \frac{z}{\zeta}\right)}{\Phi(t)} d\zeta, \qquad z = z_1 u, \qquad 0 < u < 1,$$

tendra vers 0 lorsque t croîtra indéfiniment, L étant un chemin intérieur à l'étoile et composé des arcs de cercle $z = z_1 e^{i\theta}$, $|\theta| \leqq \omega$; $z = z_1 v_0 e^{i\theta}$, $|z_1| v_0 < 1$, $\omega \leqq \theta \leqq \leqq 2\pi - \omega$; et de deux segments $z = z_1 e^{i\omega} v$, $z = z_1 e^{-i\omega} v$, $0 < v_0 \leqq v \leqq 1$. Car, sur le premier arc de cercle

$$\left| \frac{\Phi\left(t \frac{z}{\zeta}\right)}{\Phi(t)} \right| < \frac{\Phi(ut)}{\Phi(t)},$$

et sur le reste de L, $\left|\Phi\left(t \frac{z}{\zeta}\right)\right|$ est au plus égal à $\Phi\left(\frac{1}{2} t\right)$ dès que t est assez grand. L'inégalité précédente a donc lieu partout sur L, u étant compris entre 0 et 1. Comme d'après les propriétés de convexité,

$$\log \Phi(t) - \log \Phi(tu)$$

croît indéfiniment, on voit bien que:

VI. - *Les fonctions $\Phi(z)$ d'ordre infini considérées ci-dessus permettent le prolongement par la formule* (13) *de toute fonction $F(z)$ admettant le cercle $|z| < 1$ pour cercle de convergence, ce prolongement valant dans toute l'étoile d'holomorphie.*

De même, $f(z)$ étant la fonction associée de $F(z)$ par l'intermédiaire de $\Phi(z)$, le procédé C) appliqué avec

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta}\,\Phi\left(\frac{z}{\zeta}\right)d\zeta.$$

L étant le chemin précédent, conduit à la proposition suivante:

VII. - *Si $f(z)$ est la fonction associée de $F(z)$ par l'intermédiaire de la fonction sommatrice $\Phi(z)$ et si $d(\varphi)$ est la distance à l'origine du point frontière de l'étoile de $F(z)$ situé sur le rayon d'argument φ, on a, si petit que soit ε pourvu que r soit assez grand*

$$|f(re^{i\varphi})|<\Phi\left(\frac{r}{d(\varphi)}+\varepsilon r\right). \tag{24}$$

Si dans un angle $|\varphi-\varphi_0|\leqq\omega$ tous les points frontières de l'étoile sont à une distance de l'origine au moins égale à d, l'inégalité (24) *est vérifiée uniformément, $d(\varphi)$ étant remplacé par d.*

4. - Cas particuliers, notamment cas où la frontière de l'étoile est formée uniquement de prolongements de rayons. — Nous supposerons d'abord que la fonction sommatrice est d'ordre infini.

Nous considérerons l'ordre de grandeur de la fonction associée $f(z)$ dans une direction $\varphi=\varphi_0$. Si quel que soit ε positif ($\varepsilon<1$), l'inégalité

$$|f(z)|>\Phi\left(\frac{r}{k}-\varepsilon r\right)$$

est vérifiée pour une suite infinie de points z s'éloignant indefiniment leur argument φ tendant vers φ_0, nous dirons que $f(z)$ *est au moins de l'ordre de* $\Phi\left(\frac{r}{k}\right)$ *dans la direction* φ_0.

Si en outre, ε positif étant donné arbitrairement, on a également

$$|f(z)|<\Phi\left(\frac{r}{k}+\varepsilon r\right)$$

pour tous les points z de module suffisamment grand dont l'argument s'écarte de φ de moins de $\omega(\varepsilon)$, ce qu'on exprimera en disant que $f(z)$ *est au plus de l'ordre de* $\Phi\left(\frac{r}{k}\right)$ *dans la direction* φ_0; on dira que $f(z)$ *est de l'ordre de* $\Phi\left(\frac{r}{k}\right)$ *dans la direction* φ_0.

On a le théorème suivant:

VIII. - *Supposons que $\zeta=r_0e^{i\varphi_0}$ étant un point singulier de $F(z)$, la frontière de l'étoile dans le voisinage de ζ se réduise à un segment $(\zeta, k\zeta)$ k étant réel supérieur à* 1. *Dans ces conditions, $f(z)$ est au moins de l'ordre de $\Phi\left(\frac{r}{r_0}\right)$ dans la direction φ_0.*

Pour l'établir, il est loisible de supposer $\varphi_0=0$. Si la propriété n'était pas vraie, il existerait un angle $|\varphi|\leqq\omega$ dans lequel on aurait

$$(25)\qquad |f(z)|<\Phi\left(\frac{r}{\lambda}\right),\qquad \lambda>r_0,\quad \text{pour}\quad r>r(\lambda).$$

Marquons dans cet angle un contour L' défini comme suit

$$\begin{aligned} &z=r_0'e^{i\varphi}, && |\varphi|\leqq\omega', && r_0'<r_0\,;\\ &z=te^{\pm i\omega'}, && r_0'\leqq t\leqq r_0'', && r_0<r_0''<r_0k\,;\\ &z=r_0''e^{i\varphi}, && \omega'\leqq|\varphi|\leqq 2\omega'. \end{aligned}$$

Soit ensuite le contour L'' défini de la façon suivante

$$\begin{aligned} &z=r_0''e^{i\varphi}, && 2\omega'\leqq|\varphi|\leqq 3\omega';\\ &z=te^{\pm 3i\omega'}, && \tfrac{1}{2}\leqq t\leqq r_0'';\\ &z=\tfrac{1}{2}\,e^{i\varphi}, && 3\omega'\leqq\varphi\leqq 2\pi-3\omega'. \end{aligned}$$

Il est possible de choisir ω' assez petit pour que $F(z)$ soit holomorphe sur le contour $L'+L''$ et à son intérieur. Alors, z étant dans le contour

$$F(z)=F_1(z)+F_2(z)$$

en posant

$$F_1(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{L'}\frac{F(\zeta)d\zeta}{z-\zeta},\qquad F_2(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{L''}\frac{F(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}.$$

Désignons par $f_1(z)$ et $f_2(z)$ les fonctions associées à $F_1(z)$ et $F_2(z)$ par l'intermédiaire de $\Phi(z)$. On a

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z).$$

$F_2(z)$ est holomorphe sauf sur L''; d'après le théorème VII (évidemment valable même si le rayon de convergence de $F(z)$ est différent de 1), on a

$$|f_2(z)|<\Phi\left(\frac{r}{\mu}\right),\qquad \mu>r_0,\qquad r>r(\mu)$$

pour $|\varphi|\leqq\frac{5}{2}\omega'$. Il en découle, en tenant compte de l'hypothèse (25) que l'on aura dans ce dernier angle, à partir d'une valeur de r

$$(26)\qquad |f_1(z)|<\Phi\left(\frac{r}{\tau}\right),\qquad \tau>r_0.$$

Mais, comme $F_1(z)$ est holomorphe à l'extérieur de l'angle $|\varphi|\leqq 2\omega'$, l'inégalité (26) vaudra partout.

Si l'on écrit

$$F_1(z)=\sum c_n z^n,\qquad f_1(z)=\sum c_n\frac{z^n}{\theta(n)}$$

(26) entraîne, pour r assez grand et quel que soit n,

$$\frac{|c_n|}{\theta(n)}r^n<\Phi\left(\frac{r}{\tau}\right),$$

et la méthode utilisée dans la démonstration de (23) permet d'en déduire

$$|c_n| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\tau}\right)^n.$$

$F_1(z)$ serait holomorphe pour $|z| < \frac{1}{\tau}$, $F(z)$ serait holomorphe au point $z = r_0$ contrairement à l'hypothèse. Le théorème est démontré.

En tenant compte de VII, on démontre de même que:

IX. - *Si dans un angle de sommet origine, la frontière de l'étoile de $F(z)$ est uniquement formée par les prolongements des rayons joignant l'origine à certains points singuliers ζ, $f(z)$ est de l'ordre de $\Phi\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)$ dans la direction joignant l'origine à chaque point ζ, tandis que, si $f(z)$ est holomorphe sur une droite $\varphi = \varphi_0$, son ordre dans la direction φ_0 est au plus celui de $\Phi(\varepsilon r)$, si petit que soit le nombre positif ε.*

On peut étendre de diverses façons ce genre de propositions.

Tout d'abord, la démonstration précédente, à peine modifiée donne ceci:

X. - *La fonction sommatrice $\Phi(z)$ étant toujours d'ordre infini, si en un point ζ de la frontière de l'étoile de $F(z)$, la distance de la frontière à l'origine passe par un minimum relatif, $f(z)$ est de l'ordre de $\Phi\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)$ dans la direction $\varphi = \arg \zeta$ et est d'ordre moindre dans les directions voisines.*

En particulier, si les points de la frontière de l'étoile situés sur la circonférence $|z| = 1$ sont isolés, ils fournissent les seules directions dans lesquelles $f(z)$ est de l'ordre de $\Phi(r)$.

En employant un procédé analogue, mais en introduisant le domaine $B(\varrho, F)$ et en utilisant les courbes de MITTAG-LEFFLER dans la démonstration, on établira la proposition suivante:

XI. - *Les points où la distance de la frontière de $B(\varrho, F)$ à l'origine passe par un minimum relatif fournissent des maxima relatifs de $H(\varphi, f)$; si $r_0 e^{i\varphi_0}$ est un tel point, on a $r_0 H(\varphi_0, f) = 1$.*

5. - Généralisation de la méthode de prolongement par l'intégrale de Borel. — Supposons que $V(t)$ soit une fonction croissante (ou non décroissante) définie pour $t \geqq c \geqq 0$ et telle que les intégrales

$$\psi(n) = \int_0^\infty e^{-V(t)} t^n \, dt, \qquad n \text{ entier } \geqq 0,$$

aient un sens.

On voit de suite que $V(t) : \log t$ tend nécessairement vers ∞ et qu'il est loisible de supposer $V(t)$ continue à gauche. Si $c \geqq 1$, $\psi(n)$ est une fonction croissante de n; si $c < 1$, $\psi(n)$ ne diffère de la valeur correspondant à $c = 1$ que d'une quantité qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

La fonction

$$\Psi(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{\psi(n)}$$

est une fonction entière. Désignons en effet par $\psi_1(n)$ le maximum de $e^{-V(t)}t^n$ et par t_n une valeur de t pour laquelle ce maximum est atteint, on a $t_{n+1}>t_n$ et t_n ne reste pas borné, $\psi_1(n)$ croît à partir d'une valeur de n et croît indéfiniment. On a donc, dès que n est assez grand

$$\psi(n)>e^{-V(t_n)}(t_n-1)^n=\psi_1(n)\left(1-\frac{1}{t_n}\right)^n;$$

d'autre part, quels que soient n et $t\geqq c$

$$e^{-V(t)}t^n\leqq\psi_1(n)$$

donc, à partir d'une valeur de n, si petit que soit $\varepsilon>0$,

$$\frac{r^n}{\psi(n)}<\frac{(r+\varepsilon r)^n}{\psi_1(n)}\leqq\frac{(r+\varepsilon r)^n}{t^n}e^{V(t)}=e^{V(r+\varepsilon r)}.$$

La méthode déjà employée au n.º 3 donne alors

$$\sum_{n_0}^{\infty}\frac{r^n}{\psi(n)}<e^{V(r(1+\varepsilon)^2)},$$

ce qui établit que $\Psi(z)$ est une fonction entière et que, si petit que soit $\varepsilon>0$, on a

(27) $$\Psi(r)<e^{V(r+\varepsilon r)}\quad\text{pour}\quad r>r(\varepsilon).$$

On peut moyennant une hypothèse supplémentaire sur $V(t)$ reconnaître que $\Psi(r)$ est de l'ordre de $e^{V(r)}$, au sens du n.º 3. Supposons que

$$V(t)>(\log t)^3\quad\text{si}\quad t>T.$$

En prenant $\tau=e^{\varepsilon n}$, $\varepsilon>0$, on a

$$\int_{\tau}^{\infty}e^{-V(t)}t^n dt<\int_{\tau}^{\infty}e^{-(\log t)^3}t^n dt<\int_{\tau}^{\infty}t^{n-\varepsilon^2n^2}dt<1$$

dès que n est assez grand. Il en résulte que

$$\psi(n)<e^{\varepsilon n}\psi_1(n)+1$$

et en rapprochant cette inégalité de celle obtenue plus haut, on obtient

(28) $$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\psi(n)}{\psi_1(n)}\right]^{\frac{1}{n}}=1.$$

On aura, si $r>0$, $0<\varepsilon<1$, $n>n(\varepsilon)$

$$\Psi(r)>\frac{r^n}{\psi(n)}>\frac{(1-\varepsilon)^n r^n}{\psi_1(n)},\qquad \psi_1(n)=e^{-V(t_n)}t_n^n;$$

en y faisant $r(1-\varepsilon)=t_n$, on voit que, pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r,

$$\Psi(r) > e^{V(r-\varepsilon(r)r)}, \qquad \varepsilon(r) > 0, \qquad \lim \varepsilon(r) = 0. \tag{29}$$

À la fonction $F(z)=\sum a_n z^n$ de cercle de convergence $|z|<1$, on associera ici la fonction

$$f(z)=\sum \frac{a_n z^n}{\psi(n)}.$$

En supposant $|z|<1$, on pourra écrire comme dans A) au n.° 1

$$F(z)=\int_c^\infty e^{-V(t)} f(zt)\,dt \tag{30}$$

de sorte que, en particulier

$$\int_c^\infty e^{-V(t)}\Psi(t\lambda)\,dt$$

converge si $\lambda<1$. L'intégrale du second membre de (30) convergera donc uniformément dans un domaine du plan des z si dans ce domaine $f(zt)$ est au plus de l'ordre de $\Psi(t\lambda)$, $\lambda<1$.

La condition (14) entraîne d'ailleurs

$$M(r,f) < \Psi(r+\varepsilon(r)r), \qquad \lim \varepsilon(r)=0. \tag{31}$$

La formule (30) permettra dans certains cas le prolongement analytique de $F(z)$ dans certains domaines, la fonction $\Psi(z)$ sera alors une fonction sommatrice; je l'appellerai *fonction sommatrice de seconde espèce*, les fonctions sommatrices des n.os 3 et 4 étant *les fonctions sommatrices de première espèce.* S'il existe une fonction associée $f(z)$ telle que, dans un angle $|\varphi-\varphi_0|<\omega$, $f(z)$ soit au plus de l'ordre de $\Psi\left(\frac{r}{k}\right)$, $k>1$, d'après (30) et d'après ce qui précède, $F(z)$ restera holomorphe pour $|\varphi-\varphi_0|<\omega$ et $r<k$, son prolongement étant donné par le second membre de (30). *$\Psi(z)$ sera une fonction sommatrice.*

On a donc les propositions suivantes:

XII. - *La fonction $f(z)$ associée à $F(z)$ par l'intermédiaire de $\Psi(z)$ est au moins de l'ordre de $\Psi\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)$ dans la direction $\varphi=\arg\zeta$ si $F(z)$ est holomorphe pour $z=\zeta u$, $0\leqq u<1$ mais ne l'est plus au point ζ.*

XIII. - *S'il existe des fonctions $\Psi(z)$ qui ne sont pas des fonctions sommatrices, toute fonction $f(z)$ associée à une série entière de rayon de convergence unité par l'intermédiaire de $\Psi(z)$ est de l'ordre de $\Psi(r)$ dans toute direction.*

Si l'on se donne a priori une fonction entière $f(z)=\sum b_n z^n$ de l'ordre de $\Psi(r)$, donc vérifiant (31) et

$$M(r,f) > \Psi(r-\varepsilon(r)r), \qquad \lim \varepsilon(r)=0, \qquad r=r_p, \qquad \lim r_p=\infty \tag{32}$$

on peut la considérer comme associée à une certaine fonction $F(z)$ par l'intermédiaire de $\Psi(z)$. Car, le calcul qui a conduit à (27) montre que le second membre de (30) converge pour $|z|<1$ même si l'on y remplace $f(zt)$ par la somme des modules de ses termes, il définit une fonction $F(z)=\sum b_n\psi(n)z^n$ qui est holomorphe au moins dans le cercle $|z|<1$. Mais en outre, d'après (32), il existe une suite de n pour lesquels $|b_n|\psi(n)>(1-\varepsilon)^n$, si petit que soit $\varepsilon>0$, le rayon d'holomorphie ne peut donc dépasser l'unité.

6. - Remarques sur les fonctions sommatrices complètes d'ordre infini. — En rapprochant les propositions VII et XII on voit que si une fonction d'ordre infini était à la fois fonction sommatrice de première et de seconde espèce, *l'ordre sur une direction quelconque d'une fonction entière associée à une fonction donnée $F(z)$ par l'intermédiaire de cette sommatrice serait complètement déterminé* (dans le sens du n.° 3) *par la connaissance de l'étoile d'holomorphie de $F(z)$*. D'autre part, le prolongement analytique de $F(z)$ serait donné dans l'étoile indifféremment par les moyennes (13) et par l'intégrale (30). Existe-t-il de telles fonctions sommatrices, fonctions que l'on pourrait appeler *fonctions sommatrices complètes*? Pour chercher à résoudre cette question on peut partir soit de la donnée d'une fonction sommatrice de seconde espèce, soit de la donnée d'une fonction sommatrice de première espèce.

Si l'on se donne la fonction $V(t)$, les $\psi(n)$ peuvent être considérés comme étant les valeurs pour z entier positif de la fonction

$$\psi(z)=\int_c^{\infty} e^{-V(t)}\,t^z\,dt$$

qui est une fonction entière si $c>0$, et tout au moins une fonction holomorphe pour $|\varphi|<\pi$ si $c=0$. Peut-on choisir $V(t)$ pour que la fonction $\psi(z)$ ne s'annule pas lorsque la partie réelle x de z est supérieure ou égale à un nombre a et pour que $\frac{1}{\psi(z)}$ vérifie la condition du théorème déjà utilisé de M. LINDELÖF? S'il n'y a pas de solution, peut-on en obtenir une en ajoutant au second membre de $\psi(z)$ une fonction s'annulant aux points d'abscisse entière et holomorphe pour $|\varphi|\leqq\frac{\pi}{2}$? La difficulté provient de ce que, dans tous les cas, $\psi(n)^{1/n}$ ne devant pas rester borné, $\psi(z)$ doit être d'ordre 1 et du type maximum. D'après la théorie générale, un angle d'ouverture π contient (tout au moins au sens large) au moins une direction de BOREL (c'est bien ce qui se produit pour la fonction $\Gamma(z+1)$); l'angle $|\varphi|\leqq\frac{\pi}{2}$ en contient même deux puisque $\psi(z)$ est une fonction réelle pour z réel. Pour que $\psi(z)$ de s'annule pas, ou ne s'annule pas trop souvent, il faut que la valeur 0 soit exceptionnelle, ce qui ne peut être reconnu d'une manière générale dans l'état actuel de la théorie.

La seconde voie consiste à partir d'une sommatrice de première espèce chercher à mettre ses coefficients $\theta(n)$ sous la forme intégrale des $\psi(n)$; on doit déterminer $V(t)$ pour que

$$\int_0^\infty e^{-V(t)} t^n dt = \theta(n).$$

On a à résoudre un problème de moments, et l'on est dans le cas où le problème est déterminé. Mais il faudrait savoir s'il est possible. On peut restreindre les hypothèses sur $V(t)$; ou bien considérer le problème même de STIELTJES, $e^{-V(t)}dt$ étant remplacé par $dW(t)$, ou bien chercher à déterminer une fonction $W(t)$ telle que

$$\int_0^\infty W(t) t^n dt = \theta(n), \tag{33}$$

l'intégrale convergeant *absolument*, quel que soit n, ce qui entraîne encore la convergence absolue de

$$\int_0^\infty W(t)\,\Psi(zt)dt, \qquad |z|<1,$$

et par suite le théorème XII. La méthode indiquée par M. BERNSTEIN pour le cas où les $\theta(n)$ sont donnés par les formules (9) et sur laquelle je reviendrai au n.° 8, donne également une solution explicite de (33) dans le cas des fonctions du n.° 4, la formule d'inversion de MELLIN s'applique et l'on a

$$W(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K(z+2)x^{-z-1}dz, \qquad \gamma \geqq 0.$$

Mais il resterait à voir si $W(x)$ peut être positive à partir d'une valeur de x, ou tout au moins si cette fonction peut rendre absolument convergentes les intégrales (33).

7. - Formation de fonctions sommatrices de seconde espèce voisines d'une fonction donnée d'ordre infini. Applications. — Supposons que l'on se donne une fonction entière $f(z) = \sum b_n z^n$. Peut-on, comme on l'a fait pour les fonctions sommatrices de première espèce, construire une fonction sommatrice de seconde espèce par l'intermédiaire de laquelle $f(z)$ soit associée à une série entière? Les calculs du n.° 5 donnent la solution. Désignons par $m(r, f)$ le terme maximum de la série

$$\sum |b_n| r^n,$$

$\log m(r, f)$ est une fonction convexe de $\log r$ qui peut être pour certains r inférieure à $(\log r)^3$. Nous prendrons pour $V(t)$ une fonction telle que $m(t, f)$ soit de l'ordre de $e^{V(t)}$ et que $V(t):(\log t)^3$ soit supérieur à 1 à partir d'une valeur de r. On pourrait prendre pour chaque t, $V(t)$ égal au plus grand des nombres $\log m(t, f)$ et $(\log t)^3$. Mais on pourra aussi prendre pour $V(t)$ une fonction à croissance normale au sens de M. BOREL. On peut également remplacer dans cette définition de $V(t)$, $m(t, f)$ par $M(t, f)$ qui sera connue plus immédiatement dans certains cas ($f(z)\equiv e_p(z)$ par exemple), et qui est régulièrement du même ordre d'après un théorème de M. BOREL. $V(t)$ *étant ainsi choisi, nous prenons*

$$\Psi(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\psi(n)}, \qquad \psi(n)=\int_0^\infty e^{-V(t)}t^n dt. \tag{34}$$

En conservant les notations du n.° 5, on a, pour tous les n assez grands,

$$(1-\varepsilon)^n t_n^n \,|\, b_n \,| < e^{V(t_n)} = t_n^n \frac{1}{\psi_1(n)}$$

et pour une suite de n

$$|\, b_n \,|\, r^n = m(r, f) > e^{V(r(1-\varepsilon))} > \frac{r^n(1-\varepsilon)^n}{\psi_1(n)}$$

ce qui montre, en tenant compte de (28), que la série $\sum b_n\psi(n)z^n$ a pour rayon de convergence l'unité. D'après XII, il s'ensuit que:

XIV. - *Étant donnée une fonction entière $f(z)$ d'ordre infini, elle est l'associée d'une série entière $F(z)$ par l'intermédiaire d'une fonction $\Psi(z)$ définie par les formules* (34), *l'ordre de $f(z)$ dans une direction φ est au moins égal à l'ordre de $\Psi\left(\frac{r}{k}\right)$, k étant la distance à l'origine du premier point singulier que l'on rencontre en prolongeant $F(z)$ le long du rayon d'argument φ.*

Ceci étant, partons d'une fonction $f(z)$ d'ordre infini; on peut former d'après l'énoncé V une sommatrice $\Phi(z)$ telle que $f(z)$ soit l'associée d'une série $F_1(z)$ par l'intermédiaire de $\Phi(z)$; à partir de $\Phi(z)$ on peut construire une fonction $\Psi(z)$ en prenant directement dans (34) $V(t)=\log \Phi(t)$, la condition $V(t)>(\log t)^3$ sera vérifiée. Comme tous les entiers assez grands sont indices principaux de $\Phi(z)$, on aura $\psi_1(n)=\theta(n)(1-\varepsilon(n))^n$. $f(z)$ sera donc aussi associée à une fonction $F_2(z)$ par l'intermédiaire de $\Psi(z)$. D'ailleurs $\Phi(z)$ sera aussi associée à une série $F_3(z)$ par l'intermédiaire de $\Psi(z)$ et puisqu'on a $\Phi(r)=\Psi(r+o(r))$, on déduit des propriétés de $\Phi(z)$ que $F_3(z)$ est prolongeable au moyen de la formule (30) dans tout le plan sauf sur le segment $1, +\infty$. $\Psi(z)$ est une fonction sommatrice. Ainsi:

XV. - *$f(z)$ étant donnée, d'ordre infini, il existe une fonction sommatrice de seconde espèce $\Psi(z)$ telle que $f(z)$ soit associée à une série entière de rayon de convergence unité par l'intermédiaire de $\Psi(z)$.*

De même qu'il importerait de savoir s'il existe des fonctions $\Psi(z)$ qui ne sont pas des fonctions sommatrices, donc justiciables du théorème XIII, il serait intéressant de savoir s'il existe des fonctions sommatrices de seconde espèce ne permettant le prolongement dans toute l'étoile que pour certaines classes de fonctions.

La proposition XIV montre que, si la fonction $F(z)$ dont $f(z)$ est l'associée admet le cercle $|z|=1$ comme coupure, $f(z)$ est de l'ordre de $\Psi(r)$, et a fortiori de l'ordre de $M(r, f)$, dans toute direction. Or on connaît deux sortes de propositions permettant d'affirmer qu'une série de TAYLOR n'est pas prolongeable, et ne faisant pas intervenir les valeurs particulières des coefficients: le théorème sur les séries lacunaires et le théorème de FATOU et ses extensions concernant la multiplication par -1 de certains des coefficients. En prenant le premier sous la forme que lui a donné M. PÓLYA, on a cette proposition:

XVI. - *Si la densité des coefficients non nuls de la fonction entière $f(z)$ d'ordre infini est égale à* 0, *$f(z)$ est de l'ordre de $e^{V(r)}$ dans toute direction, $V(r)$ étant la majorante de* $\log M(r, f)$ *introduite dans* (34).

En prenant la seconde proposition sous la forme obtenue par MM. PÓLYA, PALEY et ZYGMUND ([10]), on a l'énoncé suivant:

XVII. - *$f(z)=\sum b_n z^n$ étant donnée, d'ordre infini, $V(r)$ la majorante de* $\log M(r, f)$ *introduite dans* (34), *si l'on remplace les b_n par $b_n \nu_n$, $\nu_n = \pm 1$, pour presque toutes les suites $\{\nu_n\}$, la fonction obtenue sera de l'ordre de $e^{V(r)}$ dans toutes les directions.*

Par exemple, presque toutes les fonctions pour lesquelles

$$f(z)=\sum b_n z^n \quad \text{avec} \quad \overline{\lim_{n=\infty}}\, |b_n|^{k/n} \log n = A$$

sont telles que, pour chaque φ, on a

$$\overline{\lim}\, \frac{\log \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|}{r^k} = A.$$

8. - Remarque sur les fonctions sommatrices de seconde espèce et les fonctions sommatrices complètes dans le cas de l'ordre fini. — Les propositions du n.° 7 s'étendent aux fonctions d'ordre fini. Les énoncés XVI et XVII restent vrais sans modifications et conservent tout leur intérêt. Mais il convient d'autre part de modifier la définition des fonctions sommatrices de seconde espèce de façon à pouvoir généraliser le processus B) du n.° 1, à la place de la fonction réelle $V(t)$, il convient d'introduire une fonction de variable complexe en procédant comme au n.° 2. Je n'insisterai pas sur ce point qui a été traité par M. BERNSTEIN.

La recherche de fonctions sommatrices complètes a été aussi faite par M. BERNSTEIN. Je ferai à ce sujet les remarques suivantes. La formule d'inversion de MELLIN s'applique lorsque les $\theta(n)$ sont donnés par (9) et définit, même pour x complexe une fonction $W(x)=e^{-V(x)}$ si elle est décroissante pour x réel positif

([10]) Voir ZYGMUND, Int. math. Kongress, Zurich, 1932, B. 2, p. 57.

assez grand. Cette condition est suffisante. Car on aura, en vertu de (27)

$$\log W(X) < -(1-\varepsilon) X^{\varrho(X)}, \qquad X \text{ positif assez grand},$$

si petit que soit $\varepsilon > 0$, il s'ensuit, $W(Xe^{i\tau})$ étant borné pour $|\tau| < \frac{\pi}{2\varrho}$,

$$\log |W(Xe^{i\tau})| < -(1-\varepsilon) \cos \tau\varrho X^{\varrho(X)}, \qquad |\tau| < \frac{\pi}{2\varrho},$$

ce qui suffit pour démontrer que la fonction sommatrice est complète. La condition à écrire est donc que $W(X)$ décroît, ce qui a lieu a fortiori si

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \theta(z) x^{-z} \log z dz > 0,$$

condition voisine de celle donnée par M. BERNSTEIN.

M. LE ROY [11] a donné une solution explicite du problème généralisé des moments dans le cas où les $\theta(n)$ sont voisins de $n!$, notamment si

$$\theta(n) = G(n) n!$$

$G(t)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à 1. Il a pu montrer que sa solution est majorée par une exponentielle, les remarques précédentes s'appliquent donc. D'autre part on peut constater que le théorème de LINDELÖF peut encore s'appliquer dans le cas où la fonction appelée $\Theta(z)$ au n.° 2 est méromorphe dans le demi-plan $Rz > a$ pourvu qu'elle satisfasse à certaines conditions. On déduirait de là que les $\theta(n)$ de M. LE ROY peuvent donner naissance à des fonctions sommatrices complètes. Mais ces fonctions sont trop voisines de la fonction exponentielle pour présenter de l'intérêt dans l'étude actuelle.

9. - Application à la recherche des directions de Borel des fonctions entières d'ordre infini. — Je m'appuierai sur la proposition suivante:

XVIII. - *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $|z|<1$, N un entier positif ou nul, C et D deux nombres positifs. Supposons que*

1°) *On a* $\log |f(z)| < C$ *si* $|z| < d < 3/4$;

2°) *Il existe deux nombres c et c' tels que $|c| < e^D$, $|c'| < e^D$, $|c'-c| > e^{-D}$ pour lesquels $f(z)-c$ et $f(z)-c'$ s'annulent au plus N fois dans le cercle $|z|<1$.*

Dans ces conditions, on a pour $|z| < 3/4$

$$\log |f(z)| < aN \log \frac{1}{d} + \beta C + \gamma D + \delta$$

a, β, γ, δ étant des constantes absolues.

La démonstration que j'omets, se fait en suivant la méthode que j'ai indiquée

---

([11]) LE ROY, Annales Fac. sc. Toulouse, t. 2 (1900), pp. 317-430.

dans un Mémoire précédent, et en utilisant le perfectionnement qu'y a apporté M. MILLOUX ([12]).

Considérons alors une fonction $f(z)$ holomorphe dans un petit angle $|\varphi|<\eta$ et, $K(r)$ étant croissante, supposons que dans cet angle $\log|f(z)|<K(r)$ si $|z|=r$ tandis qu'il existe une suite de points z_n dont le module croît indéfiniment et dont l'argument tend vers 0 pour lesquels

$$\log|f(z_n)|>K(r_n-o(r_n)). \tag{35}$$

Partons d'un tel point z_n et supposons que λ étant moindre que 1, il existe deux nombres c et c' tels que

$$\log|c|<K(r_n\lambda), \qquad \log|c'|<K(r_n\lambda), \qquad \log|c'-c|>-K(r_n\lambda)$$

pour lesquels le nombre des zéros de $f(z)-c$ et $f(z)-c'$ dans le cercle $|z-z_n\lambda|<r_n\eta'$ soit inférieur à $K(r_n\lambda)$; η' est pris assez petit pour que ce cercle appartienne à l'angle $|\varphi|<\eta$. Nous appliquons le théorème XVIII avec $d=1/4$, d'abord au cercle de rayon $\frac{4}{5}r_n\eta'$ et centre $z_n\left(\lambda-\frac{\eta'}{5}\right)$ puis au cercle considéré de centre $z_n\lambda$. On aura

$$\log|f(z)|<\Delta^2K(r_n\lambda), \qquad \Delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta+1, \quad \text{si} \quad |z-z_n\lambda|<\frac{3}{4}\eta'r_n.$$

On appliquera ensuite le théorème XVIII au cercle $\left|z-z_n\left(\lambda+\frac{\eta'}{2}\right)\right|<\eta'r_n$ s'il existe aussi dans ce cercle deux nombres c, c' vérifiant les mêmes inégalités que plus haut et tels que $f(z)-c$ et $f(z)-c'$ s'annulent moins de $K(r_n\lambda)$ fois dans ce cercle. Et ainsi de suite. On en déduit que les deux alternatives suivantes sont seules possibles:

1°) Il existe un cercle $|z-z_n\mu|<r_n\eta'$, $\lambda<\mu<1$, dans lequel $f(z)$ prend $K(r_n\lambda)$ fois au moins toutes les valeurs de module moindre que $e^{K(r_n\lambda)}$ sauf au plus des valeurs appartenant à un cercle de rayon $e^{-K(r_n\lambda)}$.

2°) On a

$$\log|f(z_n)|<\Delta'K(r_n\lambda), \qquad \log\Delta'=\left(\frac{2-2\lambda}{\eta'}+1\right)\log\Delta.$$

Cette dernière conclusion rapprochée de l'hypothèse (35) donnerait

$$K(r_n-o(r_n))<\Delta'K(r_n\lambda)$$

ce qui est impossible si la croissance de $K(r)$ reste constamment supérieure à celle de toute fonction de la forme r^h, d'une façon précise, si l'on suppose que

$$\lim_{r=\infty}\frac{K(r\lambda)}{K(r)}=0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda<1. \tag{36}$$

([12]) Acta math., t. 52 (1928), pp. 67-92 et pp. 189-255.

On en déduit, en adoptant la terminologie du n.° 4, que

XIX. - *Si $f(z)$ est holomorphe dans un angle $|\varphi|<\eta$, son ordre étant celui de $e^{K(r)}$ dans la direction $\varphi=0$, il existe une suite de cercles Γ_n*

$$|z-\zeta_n|=o(|\zeta_n|), \qquad \lim|\zeta_n|=\infty, \qquad \lim\arg\zeta_n=0$$

tels que, dans Γ_n, $f(z)$ prend $N=K(|\zeta_n|-o(|\zeta_n|))$ fois au moins toute valeur dont le module est moindre que e^N sauf au plus des valeurs appartenant à un cercle de rayon e^{-N}. On suppose que $K(r)$ vérifie (36).

D'autre part, en utilisant le théorème de JENSEN comme je l'ai fait ailleurs ([13]) on reconnaît que dans un angle d'ouverture suffisamment petite, $|\varphi|<\eta(\varepsilon)$, le nombre des zéros de $f(z)-c$ dont le module est inférieur à r est au plus égal à $e^{K(r+\varepsilon r)}$, ε positif arbitraire, sauf au plus pour un ensemble de valeurs c dont la mesure (sur la sphère de RIEMANN) est nulle. *Nous dirons que la direction $\varphi=0$ du théorème XIX est une direction de Borel de l'ordre de $K(r)$.* On voit que, pour qu'une direction soit direction de BOREL de l'ordre de $K(r)$, $K(r)$ vérifiant (36), il faut et il suffit que ce soit une direction dans laquelle $f(z)$ est de l'ordre de $e^{K(r)}$.

Les théorèmes VII, IX, X, XII, XIII, XIV, XVI, XVII se traduisent donc par des propositions relatives aux directions de BOREL pourvu que les fonctions $\log\Phi(r)$, $\log\Psi(r)$, $V(r)$ jouissent de la propriété de croissance (36). Dans le cas où $\Psi(z)$ est défini par (34) à partir de $f(z)$, il suffira de prendre par exemple

$$V(t)=t^{u(t)}, \qquad u(t)=\max. \ \text{ pour } \ t'\leqq t \ \text{ de } \ \frac{\log\overset{+}{\log} M(t',f)}{\log t'}.$$

On obtient ainsi les propositions suivantes:

VII'. - *$f(z)$ étant l'associée de $F(z)$ par l'intermédiaire de $\Phi(r)$,* $\log\Phi(r)$ *vérifiant* (36), *une direction φ ne peut être direction de Borel d'crdre* $\log\Phi\left(\frac{r}{k}\right)$ *que si le premier point singulier rencontré en prolongeant $F(z)$ sur cette direction est à une distance de l'origine inférieure ou égale à k.*

IX'. - *En ajoutant aux hypothèses de IX que* $\log\Phi(r)$ *vérifie* (36), *les directions des points singuliers ζ sont directions de Borel d'ordre* $\log\Phi\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)$ *et ce sont les seules d'ordre* $\log\Phi\left(\frac{r}{k}\right)$, *$k$ fini.*

X'. - *En ajoutant toujours l'hypothèse que* $\log\Phi(r)$ *vérifie* (36), *les directions des points ζ du théorème X donnent des directions de Borel d'ordre* $\log\Phi\left(\frac{r}{\zeta}\right)$ *les directions voisines étant d'ordre moindre.*

XII'. - *$f(z)$ d'ordre infini étant associée à $F(z)$ par l'intermédiaire de $\Psi(z)$* $\log\Psi(r)$ *vérifiant* (36), *si en prolongeant $F(z)$ sur la direction φ le premier*

([13]) Annali di mat., serie IV, t. 9 (1931), pp. 273-285.

point singulier rencontré est à la distance k de l'origine, la direction φ est une direction de Borel d'ordre $\log \Psi\left(\frac{r}{k'}\right)$, $k' \leqq k$.

XIII'. - *Si* $\log \Psi(r)$ *vérifiant* (36), *la fonction* $\Psi(z)$ *n'est pas une fonction sommatrice, toute fonction* $f(z)$ *associée à une série entière de rayon de convergence* 1 *par l'intermédiaire de* $\Psi(z)$ *admet toute direction pour direction de Borel d'ordre* $\log \Psi(r)$.

XIV'. - *À toute fonction* $f(z)$ *d'ordre infini correspond une fonction* $\Psi(r)$ *définie par* (34), $V(r)$ *majorant* $\log M(r, f)$ *et vérifiant* (36) *et une série* $F(z)$ *dont* $f(z)$ *est l'associée par l'intermédiaire de* $\Psi(z)$. *Une direction φ sur laquelle le premier point singulier rencontré en prolongeant* $F(z)$ *est à la distance k de l'origine, est une direction de Borel d'ordre* $V\left(\frac{r}{k'}\right)$, $k' \leqq k$.

XVI'. - *Si la densité des coefficients non nuls de* $f(z)$ *est égale à* 0 *et si* $V(r)$ *vérifie* (36), *majore* $M(r, f)$, $M(r, f)$ *étant de l'ordre de* $e^{V(r)}$, *toute direction est direction de Borel d'ordre* $V(r)$.

XVII'. - $f(z) = \sum b_n z^n$ *étant donnée d'ordre infini,* $V(r)$ *définie comme dans XVI', pour presque toutes les suites* $\{\nu_n\}$, $\nu_n = \pm 1$, *la fonction* $\sum b_n \nu_n z^n$ *admet toute direction pour direction de Borel d'ordre* $V(r)$.