Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Fabio Conforto

Sopra il calcolo differenziale assoluto negli spazi funzionali continui

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 3 (1933), p. 309-324

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_3_309_0>

SOPRA IL CALCOLO DIFFERENZIALE ASSOLUTO NEGLI SPAZI FUNZIONALI CONTINUI

di FABIO CONFORTO (Roma).

Scopo di questo lavoro è di esporre alcune generalizzazioni, che ha ricevuto, del tutto recentemente, il calcolo differenziale assoluto, nell'ambito della analisi funzionale. Si sono occupati di tali argomenti il MOISIL ed, indipendentemente da questi, il MICHAL. Avremo occasione di citare nel seguito i lavori di entrambi. D'altra parte anch'io, nella mia tesi di laurea ed in alcuni lavori pubblicati nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, mi sono occupato di tali questioni e quindi, nel complesso, è sorto un insieme di nozioni e di risultati, che qui appunto mi propongo di svolgere e di coordinare. Giova avvertire fin dal principio che gli spazi funzionali, dei quali è qui questione, sono da intendersi nel senso che un punto generico di uno di questi spazi è determinato da una funzione e le coordinate di tale punto sono i valori che la funzione che lo determina assume, quando la variabile indipendente percorre un determinato intervallo. Sono gli spazi funzionali ispirati dai lavori di VOLTERRA. A questi si contrappongono gli spazi funzionali cosidetti hilbertiani, nei quali fungono da coordinate di un punto generico, i coefficienti dello sviluppo di una funzione in una serie di funzioni ortogonali. Il presente lavoro si occupa solamente degli spazi funzionali del primo tipo, che vengono chiamati continui, perchè le coordinate di un punto generico formano una infinità continua. Io vorrei ancora segnalare come il MOISIL sia stato tratto allo studio degli argomenti, che qui si espongono, da questioni collegantesi alla meccanica dei sistemi continui, il che dimostra non trattarsi qui di una pura generalizzazione formale del calcolo assoluto ordinario.

Ciò posto, veniamo più propriamente alla questione. Noi partiamo dalla considerazione di uno spazio funzionale, cioè di un insieme di funzioni, ciascuna delle quali individua un punto dello spazio funzionale. Più precisamente, si considererà lo spazio formato da tutte le funzioni continue della variabile reale x, definite nell'intervallo:

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ogni funzione rappresenta un punto ed i singoli valori, che assume la funzione, quando la variabile indipendente varia da 0 ad 1, si assumono come le coordinate che individuano tale punto. In modo del tutto analogo si considerano comunemente degli spazi ad n dimensioni, individuando un punto mediante una ennupla di valori:

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n,$$

ciascuna delle quali x rappresenta una delle « coordinate » del punto. Come è nel concetto generale della teoria dei funzionali, all'indice discreto si è solamente sostituita una variabile continua.

È ora noto che nel caso delle varietà riemanniane si sfrutta l'osservazione fondamentale che in un ambiente qualsiasi non preesiste alcuna metrica naturale, ma una se ne determina ogni qualvolta si fissi il valore della distanza elementare fra due punti infinitamente vicini. Il che si fa notoriamente con la introduzione della forma quadratica. Si sottopone poi tutto lo spazio ad un cambiamento di variabili qualsiasi, rispetto al quale è invariante la distanza elementare e costituisce quindi appunto il calcolo differenziale assoluto la ricerca sistematica di tutti gli invarianti rispetto a tali trasformazioni. Il che viene potentemente aiutato dal formalismo ben noto dei tensori covarianti, controvarianti e misti del calcolo assoluto ordinario.

Noi siamo ora nel caso degli spazi funzionali nella medesima situazione e vedremo come la generalizzazione può essere ottenuta. Costruiremo dunque il calcolo differenziale assoluto delle varietà funzionali, dotate di metrica riemanniana.

E come dallo studio delle varietà riemanniane con un numero finito di dimensioni si è passati allo studio delle connessioni affini, altrettanto si potrà fare qui, come ha fatto per primo il MICHAL.

Dividerò questo lavoro in due parti. Nella prima parte mi occuperò della geometria nelle varietà funzionali dotate di metrica, nella seconda delle connessioni affini nel campo delle varietà funzionali.

PARTE PRIMA

1. - Consideriamo dunque l'insieme di tutte le funzioni continue, della variabile reale x, definite nell'intervallo:

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Tale insieme sarà lo spazio funzionale. Ciascuna funzione rappresenterà un punto, le cui coordinate sono rappresentate, come si è detto, dai successivi valori assunti dalla funzione, quando x varia tra 0 ed 1. Denoteremo tale funzione con y^x (1).

(1) Cfr. A. MICHAL: *Affinely Connected Function Space Manifolds*, American Journal of Mathematics, Vol. L, n.° 4, ottobre 1928. Seguiamo in particolare le notazioni del MICHAL, in questa nota, come quelle che danno la maggiore compattezza alle formule.

Introduciamo ora una trasformazione di variabili, che sarà del tipo:

(1) $$y^x = y^x[\overline{y}^t], \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

cioè y^x sarà un funzionale di $\overline{y}^t$, che dipende in particolare dalla variabile x ed è continuo rispetto a tale variabile. Noi ammetteremo anche che y^x sia continuo come funzionale in una certa regione R dello spazio funzionale. Precisamente diremo che y^x è continuo come funzionale in una certa regione R dello spazio quando, fissato un numero $\varepsilon > 0$ qualsiasi, esista un numero δ tale che, essendo Φ^t una qualsiasi funzione in R, sia sempre, ogni volta che:

$$|\overline{y}^t - \Phi^t| < \delta, \qquad |y^x[\overline{y}^t] - y^x[\Phi^t]| < \varepsilon$$

per qualunque t ed x compreso in $0 \vdash\!\dashv 1$, anche $\overline{y}^t$ essendo, ben inteso, in R.

Consideriamo ora la regione funzionale:

(2) $$|\overline{y}^t - \overline{y}^t_0| < M \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

con M numero fisso e $\overline{y}^t_0$ funzione fissa. Ammettiamo che a tale regione corrisponda in virtù di (1) la:

(3) $$|y^x - y^x_0| < N \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

dove y^x_0 corrisponde per la (1) a $\overline{y}^t_0$, come y^x corrisponde alla $\overline{y}^t$, mentre N è un numero fisso.

Per i nostri scopi è necessario, riguardo ad (1), di fare le seguenti ipotesi:

a) Il funzionale $y^x[\overline{y}^t]$ è monodromo, continuo come funzione di x per $0 \leqslant x \leqslant 1$ e continuo come funzionale di $\overline{y}^t$ nella regione funzionale (2).

b) Il funzionale $y^x[\overline{y}^t]$ ha un differenziale nel senso di FRÉCHET [2], cioè della forma:

(4) $$\delta y^x = \delta \overline{y}^x + \int_0^1 {}'y^x_a[\overline{y}^t]\delta \overline{y}^a da$$

con

$$|\delta y^x - \Delta y^x| < \varepsilon \max |\delta \overline{y}^t|$$

ε essendo una quantità che tende a zero con $\max |\delta \overline{y}^t|$.

c) Riguardo al funzionale ${}'y^x_a[\overline{y}^t]$, che è funzione nel senso ordinario di x, a, si assume che esso sia continuo per $0 \leqslant x \leqslant 1$ e per $0 \leqslant a \leqslant 1$ e, come funzionale sia continuo rispetto a $\overline{y}^t$ in $|\overline{y}^t - \overline{y}^t_0| < M$. Si suppone che sia diverso da zero il suo determinante di FREDHOLM, di modo che l'equazione integrale lineare (4) sia risolubile.

Il MICHAL [3] dimostra che l'insieme di tutte le trasformazioni di questo tipo formano un gruppo.

---

[2] Cfr. FRÉCHET: *Sur la notion de différentielle de ligne*, Transactions of the Mathematical Society, Vol. 15 (1914), pag. 139.

[3] Loc. cit., pag. 483.

Bisognerà però ancora aggiungere:

d) La (1) possiede una inversa, univocamente determinata, che denotiamo con

$$\overline{y}^t = \overline{y}^t[y^x] \tag{1'}$$

che in (3) soddisfa alle condizioni analoghe ad *a*), *b*), *c*).

Sarà poi più avanti necessario invocare anche l'esistenza della derivata funzionale di $'y^x_\alpha[\overline{y}^t]$, ed ammetteremo dunque che $'y^x_\alpha[\overline{y}^t]$ nella regione $|\overline{y}^i - \overline{y}^i_0| < M$ possieda il differenziale d'ordine p di FRÉCHET ed assumeremo questo nella forma di VOLTERRA:

$$\delta^p\, 'y^i_\alpha[\overline{y}^t] = \underbrace{\int_0^1\!\!\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{(p)} {}^{p+1}y^i_{\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}[\overline{y}^t]\,\delta\overline{y}^{\beta_1}\delta\overline{y}^{\beta_2}\ldots\delta\overline{y}^{\beta_p}\,d\beta_1\ldots d\beta_p \tag{5}$$

${}^{p+1}y^i_{\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}[\overline{y}^t]$ essendo una funzione simmetrica di $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, continua rispetto ad $i, \alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ e continua come funzionale di $\overline{y}^t$.

In (5), con una convenzione analoga a quella che si fa riguardo agli indici nel calcolo ordinario, si potranno sopprimere i segni di integrale ed i differenziali, norma che sarà seguita costantemente nel seguito e scrivere la (5)

$$\delta^p\, 'y^i_\alpha[\overline{y}^t] = {}^{p+1}y^i_{\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}[\overline{y}^t]\,\delta\overline{y}^{\beta_1}\delta\overline{y}^{\beta_2}\ldots\delta\overline{y}^{\beta_p} \tag{5'}$$

e la (4) diverrà:

$$\delta y^x = \delta\overline{y}^x + 'y^x_\alpha[\overline{y}^t]\,\delta\overline{y}^\alpha. \tag{4'}$$

Risolvendo l'equazione integrale (4) verrà:

$$\delta\overline{y}^x = \delta y^x + '\overline{y}^x_\alpha[y^t]\,\delta y^\alpha \tag{6}$$

$'y^x_\alpha$ e $'\overline{y}^x_\alpha$ sono nuclei coniugati di una medesima equazione integrale e quindi sarà:

$$'y^x_\alpha + '\overline{y}^x_\alpha + 'y^t_\alpha\, '\overline{y}^x_t = 0 \quad (4). \tag{7}$$

2. - Per comodità formale, onde poter scrivere le formule generalizzate, che danno la trasformazione per covarianza e per controvarianza in modo più compatto, converrà ora introdurre una funzione di due variabili $\delta(x, y)$, la quale gode delle seguenti proprietà (5):

---

(4) Cfr. V. VOLTERRA: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 103.

(5) Gli sviluppi successivi si potrebbero stabilire anche senza far ricorso ad una tale funzione. Comunque si può considerare la funzione $\delta(x, y)$ come limite di funzioni note e precisamente si ha:

$$\delta(x, y) = \lim_{h \to \infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-y)^2}.$$

Partendo da questa definizione si possono dimostrare tutte le proprietà elencate; il che le giustifica. In tempi recenti si usa chiamare la funzione $\delta(x, y)$ la « funzione di DIRAC ». La *a*) $\delta(x, y)$ è nulla per ogni coppia di valori tale che $x \neq y$. Non è definita per $x = y$. Si ha per $x \neq y$:

$$\delta(x, y) = \delta(y, x) = 0.$$

b) Si dà invece un significato alla espressione $\int_0^1 \delta(x, y)dx$. Sarà precisamente:

$$\int_0^1 \delta(x, y)dx = \int_0^1 \delta(y, x)dx = \int_0^1 \delta(x, y)dy = \int_0^1 \delta(y, x)dy = 1.$$

c) Se $F(x)$ è una funzione definita tra 0 ed 1, sarà:

$$\int_0^1 F(x)\delta(x, y)dx = F(y)$$

che scriveremo:

$$F^x \delta(x, y) = F^y.$$

d) Si porrà ancora:

$$\int_0^1 \delta(x, y_1)\delta(x, y_2)dx = \delta(y_1, y_2)$$

che scriveremo:

$$\delta(x, y_1)\delta(x, y_2) = \delta(y_1, y_2)$$

e con analoga convenzione di soppressione dell'integrale:

$$\delta(y_1, x_1)\delta(x_1, x_2)\delta(x_2, x_3) \,....\, \delta(x_{n-1}, x_n)\delta(x_n, y_2) = \delta(y_1, y_2).$$

Finalmente

$$\underbrace{\int_0^1\int_0^1 .... \int_0^1}_{(n)} \delta(y_1, x_1)\delta(y_2, x_2) \,....\, \delta(y_n, x_n)dx_1 dx_2 \,....\, dx_n = 1$$

e

$$F^{x_1 x_2 \dots x_n}\delta(y_1, x_1)\delta(y_2, x_2) \,....\, \delta(y_n, x_n) = F^{y_1 y_2 \dots y_n}.$$

Le (4), (6), (7) con la introduzione di tale funzione assumono la forma:

(4*a*) $$\delta y^x = [{}'y_\alpha^x + \delta(\alpha, x)]\delta \overline{y}^\alpha$$

(5*a*) $$\delta \overline{y}^x = [{}'\overline{y}_\alpha^x + \delta(\alpha, x)[\delta y^\alpha$$

(7*a*) $$\delta(y_1, y_2) = [{}'y_{y_1}^x[\overline{y}^t] + \delta(x, y_1)][{}'\overline{y}_x^{y_2}[y^t] + \delta(x, y_2)].$$

Poniamo poi:

(8) $$\begin{cases} {}'y_\alpha^x[\overline{y}^t] + \delta(\alpha, x) = \left(\dfrac{\delta y^x}{\delta \overline{y}^\alpha}\right) \\ {}'\overline{y}_\alpha^x[y^t] + \delta(\alpha, x) = \left(\dfrac{\delta \overline{y}^x}{\delta y^\alpha}\right). \end{cases}$$

---

sua introduzione devesi però a KIRCHOFF. Cfr.: *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, in Gesammelte Abhandlungen Nachtrag, Lipsia, 1891, pag. 26. Di tale funzione fecero uso anche MAXWELL, HEAVISIDE, GIORGI.

È da avvertire che le due quantità a destra nella (8) non sono quozienti; esse sono semplicemente simboli, che abbreviano quanto sta a sinistra nella (8). La (7a) mediante la (8), a meno di inessenziali cambiamenti di variabile, diverrà:

(9) $$\left(\frac{\delta y^{x_1}}{\delta \bar{y}^{\alpha}}\right)\left(\frac{\delta \bar{y}^{\alpha}}{\delta y^{x_2}}\right) = \delta(x_1, x_2).$$

3. - Ciò premesso, introduciamo nel nostro spazio funzionale una metrica fissando la distanza fra le due funzioni y^x e $y^x + \delta y^x$. Assumeremo questa distanza della forma:

(10) $$ds^2 = [a_{\xi_1\xi_2}[y^x] + \delta(\xi_1, \xi_2)]\delta y^{\xi_1}\delta y^{\xi_2}.$$

Il ds^2 della forma (10) si dirà un ds^2 di seconda specie ([6]). Si assuma

$$a_{\xi_1\xi_2}[y^x] = a_{\xi_2\xi_1}[y^x].$$

a è continuo rispetto a ξ_1 e ξ_2 e come funzionale.

Andiamo ora a chiarire la nozione di tensore ed a costruire un'algebra tensoriale. Ed innanzi tutto parliamo della nozione di invariante. Parleremo per brevità dello « spazio y » e dello « spazio $\bar{y}$ ». Consideriamo una funzione f del punto generico dello spazio y. Denoteremo con $\bar{f}$ la funzione del punto generico dello spazio $\bar{y}$, che in tale spazio $\bar{y}$ corrisponde a f.

Se avviene che si abbia (y^x e $\bar{y}^x$ essendo legate dalla (1)):

$$f[y^x] = \bar{f}[\bar{y}^t]$$

la funzione f si dirà un invariante.

Esprimiamo che il ds^2 nella forma (10) è un invariante. In virtù della (8) dalla (4a) si ha:

(11) $$\delta y^{\xi_1} = \left(\frac{\delta y^{\xi_1}}{\delta \bar{y}^{\eta_1}}\right)\delta \bar{y}^{\eta_1}, \qquad \delta y^{\xi_2} = \left(\frac{\delta y^{\xi_2}}{\delta \bar{y}^{\eta_2}}\right)\delta \bar{y}^{\eta_2}.$$

([6]) Converrà scrivere una volta l'espressione (10) esplicitamente. Si ha:

$$ds^2 = \int_0^1 [\delta y(\xi)]^2 d\xi + \int_0^1\int_0^1 a[y(x), \xi_1, \xi_2]\delta y(\xi_1)\delta y(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2.$$

La denominazione « ds^2 di seconda specie » è stata introdotta dal MOISIL. Cfr.: *La mécanique analytique des systèmes continus*, Thèse présentées à la faculté des sciences de Bucarest. Paris, Gauthier-Villars, 1929. Si chiama in contrapposto « ds^2 di prima specie » il ds^2 della forma:

$$ds^2 = \int_0^1\int_0^1 a[y(x), \xi_1, \xi_2]\delta y(\xi_1)\delta y(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2.$$

Il caso del ds^2 di prima specie presenta notevoli difficoltà, perchè, come si vedrà in seguito, ovunque il ds^2 di seconda specie presenta equazioni integrali di seconda specie, il ds^2 di prima specie presenterebbe equazioni integrali di prima specie. È questa anche l'origine

Sostituendo in (10) viene:

$$ds^2 = [\bar{a}_{\eta_1\eta_2}[\bar{y}^t] + \delta(\eta_1, \eta_2)]\delta\bar{y}^{\eta_1}\delta\bar{y}^{\eta_2}$$

avendo posto:

$$\bar{a}_{\eta_1\eta_2}[\bar{y}^t] + \delta(\eta_1, \eta_2) = [a_{\xi_1\xi_2}[y^x] + \delta(\xi_1, \xi_2)]\left(\frac{\delta y^{\xi_1}}{\delta \bar{y}^{\eta_1}}\right)\left(\frac{\delta y^{\xi_2}}{\delta \bar{y}^{\eta_2}}\right). \tag{12}$$

La (12) ci dà la legge di trasformazione di $a_{\xi_1\xi_2}[y^x] + \delta(\xi_1, \xi_2)$. Dalla (12) si ricava immediatamente:

$$[a_{\lambda_1\lambda_2}[y^x] + \delta(\lambda_1, \lambda_2)] = [\bar{a}_{\eta_1\eta_2}[\bar{y}^t] + \delta(\eta_1, \eta_2)]\left(\frac{\delta \bar{y}^{\eta_1}}{\delta y^{\lambda_1}}\right)\left(\frac{\delta \bar{y}^{\eta_2}}{\delta y^{\lambda_2}}\right). \tag{12'}$$

Ciò si dimostra, con completa analogia con quanto si fa nel calcolo assoluto ordinario, moltiplicando ambo i membri della (12) per:

$$\left(\frac{\delta \bar{y}^{\eta_1}}{\delta y^{\lambda_1}}\right)\left(\frac{\delta \bar{y}^{\eta_2}}{\delta y^{\lambda_2}}\right)$$

ed integrando due volte, il che è già implicito, giusta le nostre convenzioni, nella moltiplicazione. La (9) e le proprietà della funzione $\delta(x, y)$ permettono di ricavare senz'altro la (12').

Associamo ora alle (11) le

$$\delta\bar{y}^{\lambda_1} = \left(\frac{\delta \bar{y}^{\lambda_1}}{\delta y^{\xi_1}}\right)\delta y^{\xi_1}, \qquad \delta\bar{y}^{\lambda_2} = \left(\frac{\delta \bar{y}^{\lambda_2}}{\delta y^{\xi_2}}\right)\delta y^{\xi_2}. \tag{11'}$$

Esse sono valide in virtù della seconda delle (8) e della (6*a*). Esse si ricavano però anche moltiplicando la (11) rispettivamente per $\left(\frac{\delta \bar{y}^{\lambda_1}}{\delta y^{\xi_1}}\right)$ e $\left(\frac{\delta \bar{y}^{\lambda_2}}{\delta y^{\xi_2}}\right)$ e tenendo conto della (9) e delle proprietà della funzione $\delta(x, y)$. Consideriamo ora le due coppie di relazioni: (11) e (11'); (12) e (12').

Assumeremo l'espressione δy^{ξ_1} come un tensore controvariante ad 1 indice, $a_{\lambda_1\lambda_2}[y^x] + \delta(\lambda_1, \lambda_2)$ come un tensore covariante a 2 indici. Ciò posto è immediato come si possa estendere nel modo più opportuno la nozione di un tensore ad un numero qualunque di indici (covarianti e controvarianti). Noi lo faremo secondo queste due definizioni (7):

Definizione I. - Dato un funzionale, funzione altresì di un numero finito di parametri $a^{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}[y^x]$, diremo che di fronte ad un cambiamento di variabili del tipo (1) e (1') esso si trasforma per controvarianza, quando nel sistema trasformato ad $a^{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}[y^x]$ corrisponde il funzionale $\bar{a}^{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}[\bar{y}^t]$, funzione di un egual

---

della denominazione. Cfr. CONFORTO: *Metrica e fondamenti di calcolo differenziale assoluto in uno spazio funzionale continuo*, Rend. Lincei, Vol. XII, serie 6ª, fasc. 11, dicembre 1930.

(7) Cfr. MOISIL, loc. cit. e *Sur les variétés fonctionnelles*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 187, pag. 796, novembre 1928; cfr., altresì, CONFORTO: *Formalismo matematico, ecc.*, Rend. Lincei, vol. XIII, serie 6ª, fasc. 8, aprile 1931.

numero di parametri, che si deduce dal funzionale primitivo con la formula:

$$\bar{a}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}[\bar{y}^t]=a^{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}[y^x]\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_1}}{\delta y^{\xi_1}}\right)\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_2}}{\delta y^{\xi_2}}\right)\ldots\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_n}}{\delta y^{\xi_n}}\right).$$

Da questa formula, moltiplicando per $\left(\frac{\delta y^{\eta_1}}{\delta\bar{y}^{\lambda_1}}\right)\left(\frac{\delta y^{\eta_2}}{\delta\bar{y}^{\lambda_2}}\right)\ldots\left(\frac{\delta y^{\eta_n}}{\delta\bar{y}^{\lambda_n}}\right)$ ed integrando, si ricava inversamente:

$$a^{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n}[y^x]=\bar{a}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}[\bar{y}^t]\left(\frac{\delta y^{\eta_1}}{\delta\bar{y}^{\lambda_1}}\right)\left(\frac{\delta y^{\eta_2}}{\delta\bar{y}^{\lambda_2}}\right)\ldots\left(\frac{\delta y^{\eta_n}}{\delta\bar{y}^{\lambda_n}}\right).$$

Definizione II. - Dato il funzionale, funzione di un numero finito di parametri $a_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}[y^x]$, diciamo che di fronte ad un cambiamento di variabili del tipo (1) e (1') esso si trasforma per covarianza, quando nel sistema trasformato ad $a_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}[y^x]$, corrisponde il funzionale $a_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}[\bar{y}^t]$ funzione di un egual numero di parametri, che si deduce dal primitivo con la formula:

$$\bar{a}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}[\bar{y}^t]=a_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}[y^x]\left(\frac{\delta y^{\xi_1}}{\delta\bar{y}^{\lambda_1}}\right)\left(\frac{\delta y^{\xi_2}}{\delta\bar{y}^{\lambda_2}}\right)\ldots\left(\frac{\delta y^{\xi_n}}{\delta\bar{y}^{\lambda_n}}\right).$$

Da questa formula, moltiplicando per $\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_1}}{\delta y^{\eta_1}}\right)\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_2}}{\delta y^{\eta_2}}\right)\ldots\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_n}}{\delta y^{\eta_n}}\right)$, si deduce:

$$a_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n}[y^x]=\bar{a}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}[\bar{y}^t]\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_1}}{\delta y^{\eta_1}}\right)\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_2}}{\delta y^{\eta_2}}\right)\ldots\left(\frac{\delta\bar{y}^{\lambda_n}}{\delta y^{\eta_n}}\right).$$

È ovvio come si possono introdurre dei tensori misti.

Notevole è che $a_{\lambda_1\lambda_2}[y^x]+\delta(\lambda_1,\lambda_2)$, che determina la metrica, sia un tensore: $a_{\lambda_1\lambda_2}[y^x]$ stesso non è un tensore.

Con le definizioni poste si possono anche agevolmente fare tutte le operazioni d'innalzamento e di abbassamento degli indici, abituali nel calcolo assoluto ordinario. In particolare ad ogni tensore covariante o controvariante si può dare una forma controvariante e covariante. Per i tensori controvarianti basta moltiplicare per $a_{\lambda_1\lambda_2}[y^x]+\delta(\lambda_1,\lambda_2)$ o per un prodotto di fattori simili ed integrare. Per i tensori covarianti ha l'ufficio analogo $a'^{\lambda_1\lambda_2}[y^x]+\delta(\lambda_1,\lambda_2)$, essendo $a'^{\lambda_1\lambda_2}[y^x]$ il nucleo coniugato di $a_{\lambda_1\lambda_2}[y^x]$. $a'^{\lambda_1\lambda_2}[y^x]+\delta(\lambda_1,\lambda_2)$ è un tensore controvariante e la sua forma covariante è $a_{\lambda_1\lambda_2}[y^x]+\delta(\lambda_1,\lambda_2)$, come con le nostre formule è agevolissimo dimostrare ([8]).

4. - Passiamo ora allo studio delle varietà funzionali, dotate di metrica di tipo riemanniano. Supporremo in questo caso, per qualsiasi δy^{ξ_1}, sempre:

$$ds^2>0.$$

Inoltre ammettiamo che $a_{\xi_1\xi_2}[y^x]$ ammetta derivate funzionali nella forma di VOLTERRA fino all'ordine necessario.

([8]) Cfr. F. CONFORTO, loc. cit. in ([7]).

Sia ora $\psi^\lambda[y^x]$ un qualsiasi vettore controvariante. Definiremo come suo modulo la quantità:

$$M^2=[a_{\xi_1\xi_2}[y^x]+\delta(\xi_1,\xi_2)]\psi^{\xi_1}[y^x]\psi^{\xi_2}[y^x]. \tag{13}$$

Sia y^x un qualunque punto dello spazio funzionale; $y+\delta_1 y^x$ e $y+\delta_2 y^x$ due punti infinitamente vicini. Chiameremo θ l'angolo formato delle due direzioni:

$$y^x,\ y^x+\delta_1 y^x \quad \text{e} \quad y^x,\ y^x+\delta_2 y^x.$$

Il coseno di tale angolo sarà definito dalla formula:

$$\cos\theta=\frac{[a_{\xi_1\xi_2}[y^x]+\delta(\xi_1,\xi_2)]\delta_1 y^{\xi_1}\delta_2 y^{\xi_2}}{\{[a_{\xi_1\xi_2}[y^x]+\delta(\xi_1,\xi_2)]\delta_1 y^{\xi_1}\delta_1 y^{\xi_2}\}\{[a_{\xi_1\xi_2}[y^x]+\delta(\xi_1,\xi_2)]\delta_2 y^{\xi_1}\delta_2 y^{\xi_2}\}}.$$

Si verifica con facilità che si ha sempre $|\cos\theta|\leqslant 1$.

Si può ora generalizzare la nozione di parallelismo di LEVI-CIVITA ([9]). Se y^x è un punto qualsiasi dello spazio funzionale ed in questo si ha un vettore controvariante $\psi^\lambda[y^x]$, si consideri il punto infinitamente vicino $y^x+\delta y^x$. Si chiamerà vettore parallelo al vettore $\psi^\lambda[y^x]$ nel punto $y^x+\delta y^x$, un vettore dato da $\psi^\lambda[y^x]+\delta\psi^\lambda[y^x]$, dove è

$$\delta\psi^\lambda[y^x]=-\Gamma^\lambda_{\tau\sigma}[y^x]\psi^\tau[y^x]\delta y^\sigma. \tag{14}$$

(Si integri rispetto a τ e σ). Imponendo che tale trasporto parallelo non alteri il modulo del vettore, si riesce a dimostrare che $\Gamma^\lambda_{\tau\sigma}[y^x]$ è completamente determinato da $a_{\xi_1\xi_2}[y^x]$. Si supporrà $\Gamma^\lambda_{\tau\sigma}[y^x]$ funzione simmetrica di τ e σ.

Basterà perciò con riferimento alla (13) ed alla (14) annullare la variazione che subisce M^2 quando si passa da y^x a $y^x+\delta y^x$. Si avrà:

$$\begin{aligned}\delta M^2=0=a'_{\xi_1\xi_2\xi_3}[y^x]\psi^{\xi_1}[y^x]\psi^{\xi_2}[y^x]\delta y^{\xi_3}-&\\ -\psi^\lambda[y^x]\psi^\tau[y^x]\delta y^\sigma\{\Gamma^{\xi_2}_{\tau\sigma}[y^x][a_{\lambda\xi_2}[y^x]+\delta(\lambda,\xi_2)]\}-&\\ -\psi^\lambda[y^x]\psi^\tau[y^x]\delta y^\sigma\{\Gamma^{\xi_1}_{\tau\sigma}[y^x][a_{\xi_1\lambda}[y^x]+\delta(\xi_1,\lambda)]\}.&\end{aligned} \tag{15}$$

Poniamo in generale:

$$G_{\tau\sigma\lambda}[y^x]=\Gamma^{\xi_1}_{\tau\sigma}[y^x][a_{\xi_1\lambda}[y^x]+\delta(\xi_1,\lambda)] \tag{16}$$

$G_{\tau\sigma\lambda}[y^x]$ sarà simmetrico rispetto a τ e σ e la (15) sarà:

$$a'_{\xi_1\xi_2\xi_3}[y^x]-G_{\xi_3\xi_2\xi_1}[y^x]-G_{\xi_1\xi_2\xi_3}[y^x]=0$$

e quindi, per ragioni di simmetria, segue:

$$G_{\xi_1\xi_2\lambda}[y^x]=\frac{1}{2}\{a'_{\xi_1\lambda\xi_2}[y^x]+a'_{\xi_2\lambda\xi_1}[y^x]-a'_{\xi_1\xi_2\lambda}[y^x]\}.$$

Sono la generalizzazione dei simboli di CHRISTOFFEL ([10]).

([9]) Cfr. CONFORTO: *Parallelismo negli spazi funzionali continui*, Rend. Acc. Lincei, Vol. XIII, serie 6ª, fasc. 3, febbraio 1931.

([10]) Cfr. MICHAL, loc. cit., pag. 511; MOISIL, Thèses cit. in ([6]), pag. 52; CONFORTO, loc. cit. in ([9]).

Il parallelismo così generalizzato conserva gli angoli. Dato il funzionale G si ricava il funzionale Γ attraverso la (16), che è una equazione integrale di FREDHOLM di seconda specie. Nell'ipotesi che il determinante di FREDHOLM di $a_{\xi_1\xi_2}[y^x]$ sia diverso da zero, si potrà dunque ricavare Γ. Le $a_{\xi_1\xi_2}[y^x]$ determinano dunque le $\Gamma^{\lambda}_{\xi_1\xi_2}[y^x]$, le quali però non risultano tensori.

Una linea nello spazio funzionale sarà data da una relazione $y=y^x(s)$, quando s varia tra s_0 ed s_1. Si potrà dare ad s il significato di arco. Il vettore unitario tangente in un punto qualsiasi della linea, corrispondentemente al valore s del parametro, sarà dato da:

$$\psi[y^x;\, s]=\frac{\dfrac{\partial y^x(s)}{\partial s}}{[a_{\xi_1\xi_2}[y^x(s)]+\delta(\xi_1,\xi_2)]\dfrac{\partial y^{\xi_1}(s)}{\partial s}\dfrac{\partial y^{\xi_2}(s)}{\partial s}}. \tag{17}$$

La lunghezza della linea dal punto s_0 al punto s_1, risulterà definita da:

$$L=\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{[a_{\xi_1\xi_2}[y^x(s)]+\delta(\xi_1,\xi_2)]\frac{\partial y^{\xi_1}(s)}{\partial s}\frac{\partial y^{\xi_2}(s)}{\partial s}}\,ds \tag{18}$$

Se s ha il significato di arco, la quantità nella (18) sotto il radicale risulta evidentemente uguale alla unità. Si possono poi considerare le linee autoparallele. Dalla (14) e dalla (17) risulta per tali linee:

$$\frac{\partial^2 y^x(s)}{\partial s^2}+\Gamma^{\lambda}_{\tau\sigma}[y^x(s)]\frac{\partial y^{\tau}(s)}{\partial s}\frac{\partial y^{\sigma}(s)}{\partial s}=0. \tag{19}$$

È un'equazione integro-differenziale.

Tale equazione coincide con l'equazione integro-differenziale delle linee geodetiche. Basta riferirsi alla (18) e trovare la corrispondente equazione del problema variazionale. Si ricade così sulla (19) ([11]).

In un caso particolare la (19) si riduce ad una equazione alle derivate parziali. È il caso in cui sia:

$$ds^2=\delta(\xi_1,\xi_2)\delta y^{\xi_1}\delta y^{\xi_2}=\int_0^1\!\!\int_0^1\delta(\xi_1,\xi_2)\delta y^{\xi_1}\delta y^{\xi_2}d\xi_1 d\xi_2=\int_0^1[\delta y^{\xi_1}]^2 d\xi_1.$$

In tal caso la (19) si riduce semplicemente a:

$$\frac{\partial^2 y^x(s)}{\partial s^2}=0$$

che integrata dà:

$$y^x(s)=\Phi(x)+s\Psi(x)$$

con $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ funzioni arbitrarie. Lo spazio in tale caso si può chiamare euclideo, le autoparallele e le geodetiche sono le rette. Le $\Gamma^{\lambda}_{\tau\sigma}[y^x]$ sono tutte nulle.

([11]) Cfr. MICHAL, loc. cit., pag. 517.

5. - Riprendiamo la formula (14)

$$\delta\psi^\lambda[y^x] = -\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}[y^x]\psi^\tau[y^x]\delta y^\sigma. \tag{14}$$

Ad essa corrisponderà nello spazio delle $\overline{y}$ la

$$\delta\overline{\psi}^\lambda[\overline{y}^x] = -\overline{\Gamma}^\lambda_{\sigma\tau}[\overline{y}^x]\overline{\psi}^\tau[\overline{y}^x]\delta\overline{y}^\sigma. \tag{14'}$$

Tenendo conto che è:

$$\psi^\lambda[y^x] = \overline{\psi}^{\xi_1}[\overline{y}^x]\left(\frac{\delta y^\lambda}{\delta\overline{y}^{\xi_1}}\right)$$

$$\delta y^\sigma = \left(\frac{\delta y^\sigma}{\delta\overline{y}^{\xi_2}}\right)\delta\overline{y}^{\xi_2}$$

sostituendo tali espressioni nella (14) tenendo conto della (14') e del fatto che si è supposta la derivabilità funzionale di $'y^x_\alpha[\overline{y}^t]$ (cfr. paragr. 1), si trova la relazione che lega $\overline{\Gamma}^\lambda_{\tau\sigma}[\overline{y}^t]$ e $\Gamma^\lambda_{\tau\sigma}[y^x]$, relazione che dimostra non essere il funzionale Γ un tensore. La relazione è la seguente ([12]):

$$\begin{aligned}''y^i_{\alpha\beta}[\overline{y}^t] = \overline{\Gamma}^i_{\alpha\beta}[\overline{y}^t] + \overline{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta}\,'y^i_\sigma[\overline{y}^t] - \Gamma^i_{\alpha\beta}[y^x] - \Gamma^i_{\sigma\beta}[y^x]\,'y^\sigma_\alpha[\overline{y}^t) -\\ - \Gamma^i_{\alpha\sigma}[y^x]\,'y^\sigma_\beta[\overline{y}^t] - \Gamma^i_{\sigma\tau}[y^x]\,'y^\sigma_\alpha[\overline{y}^t]\,'y^\tau_\beta[\overline{y}^t].\end{aligned} \tag{20}$$

Da questa relazione però, tal quale come nell'ordinario caso delle varietà riemanniane, è possibile ricavare un tensore, scrivendo le condizioni di integrabilità. Queste condizioni di integrabilità vengono a dire senz'altro che la espressione

$$'\Gamma^i_{\alpha\beta i\gamma}[y^x] - {}'\Gamma^i_{\alpha\gamma i\beta}[y^x] + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}[y^x]\Gamma^i_{\sigma\gamma}[y^x] - \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}[y^x]\Gamma^i_{\sigma\beta}[y^x] = H^i_{\alpha\beta\gamma}[y^x] \tag{21}$$

è un tensore a tre indici di covarianza ed un indice di controvarianza. È l'analogo del tensore di RIEMANN, per le varietà ad un numero finito di dimensioni. Si può del resto arrivare a questo tensore, anche partendo da un altro punto di vista, che ne mette in luce il suo significato geometrico. Innanzi tutto, fissato nello spazio funzionale un punto qualsiasi y^x e spiccati da questo due vettori infinitesimi $\delta_1 y^x$ e $\delta_2 y^x$, spostando per parallelismo $\delta_1 y^x$ lungo $\delta_2 y^x$ e $\delta_2 y^x$ lungo $\delta_1 y^x$, si giunge ad un medesimo punto. Spostando infatti $\delta_1 y^x$ parallelamente lungo $\delta_2 y^x$, ricordando la formula (14) si arriva al punto:

$$y^x + \delta_1 y^x + \delta_2[y^x + \delta_1 y^x] = y^x + \delta_1 y^x + \delta_2 y^x - \Gamma^x_{\xi_1\xi_2}[y^x]\delta_1 y^{\xi_1}\delta_2 y^{\xi_2}.$$

Spostando viceversa $\delta_2 y^x$ parallelamente lungo $\delta_1 y^x$ si arriva al punto:

$$y^x + \delta_2 y^x + \delta_1 y^x - \Gamma^x_{\xi_1\xi_2}[y^x]\delta_2 y^{\xi_1}\delta_1 y^{\xi_2}.$$

Cambiando opportunamente le variabili di integrazione e ricordando la simmetria di $\Gamma^x_{\xi_1\xi_2}[y^x]$ si scorge senz'altro che tali punti coincidono. Adunque si può parlare di parallelogrammi infinitesimi. Orbene, per arrivare al tensore generalizzato

([12]) Cfr. MICHAL, loc. cit., pag. 495.

di RIEMANN, basta spostare un vettore controvariante parallelamente a se stesso lungo un tale parallelogramma infinitesimo. Si arriva così ad una formula che deve considerarsi come la estensione della formula di PÉRÈS, nel calcolo differenziale assoluto ordinario.

Precisamente si ha, se $\delta_1 s$ e $\delta_2 s$ sono le due distanze da y^x a $y^x+\delta_1 y^x$ e da y^x a $y^x+\delta_2 y^x$, indicando con α l'angolo formato da queste due direzioni e definendo mediante $\Delta S=\delta_1 s\delta_2 s$ sen α l'area del parallelogramma infinitesimo

$$(22) \qquad \frac{\Delta\psi^\lambda[y^x]}{\Delta S}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\, H^\lambda_{\xi_3\xi_2\xi_1}\psi^{\xi_3}[y^x]\,\frac{\delta_1 y^{\xi_1}}{\delta_1 s}\,\frac{\delta_2 y^{\xi_2}}{\delta_2 s} \qquad (^{13})$$

ove con $\Delta\psi^\lambda[y^x]$ si è chiamato il vettore controvariante che si ottiene formando la differenza fra il vettore assunto da $\psi^\lambda[y^x]$ dopo aver percorso il ciclo ed il suo valore primitivo.

Il tensore di RIEMANN è adunque il tensore di curvatura.

PARTE SECONDA

1. - Ci occuperemo in questa seconda parte della estensione alle varietà funzionali del concetto di connessione affine. Tale estensione devesi interamente al MICHAL, la cui memoria fondamentale in questo campo è la più volte citata: *Affinely Connected Function Space Manifolds* nell'American Journal of Mathematics del 1928. In note successive, che citeremo in seguito, il MICHAL ha molto generalizzato le posizioni primitive.

È noto che cosa si intenda per connessione affine nel caso n-dimensionale. Passando allo spazio funzionale, ancora qui potremo partire dall'insieme di tutte le funzioni continue della variabile reale x, definite tra 0 ed 1. Potremo ancora qui introdurre il cambiamento di variabili del tipo (1) e (1') del paragr. 1 della prima parte, con le proprietà *a*), *b*), *c*), e la proprietà della esistenza della derivata funzionale nella forma di VOLTERRA per $'y^i_\alpha[\overline{y}^t]$ e $'\overline{y}^i_\alpha[y^x]$. In generale si potranno trasportare senz'altro tutti gli sviluppi dei paragr. 1, 2 e 3 della prima parte. In particolare le medesime saranno le formule, che danno le trasformazioni per covarianza o per controvarianza. Ciò che non sarà più possibile sarà di passare da un tensore controvariante ad una sua forma covariante, perchè non esiste più il tensore $a_{\xi_1\xi_2}[y^x]+\delta(\xi_1, \xi_2)$, che determinava la metrica nello spazio funzionale. Tensori controvarianti e tensori covarianti sono due enti completamente distinti.

Esiste invece ciò che si chiama una connessione, vale a dire un funzionale $H^i_{\alpha\beta}[y^x]$, funzione altresì di tre variabili i, α, β in modo che, in corrispon-

---

(13) Cfr. CONFORTO, loc. cit. in (9).

denza ad ogni tensore controvariante $\xi^i[y^x]$ e di ogni spostamento δy^β, si possa calcolare una variazione $\delta\xi^i[y^x]$ mediante la formula:

$$\delta\xi^i[y^x] = -H^i_{\alpha\beta}[y^x]\xi^\alpha[y^x]\delta y^\beta. \tag{1}$$

Una analoga legge varrà per i tensori covarianti.

$H^i_{jk}[y^x]$ può non essere funzione simmetrica di j e k. In tal caso si può porre:

$$H^i_{jk}[y^x] = \Gamma^i_{jk}[y^x] + \Omega^i_{jk}[y^x]$$

con:

$$\Gamma^i_{jk}[y^x] = \Gamma^i_{kj}[y^x] \quad \text{e} \quad \Omega^i_{jk}[y^x] = -\Omega^i_{kj}[y^x].$$

$\Omega^i_{jk}[y^x]$ si chiama ancora qui la torsione.

In un primo tempo ci si può limitare, col MICHAL, a considerare il caso $\Omega^i_{jk}[y^x] \equiv 0$, il caso cioè delle connessioni simmetriche. La (1) diviene:

$$\delta\xi^i[y^x] = -\Gamma^i_{\alpha\beta}[y^x]\xi^\alpha[y^x]\delta y^\beta. \tag{2}$$

Da questa relazione allora, tal quale come nel paragr. 5 della prima parte, si deduce che $\Gamma^i_{\alpha\beta}[y^x]$ non è un tensore, ma si trasforma secondo la (20) della prima parte. Le condizioni di integrabilità di tale equazione (20) esprimono che il funzionale definito da (21) nella prima parte è un tensore. È il tensore di curvatura. Tutto ciò si riporta al nostro caso.

Consideriamo ora una curva del nostro spazio funzionale. La sua equazione, che può dirsi parametrica, sarà del tipo:

$$y^i = y^i(s). \tag{3}$$

Non si può però qui supporre che s sia l'arco, perchè non ha senso parlare di lunghezza nel nostro spazio. s è solamente un parametro e la (3) è una delle infinite possibili rappresentazioni della nostra curva, ottenuta mediante il parametro s. Diremo la (3) una curva parametrizzata.

Dato un vettore controvariante $\xi^i[y^x]$ per uno spostamento parallelo lungo tale curva si avrà per la (2):

$$\frac{\partial\xi^i[y^x(s)]}{\partial s} = -\Gamma^i_{\alpha\beta}[y^x(s)]\xi^\alpha[y^x(s)]\,\frac{\partial y^\beta(s)}{\partial s}.$$

È questa una equazione integro-differenziale del tipo:

$$\frac{\partial\Phi^i(s)}{\partial s} = \Psi^i_\alpha(s)\,\Phi^\alpha(s).$$

Sotto condizioni abbastanza poco restrittive si potrà conoscere $\Phi^i(s)$ per s qualunque, quando sia dato un valore iniziale $\Phi^i(s_0)$. Si può ad esempio sviluppare la soluzione in serie e calcolare le successive derivate, mediante l'equazione stessa ([14]). Si riesce così a costruire in ogni punto della curva il vettore paral-

([14]) Cfr. MICHAL, loc. cit., pag. 494.

lelo al vettore dato ad arbitrio nella origine (corrispondente al valore s_0 del parametro) della curva.

Consideriamo ora l'equazione integro-differenziale del tipo:

$$\frac{\partial^2 y^i(t)}{\partial t^2}+\Lambda^i_{\alpha\beta}[y^\lambda(t)]\frac{\partial y^\alpha(t)}{\partial t}\frac{\partial y^\beta(t)}{\partial t}=0.$$

La questione che qui si pone è di ricercare quando una tale equazione sia invariante rispetto a trasformazioni del tipo (1) e (1') della prima parte. Si trova che la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che $\Lambda^i_{\alpha\beta}[y^x]$ si trasformi con la legge data dalla (20) della prima parte. Per questo risultato, certamente sarà invariante l'equazione:

$$\frac{\partial^2 y^i(t)}{\partial t^2}+\Gamma^i_{\alpha\beta}[y^\lambda(t)]\frac{\partial y^\alpha(t)}{\partial t}\frac{\partial y^\beta(t)}{\partial t}=0$$

che si chiamerà l'equazione integro-differenziale delle geodetiche parametrizzate o dei « cammini » parametrizzati dello spazio funzionale, dotato di connessione affine. Anche tale equazione si può integrare, sviluppando in serie la soluzione e calcolando i successivi coefficienti mediante l'equazione stessa. Accenniamo al calcolo ([15]). Potremo porre:

$$y^i(t)=y^i(t_0)+\left(\frac{\partial y^i(t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 y^i(t)}{\partial t^2}\right)_{t=t_0}(t-t_0)^2+\ldots.$$

Supponiamo che per $t=t_0$ sia:

$$q^i=y^i(t_0),\qquad p^i=\left(\frac{\partial y^i(t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}$$

dove p^i e q^i sono funzioni arbitrarie. Allora la equazione ci fornirà $\left(\frac{\partial^2 y^i(t)}{\partial t^2}\right)_{t=t_0}$ e derivando tale equazione si potrà successivamente calcolare ogni derivata per il valore di t, $t=t_0$. Precisamente la $\left(\frac{\partial^2 y^i(t)}{\partial t^2}\right)_{t=t_0}$ risulta dalla equazione come una forma quadratica omogenea nella p^i. Analogamente le derivate di ordine superiore saranno forme polinomiali di grado m sempre nella p^i. Si avrà dunque lo sviluppo:

$$y^i(t)=q^i+p^i(t-t_0)-\frac{1}{2!}\Gamma^i_{\alpha\beta}[q^\lambda]p^\alpha p^\beta(t-t_0)^2-\frac{1}{3!}\Gamma^i_{\alpha\beta\gamma}[q^\lambda]p^\alpha p^\beta p^\gamma(t-t_0)^3\ldots.$$

Si riescirà così a costruire la soluzione, la quale sotto certe condizioni esisterà e sarà unica ([16]).

Successivamente ([17]) il MICHAL ha alquanto generalizzato le sue posizioni, rima-

---

([15]) Cfr. MICHAL, loc. cit., pagg. 501-502.

([16]) Per le forme polinomiali di grado m, le quali esprimano le successive derivate di $y^i(t)$ per $t=t_0$, cfr., anche, MICHAL: *Geodesic coordinates of order r*, Bulletin of the American Mathematical Society, agosto 1930, pagg. 541-546.

([17]) Cfr. MICHAL: *Differential Geometries of function space*, Proceedings of the National Academy of Sciences, gennaio 1930, pagg. 88-94.

nendo sempre nel campo generale delle connessioni affini. Precisamente riprendiamo le formule (4) e (4′) della prima parte. Il MICHAL suppone che al posto di queste formule i differenziali δy^x e $\delta \overline{y}^t$ si esprimano mediante formule del tipo seguente ([18]):

$$\delta y^x = {}_x y^x \delta \overline{y}^{(x)} + {}' y_t^x \delta \overline{y}^t \tag{3}$$

$$\delta \overline{y}^t = {}_t \overline{y}^t \delta y^{(t)} + {}' \overline{y}_\lambda^t \delta y^\lambda . \tag{3'}$$

Si suppongono naturalmente diverse da zero le funzioni ${}_x y^x$ e ${}_t \overline{y}^t$. Inoltre deve supporsi diverso da zero il determinante di FREDHOLM di $y_t^x / {}_x y^x$. Sono le (3) e (3′) trasformazioni nello spazio funzionale di terza specie, perchè dovendo risolvere la (3) e la (3′), considerandole come equazioni integrali, bisogna risolvere delle equazioni integrali di terza specie.

Per trovare quale sia la definizione più opportuna per le trasformazioni di covarianza e di controvarianza, conviene ancora qui partire dallo spazio funzionale dotato di metrica. Precisamente partiremo da ciò che si potrebbe chiamare un « ds^2 di terza specie ». Prendiamo:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a_{\alpha\beta}[y^x] \delta y^\alpha \delta y^\beta + a_\alpha [y^x] (\delta y^\alpha)^2 = \\ &= [a_{\alpha\beta}[y^x] + a_\alpha [y^x] \delta(\alpha, \beta)] \delta y^\alpha \delta y^\beta . \end{aligned} \tag{4}$$

Se nello spazio delle $\overline{y}$ si ha corrispondentemente:

$$ds^2 = [\overline{a}_{\alpha\beta}[\overline{y}^t] + \overline{a}_\alpha [\overline{y}^t] \delta(\alpha, \beta)] \delta \overline{y}^\alpha \delta \overline{y}^\beta \tag{4'}$$

e (4′) si ottiene dalla (4) mediante le (3) e (3′); la coppia di funzionali $\overline{a}_{\alpha\beta}[\overline{y}^t]$ ed $\overline{a}_\alpha[\overline{y}^t]$ dovrà essere determinata noti che sieno $a_{\alpha\beta}[y^x]$ ed $a_\alpha[y^x]$. Diremo che l'insieme di questi due funzionali costituiscono un tensore covariante a due indici. Eseguendo il calcolo si trova per le formule di trasformazione ([19]):

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{a}_{\alpha\beta}[\overline{y}^t] &= a_{\alpha\beta} ({}_\alpha y^{(\alpha)}) ({}_\beta y^{(\beta)}) + a_{\sigma\beta}[y^x] \, {}' y_\alpha^\sigma [\overline{y}^x] ({}_\beta y^{(\beta)}) + a_{\alpha\sigma}[y^x] \, {}' y_\beta^\sigma [\overline{y}^x] ({}_\alpha y^{(\alpha)}) + \\ &\quad + a_{\sigma\tau}[y^x] \, {}' y_\alpha^\sigma [\overline{y}^x] \, {}' y_\beta^\tau [\overline{y}^x] + a_\alpha [y^x] \, {}' y_\beta^\alpha [\overline{y}^x] ({}_\alpha y^{(\alpha)}) + \\ &\quad + a_\beta [y^x] \, {}' y_\alpha^\beta [\overline{y}^x] ({}_\beta y^{(\beta)}) + a_\sigma [y^x] \, {}' y_\alpha^\sigma [\overline{y}^x] \, {}' y_\beta^\sigma [\overline{y}^x], \\ \overline{a}_\alpha [\overline{y}^t] &= ({}_\alpha y^{(\alpha)})^2 a_\alpha [y^x]. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Le (5) danno la trasformazione per covarianza di un tensore a due indici.

Ritornando ora allo spazio privo di metrica, manterremo le (5) come definizione di un tensore covariante a due indici. Per un tensore controvariante ad un solo índice abbiamo il modello delle (3) e (3′). In generale sarà per definizione

---

([18]) Il porre fra parentesi come nella (3) e (3′) una variabile significa che rispetto a tale variabile non si deve integrare.

([19]) Cfr. MICHAL, loc. cit. in ([17]), pag. 89.

un tensore controvariante ad un indice, un funzionale che si trasforma con la legge:

$$(6)\qquad \begin{cases} \bar{\xi}^{\alpha}[\bar{y}^{t}] = \xi^{\alpha}[y^{x}]_{\alpha}\bar{y}^{(\alpha)} + \xi^{\sigma}[y^{x}]'\bar{y}^{\alpha}_{\sigma}[y^{x}] \\ \xi^{\alpha}[y^{x}] = \bar{\xi}^{\alpha}[\bar{y}^{t}]_{\alpha}y^{(\alpha)} + \bar{\xi}^{\sigma}[\bar{y}^{t}]'y^{\alpha}_{\sigma}[\bar{y}^{x}]. \end{cases}$$

Si comprende ora come con tale base si possano opportunamente definire tensori covarianti o controvarianti ad un numero qualunque di indici. Le formule peraltro risultano sempre più complicate.

Ora introduciamo nel nostro spazio una connessione. Ciò si può fare, ferme restando come leggi di trasformazione le formule (3) e (3′), in modo molto generale, ponendo anzicchè la (2) la legge di connessione seguente ([20]):

$$(7)\qquad \begin{aligned} \delta\xi^{i}[y^{x}] = & -L^{i}_{\alpha\beta}[y^{x}]\xi^{\alpha}[y^{x}]\delta y^{\beta} - M^{i}_{\alpha}[y^{x}]\xi^{\alpha}[y^{x}]\delta y^{\alpha} - \\ & - N^{i}_{\alpha}[y^{x}]\xi^{i}[y^{x}]\delta y^{\alpha} - O^{i}_{\alpha}[y^{x}]\xi^{\alpha}[y^{x}]\delta y^{i} - P^{i}[y^{x}]\xi^{i}[y^{x}]\delta y^{i}. \end{aligned}$$

La connessione è determinata dai cinque funzionali $L^{i}_{\alpha\beta}[y^{x}]$, $M^{i}_{\alpha}[y^{x}]$, $N^{i}_{\alpha}[y^{x}]$, $O^{i}_{\alpha}[y^{x}]$, $P^{i}[y^{x}]$. Tali funzionali non risultano tensori. Un tensore invece, costituito da un complesso di cinque funzionali, si può costruire scrivendo le condizioni di integrabilità di (7) ([21]). È l'estensione del tensore di curvatura. Se si ha:

$$L^{i}_{jk}[y^{x}] = \Gamma^{i}_{jk}[y^{x}] \quad \text{con} \quad \Gamma^{i}_{jk}[y^{x}] = \Gamma^{i}_{kj}[y^{x}]$$

e

$$N^{i}_{j}[y^{x}] = O^{i}_{j}[y^{x}]$$

la connessione si dice simmetrica, per ovvie ragioni. In questo caso l'equazione integro-differenziale delle geodetiche parametrizzate è data da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y^{i}(s)}{\partial s^2} + \Gamma^{i}_{\alpha\beta}[y^{x}(s)]\frac{\partial y^{\alpha}(s)}{\partial s}\frac{\partial y^{\beta}(s)}{\partial s} + M^{i}_{\alpha}[y^{x}(s)]\left(\frac{\partial y^{\alpha}(s)}{\partial s}\right)^2 + \\ + 2N^{i}_{\alpha}[y^{x}(s)]\frac{\partial y^{i}(s)}{\partial s}\frac{\partial y^{\alpha}(s)}{\partial s} + P_{i}[y^{x}(s)]\left(\frac{\partial y^{i}(s)}{\partial s}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Il MICHAL ha accennato lo studio di queste connessioni generali anche nel caso non simmetrico in varie altre note ([22]).

([20]) Cfr. MICHAL, loc. cit. in ([17]), pag. 90.

([21]) Cfr. MICHAL, loc. cit. in ([17]), pag. 92.

([22]) Citiamo quelle più attinenti a tale soggetto, MICHAL: *The differential geometry of a continous infinitude of controvariant functional vectors*, Proceedings of the National Academy Society, febbraio 1930 e *Projective Functional tensors and other allied functionals*, Proceedings of the National Academy of Sciences, febbraio 1930. Quest'ultimo lavoro contiene la generalizzazione del tensore di curvatura proiettivo di WEYL.